А.Г. Барабашев

Регресс математического априоризма.

1. Я утверждаю, что история математического априоризма, начиная с момента его возникновения у Канта, представляет собой периоды разработки все более и более слабых версий, каждая из которых в свою очередь опровергалась новыми фактами. Поэтому можно сказать, что вся история математического априоризма как исследовательской программы представляет собой регресс.

2. Чтобы описать этот регресс, необходимо:

а) выделить ту проблему и эксплицирующие ее вопросы, которую рассматривает и на которые стремится ответить математический априоризм;

б) указать центральные положения (тезисы) математического априоризма в том виде, в котором они были первоначально сформулированы Кантом, а также кратко осветить предысторию математического априоризма (в части формирования этих центральных положений);

в) предъявить аргументацию, с помощью которой Кант обосновывал свою позицию;

г) рассмотреть, что в математике может расцениваться как факты, подтверждающие или опровергающие математический априоризм, и показать, какие факты дальнейшего (после Канта) развития математики вошли в противоречие с исходной версией математического априоризма;

д) выявить, что уцелело в математическом априоризме после открытия этих фактов, и какие утверждения и способы аргументации пришлось ослабить в новых, Гуссерлевской и неокантианской версиях математического априоризма;

е) обосновать, что в математике первой половины XX в. были открыты дополнительные факты, заставляющие математический априоризм принять еще более слабую форму. Это подразумевает, во-первых, описание таких

фактов и, во-вторых, сравнение Гуссерлевской и неокантианской ослабленных версий априоризма с последующей, еще более слабой версией, праксеологическим математическим априоризмом;
ж) выделить в современном состоянии математики те новые тенденции и нарождающиеся факты (находящиеся в процессе принятия математическим сообществом утверждения), которые не укладываются и в последнюю, праксеологическую версию математического априоризма. Следствием обнаружения таких тенденций и фактов станет утверждение, что избежать дальнейшего, «пост-праксеологического» ослабления математического априоризма навряд ли удастся.

3. Общая проблема, в рамках которой развертываются основные концепции природы математики, может быть сформулирована как *проблема соотношения математики и реальности*. Эта проблема, если отвлечься от ее понятийного оформления, представляет собой типовой образ ситуаций вопрошания, возникающих в таких познавательных эпизодах, в которых математические понятия, утверждения, теории хотелось бы сопоставить с понятиями, утверждениями, теориями о реальном чувственно воспринимаемом мире. Математика поставляет примеры вопрошания, отталкивающиеся от разных типов связи математических утверждений с опытом человека, реальными познавательными ситуациями и встречающимися человеку объектами внешнего мира. Эти примеры как бы с разных направлений подводят к данной проблеме как к типовому образу ситуаций, придавая ей жизненность (т.е. что проблема соотношения математики и реальности не надумана, что практика математики ее постоянно воспроизводит).

Сопряжение значительно отличающихся ситуаций вопрошания, их соединение в одних понятиях необходимо означает использование столь общих наименований, что данная выше понятийная формулировка проблемы, несмотря на жизненность самой проблемы как чего-то, стоящего за понятиями, становится мало информативной, не указующей на концепции-решения, или единственную концепцию-решение проблемы. Более того, понятия «математика», «реальность», «соотношение» могут быть наполнены разным смыслом, что затрудняет нахождение подходов к решению проблемы. Другими словами, проблема соотношения математики и реальности выступает как условное обозначение (предельно общее наименование), объединяющее все концепции природы математики, но не позволяющее представить их по существу и выделить концепции-решения проблемы.

4. Философия трансформирует проблему в вопросы, понятийное оформление которых и сам настрой вопрошания подводят к тем или иным концепциям природы математики. Так, некоторые концепции природы математики возникли в результате попыток ответить на вопрос о том, *обусловлены ли содержание и истинность математических суждений чем то, отличающимся от эмпирической и от индивидуальной субъективной реальности (например, существуют ли всеобщие субъективные основания математики)?* Не обращение к экспериментальному опыту и сенсусу, не к психологическим индивидуальным характеристикам ученых-математиков, не к референтной истинности и приложимости математических суждений, не к эмпирической реальности, а именно к познающему субъекту «как таковому» – вот акценты и исходные понятия, используемые этим кругом концепций.

Наиболее известной разновидностью данного вопроса можно считать его априористскую трактовку. Классическая постановка вопроса в случае априоризма выглядит так: являются ли математические суждения априорными синтетическими, и благодаря какой человеческой способности такие суждения возможны? Другой вариант – идеалистическая трактовка: являются ли идеи, содержащиеся в математических утверждениях, врожденными, и если это так, то почему мы все обладаем одной и той же версией этих идей?

Две названные трактовки вопросов как бы предрасположены к двум ответам, концепциям природы математики: математическому априоризму и математическому идеализму, причем под последним я понимаю комплекс убеждений о врожденном характере математических истин.

Платон, Лейбниц, Кант, Гуссерль, неокантианцы, равно как и многие современные философы науки и философы математики, мне представляется, тяготеют к данным двум трактовкам вопроса об обусловленности содержания математики не эмпирической реальностью и не индивидуальной субъективной реальностью. У Платона концепции математического априоризма и математического идеализма существуют в неразвито-слитном виде в рамках представлений о ноэсисе и дианойе. Лейбниц развернул эти представления в направлении математического идеализма, а Кант использовал фрагменты концепции Лейбница при построении собственно математического априоризма. Как я утверждаю, после Канта математический априоризм постоянно ослаблял свои позиции под давлением внутриматематической практики, однако в философском плане его позиции все более совершенствовались, становились все более изощренными.

5. Впервые, по видимому, идея неэмпирического статуса математических утверждений была высказана Платоном в «Федоне» и развита в диалоге «Государство», книгах V-VII (см.: *Платон. Сочинения. Федон. Государство. Применительно к существованию математических объектов – см. Г.Б.Гутнер»Онтология математического дискурса», с.21-23. Но я хотел бы обратить внимание именно на статус математических утверждений, а не объектов*). Задавая вопрос, как возможны в мире чистых идей математические утверждения, он привлекал для ответа концепцию ноэсиса и писал, что одной из разновидностей интеллигибельного выступает такое, в котором предположения выдвигаются как гипотезы, исходящие не из чувственных объектов, но из чистых идей, они разворачиваются через чистые идеи и заканчиваются в чистых идеях. Утверждения геометрии и арифметики

в той части, в которой они имеют дело с идеями числа и фигуры, подпадают под власть ноэсиса. Однако, в то же время Платон указывал, что геометры исходят в своих рассуждениях из эмпирических фигур, как бы имея их исходным пунктом. Поэтому утверждения геометрии остаются на уровне дианойи, не добираясь до ноэсиса – чистой диалектики идей (см.: *W.A. Tait. Reflections on the concept of a priori thruth and its corruption by Kant. – in: Proof and Knowledge in Mathematics. Ed. By M.Detlefsen. New York, 1992, p.40-41*). Доказательства имеют в виду чертежи, то есть конкретные математические объекты, а не фигуры вообще (см.: *А.Родин, кандидатская диссертация*). Таким образом, главными моментами платоновской концепции, объединяющей в себе в неразвитом виде и априористскую, и идеалистическую трактовки, были: 1)промежуточное существование математических утверждений, расположенных между эмпирией (восхождение вверх, анализ в направлении от эмпирических основоположений) и миром эйдосов (спуск вниз, синтез в направлении от эйдосов числа и фигуры к сочетающим их утверждениям); 2)познание математических истин как обращение к врожденному душе знанию о мире эйдосов; 3)синтетический характер математических суждений. Как будет показано далее, пункты 2 и 3 хорошо совместимы с априористской и идеалистической трактовками вопроса о неэмпирических и несубъективных основаниях математики.

6. Развитие взглядов Платона было осуществлено Лейбницем. Он ввел само понятие «истины априори», относящейся к свойствам некоторой структуры, существующей независимо от того, есть ли эта структура в эмпирическом мире (по Лейбницу, в мире простых субстанций). Сделано это было следующим образом. *Лейбниц. Монадология. Также: Leibniz G.W. The monadology ad other philosophical writings. (transl. by R. Lotta. London. Oxford Univ. Press, 1948, para 33-35*). Имеются два вида истин – истины разума и истины факта. Истины факта ситуативны, и противоположные к ним

возможны при некоторых других обстоятельствах. Истины разума необходимы, и противоположные к ним утверждения невозможны, ибо из них выводится противоречие. Истины разума посредством анализа сводимы к все более и более простым, покуда мы не приходим к исходным (примитивным) истинам разума и к составляющим их понятиям. Определение примитивных истин разума не может быть дано, и они не могут быть доказаны. Тем самым, Лейбниц использовал декартовское «непосредственное знание» как прямое усмотрение истины (интеллектуальная интуиция). В то же время, противоположные к ним утверждения непосредственно противоречивы. Далее Лейбниц вводит понятие «истины априори». По Лейбницу, априори суть истины, необходимо следующие из исходных истин разума. То есть, априори есть логически необходимые (выводимые) истины. Эти истины имеют аналитический характер (хотя сами понятия аналитического и синтетического были введены Кантом). В частности, вся информация, содержащаяся в теоремах геометрии, согласно Лебницу, содержится в исходном понятии пространства. Естественно, такая точка зрения не удовлетворяла Канта, предполагавшего синтетический характер математических утверждений. Как пишет В. Тэйт, «Это истолкование Лейбница дало основание немотивированному тезису Канта, высказанному им в *Трансцендентальной Эстетике,* что пространство не есть понятие.» (*W. Tait, ibid., p.40*).

7. При построении концепции математического априоризма Кант использовал представления, разработанные Платоном и Лейбницем. От Платона, как мне кажется, Кант взял два пункта:

1) он воспринял тезис о причастности математических утверждений сфере чистых идей и даже усилил его, отказавшись от промежуточного статуса математических утверждений (отрицая чувственные основания математических утверждений, в частности, воплощенные в чертежах

эмпирические прообразы геометрических фигур как важные для рассуждений геометров);

2) он признал наличие нового знания в математических утверждениях, выразив это в тезисе о синтетическом характере математических утверждений.

От Лейбница Кант унаследовал, главным образом, понятие «истины априори», отказавшись в то же время от ее аналитического характера и от логической выводимости априорных истин из исходных примитивных.

С точки зрения собственно математического априоризма эти заимствования зачастую воспринимаются как источник неясностей, недоразумений и внутренних несогласований. Например, как отмечал Б. Рассел (*B.Russell. A critical exposition of the philosophy of Leibniz. London. George Allen and Unvin, 1937*), а затем Ф.Китчер и ряд других авторов, важные недоразумения проистекали из смешивания Кантом априорного как процесса познания и как его результата, априорных суждений. Как указывал Рассел, это именно неправомерное смешивание: априорный процесс познания не обязательно влечет за собой априорные суждения, и наоборот (например, априорные суждения могут быть результатом апостериорного познавательного акта) (*Russell, p.24*). Предложенные Кантом критерии априори – необходимость и непосредственная универсальность – отнесены им не только к суждениям, но и к самому процессу познания. Но, в таком случае, априорные познавательные акты приобретают черты Декартовского и Лейбницевого прямого усмотрения интеллектуальной истины, что не только устанавливает дополнительный мостик между концепциями Канта и Лейбница, но и, в принципе, подводит к Лейбницевскому тезису об аналитичности истины априори. Применительно к собственно математическому априоризму в его кантовской (классической) версии, эти нестыковки приводят к внутренним предпосылкам развития, предполагают процесс «отлаживания» философских позиций. В частности, в данном случае дальнейшее развитие математического априоризма характеризовалось отказом от априорности процесса математического познания (то есть, стало ясным, что схемы доказательств не являются априорно данными).

8. Концепция синтетического априори как самостоятельная эпистемологическая концепция не сводится к заимствованиям, но имеет свои центральные утверждения. И именно Кант в границах этой концепции сформулировал собственно математический априоризм - ту его версию, которая стала классической, и от которой можно отсчитывать историю математического априоризма. Вопрос об обусловленности математики субъектом в рамках этой версии трансформировался в вопрос о том, существуют ли априорные основания познания, обеспечивающие именно такие (а не другие) основания математики и структуру математического дискурса. Ответ Канта - ядро программы математического априоризма, его центральный тезис – звучал так: у математики субъективные основания, и они суть априорные основания человеческого познания. Имеется априорное синтетическое созерцание в формах пространства и времени, и математика единственна именно потому, что единственно это созерцание. Это созерцание, продолжал Кант, реализуется как конструирование.[1] Такое конструирование начинается с конструирования понятий математических объектов. Так, в геометрии любой теореме об окружностях предшествует конструирование понятия «окружность» через постулаты и аксиомы геометрии (в данном случае, особенно важен постулат, что из любой точки на плоскости можно провести окружность любого радиуса). Для этого у нас есть неэмпирическая интуиция, представляющая либо чистое воображение (формальная интуиция), либо, как пишет Кант, чистую форму чувственной интуиции, накладываемую на эмпирию посредством рисования чертежа и т.п. действий. Указанная неэмпирическая интуиция универсально применима при конструировании всех возможных геометрических фигур (скажем, разных треугольников). Затем следуют доказательства, использующие ранее созданные (сконструированные) понятия. Доказательства в математике,

делящиеся на дискурсивные (понятийный вывод) и на демонстрации (при которых в мышлении удерживается его объект, используется «формальная интуиция объекта»), в обеих случаях представляют собой конструирование, т.е. утверждается, что доказательство распадается на два типа конструирования, на понятийный вывод и на демонстрацию с удержанием объекта в мышлении. Независимость от чувственного опыта в обеих типах конструирования – первая важнейшая черта математических суждений. Кстати, каждое математическое суждение по самой сути конструирования напрямую соотносимо с априорным синтетическим созерцанием (для каждого суждения я созерцаю, что «это именно так»); я полагаю, что Ф.Китчер не прав, когда он при описании «априористской программы» делит суждения в цепочке доказательного вывода на первичные (соотносимые с априорным созерцанием) и вторичные (вывод согласно правилам, сохраняющим априорное созерцание первичных суждений) (*Ph.Kitcher "The nature of mathematical knowledge". Oxford Univ. Press, New York, Oxford, 1984, p.38,39*). Вторая важнейшая черта – синтетический характер математических суждений. В отличии от аналитических суждений, в которых «предикат содержится в субъекте суждения» и используется принцип непротиворечия (скажем, таково суждение «тело протяженно»), синтетические суждения опираются на принцип непротиворечия и на формулу «предикат не содержится в субъекте суждения, но состоит с ним в связи[2]». Например, суждение, что площадь трапеции равна произведению высоты на полусумму ее оснований, не является аналитической истиной и не имеет логического характера. Наконец, прикладная значимость математики обусловлена применимостью пространства и времени как формальной интуиции к «внешнему чувственно воспринимаемому миру» в виде чистых форм чувственной интуиции. Тем самым, Кант тяготел ко взгляду, что прикладная математика также априорна (*W.Tait, ibid., p.44, 47-48*). Разъясняя это положение, Кант пишет: «Исследуя выше понятия пространства и времени, нетрудно было дать понять, каким образом они, будучи априорными знаниями, тем не менее необходимо должны относиться к предметам и делают возможным синтетическое знание о них независимо от всякого опыта. В самом деле, так как предмет может являться нам, т.е. быть объектом эмпирического созерцания, только с помощью таких чистых форм чувственности, то пространство и время суть чистые созерцания, a priori содержащие условие возможности предметов как явлений, и синтез в пространстве и времени имеет объективную значимость.» (*И. Кант. Критика чистого разума. Часть вторая. Трансцендентальная диалектика. Глава вторая. О дедукции чистых рассудочных понятий. – И. Кант. Сочинения. Том 3. М., Мысль, 1964. с. 185*).

9. Концепция математического априоризма, предложенная Кантом, должна учитывать две основных группы факторов. Во-первых, в философском (концептуальном) плане она должна быть представлена как можно более изящно и полно. Все возможные нестыковки, двусмысленное использование понятий должны быть устранены, а отсылки и пересечения с другими философскими концепциями природы математики – четко обозначены. Математический априоризм, как я уверен, успешно справляется с этой задачей, и именно поэтому он пользуется столь большим влиянием среди философов. Во-вторых, математический априоризм должен соответствовать математической практике, то есть тому положению дел, которое наблюдается в реально функционирующей («работающей») математике. Конечно, математическая практика разнообразна, и ни один отдельно взятый факт, утверждение (теорема), пример или контрпример, не могут поколебать математический априоризм. Относительно отдельных фактов он неуязвим. Однако, в математике есть факты и другого рода. К ним относятся значимые кластеры теорий, включая идеологию этих теорий, массивы часто используемых теорем, принятые и распространенные типы математического дискурса, основополагающие приложения и принципы использования математического знания в этих приложениях. Это – интегральные факты

математики. С ними любая философская концепция математики вынуждена считаться – в противном случае, она будет восприниматься как красивая игрушка философов, далекая от реальной жизни. Именно о воздействии таких фактов на математический априоризм и пойдет дальше (начиная с п.11) речь.

10. Предваряя возможное возражение, выскажу один важный дополнительный тезис. Однажды возникнув, *концепция математического априоризма развивается*. В этой связи хотелось бы поспорить с теми кантоведами, которые резко отрицательно относятся к попыткам модернизации взглядов Канта. Мне представляется, что такой подход к Канту не продуктивен. Математический априоризм – не сформировавшаяся единовременно, а затем застывшая концепция. У Канта не следует искать то, что как бы гениальной предусмотрительностью было заложено им в концепцию математического априоризма с целью полностью учесть будущую математическую практику. Не надо полагать Канта провидчески поднявшимся над горизонтом доступного ему современного состояния математики, не надо полагать, что у Канта содержатся ответы на все вопросы, поставленные математикой последующих эпох. Я исхожу из того, что математический априоризм развивается, что исследователи после Канта не просто читают и разъясняют его взгляды, а делают реальное дело. Они снимают неопределенности во взглядах Канта, истолковывают неясности (о которых сам Кант и не подозревал) в пользу сохранения центральных положений концепции. Кант предупредил возможное будущее развитие математики и сделал математический априоризм достаточно гибким к возможному воздействию открываемых интегральных фактов именно благодаря тому, что он не все предусмотрел и не все ясно расставил по местам. Конечно, по мере развития математики возникают новые неопределенности, неясности в математическом априоризме, появляются новые вопросы, на которые математический априоризм должен давать

ответы. Но эти неясности, неопределенности, вопросы характеризуют более глубокие уровни проработки программы математического априоризма.

11. Как расценивать послекантовское развитие математического априоризма в его соотношении с математикой, как прогрессивный или регрессивный сдвиг программы? Я постараюсь показать, что это был именно регресс.

Первый «удар фактами» по математическому априоризму был нанесен открытием неевклидовых геометрий. После открытия первой из них, гиперболической геометрии[3], были созданы риманова геометрия, проективная геометрия, барицентрическая геометрия, аффинная геометрия, эрмитова геометрия, геометрия Лаггера, неархимедовы геометрии, и т.д. В них варьировались разные постулаты и аксиомы геометрии, вводились вообще другие основания, получались новые, отличающиеся от евклидовых, результаты. Факты, представляющие собой целый класс основоположений и результатов в рамках новых геометрических теорий, были таковы:

А. Постулаты и аксиомы. Наиболее известные факты относились к основаниям геометрии, ее пятому постулату. Если утверждение, альтернативное пятому евклидову постулату, не приводит к противоречию и влечет за собой продуктивные следствия, то как тогда быть с кантовским видением постулатов? Напомню, что у Канта постулаты суть практические предположения в смысле оснований дальнейшего конструирования. В этих предположениях содержится синтез (синтетическое априорное созерцание), впервые представляющий нам объекты геометрии и задающий их понятия. Постулаты не могут быть доказаны, их обоснование коренится непосредственно в нашем априорном созерцании. Что, возможны *различные* априорные синтетические созерцания?

Б. Понятия. Возникают экзотические понятия, возможные в разных неевклидовых геометриях, но невозможные в евклидовой геометрии. Например, понятие «двуугольник» существует в римановой геометрии, но в евклидовой оно запрещено (такой синтез невозможен). Получается, что возможно вариативное в разных геометриях конструирование понятий. Но как быть тогда с *необходимым* характером истин априори?

B. Суждения (теоремы). В евклидовой и неевклидовой геометриях имеются не совпадающие по содержанию теоремы. Например, в евклидовой геометрии все треугольники с равными углами подобны, что влечет соотношение их площадей, равное квадрату линейного коэффициента подобия. В гиперболической геометрии это не так. Построить треугольник, подобный данному, но других линейных размеров, нельзя. Насколько можно доверять доказательствам «альтернативных» теорем? Как быть с тем, что процесс доказательства суть *конструирование как* априорный *синтез*?

Указанные факты, как видно, затрагивают важные компоненты математического априоризма в том его прочтении, которое приписывалось Канту. Общее мнение математического сообщества той эпохи, как я полагаю, состояло в том, что по математическому априоризму нанесен серьезный удар. Так, А. Пуанкаре считал, что если бы априорное созерцание действительно имело место, то мы бы и не могли себе представить неевклидовы геометрии. Он писал: «…мы должны спросить себя, в чем состоит природа геометрических аксиом. Не являются ли они синтетическими априорными суждениями, как говорил Кант? Будь это так, они навязывались бы нам с такой силой, что мы не могли бы ни вообразить себе положение противоположного содержания, ни основать на нем теоретическое построение. Неевклидовых геометрий не могло бы быть.» (*А. Пуанкаре. О науке. М., Наука, 1983, с.40*). Действительно, общим местом для всех было отождествление единства априорного созерцания с единственностью евклидова пространства. Евклидовость пространства возводилась, так сказать, не из практики эмпирического оперирования с фигурами на поверхности земли, твердыми телами, натянутыми веревками, лучами света, и т.п., а из наличия формы чистой эмпирической интуиции: другая попросту не могла быть мыслима. Эта форма совпадает с формальной интуицией, так что единственно мыслимая прикладная геометрия суть приложение «чистой» геометрии. Аналогично, такая же ситуация полагалась и с соотношением чистой и прикладной арифметики.

12. Реакция математического априоризма на представленные факты развития математики в общих чертах может быть представлена как комбинация уточнений и допущений, сформулированных Гуссерлем и неокантианцами[4]. Я постараюсь показать, что эта реакция напоминает регрессивный сдвиг программы в том значении, которое приписывалось этому понятию Лакатосом в концепции научных исследовательских программ.

Во-первых, Кант не предсказывал эти новые интегральные факты развития математики. Их пришлось учитывать «post factum". С этим были согласны все исследователи послекантовской эпохи. Схема такого учета может варьироваться. Один из вариантов может быть резюмирован в тезисе "лучшая защита – нападение". Некоторые неокантианцы интерпретировали открытие неевклидовых геометрий как блестящее подтверждение математического априоризма: так, Л. Нельсон (*сб. "Новые идеи в математике" под ред. А.В. Васильева, СПб, 1914, с.18, 25)* утверждал, что, поскольку астрономически невозможно обнаружить, какая из геометрий верна, то все они должны укладываться в некие более общие посылки не эмпирического происхождения. Но у Канта нигде нет прямого утверждения, что наряду с евклидовой геометрией <u>должны</u> исследоваться и другие геометрии, не дается никакого намека на варьирование постулатов и аксиом! Другой вариант ограничивал априоризм в пользу эмпиризма. Например, Г.Гельмгольц полагал, что пространство – интуитивное понятие, а аксиомы следуют из нашего опыта. Третий вариант сводил дело к соображениям удобства. Обращаясь к словам А. Пуанкаре, мы избираем более *замечательные* для нас объекты, с которыми чаще имеем дело в нашем опыте. (*А.Пуанкаре. О науке, с.81).* Таким образом, “блестящее подтверждение”, модернизация тезисов априоризма, конвенциальные допущения в совокупности составляют, по терминологии Лакатоса, оправдание фактов, а не их предсказание.

Во-вторых, пришлось изменить и уточнить некоторые вспомогательные положения математического априоризма, которые Кант связывал с центральным комплексом утверждений о математических суждениях как априорном синтетическом созерцании в форме пространства и времени. В особенности я бы отметил, что была подвергнута сомнению непреложность интуиции как основания доказательства. Так, Ф.Клейн пришел к выводу, что чем дальше мы продвигаемся в создании сложных математических теорий, тем более интуиция нам изменяет. Очевидность обманчива. Л.Больцман эмоционально писал по этому поводу: “Я вполне согласен с тайным советником Клейном в отрицательном отношении к учению Канта. Я совершенно не понимаю, как можно говорить о доказательствах из наглядного представления. Когда я читаю Канта, я совершенно не понимаю, как разумный человек может писать это. Наглядное представление ровно ничего не доказывает. Наглядное представление есть лишь повторение того, что мы воспринимаем чувственным образом. Я не могу совершенно понять того, что человек приносит с собою наглядное представление пространства, которое находится над опытом или до опыта; я не знаю, как это следует себе представить.” (*сб. “Новые идеи в математике”, с. 124*). Конечно, Больцман огрубил ситуацию и сделал из нее сугубо эмпирический вывод. В действительности, речь может идти только о <u>не</u> наглядности процедур доказательства, т.е. об отсутствии ясного отбрасывания ложных гипотез вне логическим путем (через наличие априорного созерцания). Принять математические утверждения и доказать истинность математических утверждений, принять и обосновать – разные вещи. Логический аппарат в математике усмотрением не заменим. Отсюда, необходимо ограничение математического априоризма в части отождествления процедуры доказательства с конструированием как поступенчато осуществляемым априорным синтетическим созерцанием. Априоризм должен потесниться и уступить часть своего “царства” логической процедуре. Однако очевидность, собственно априорное созерцание остается с суждениями, за границы априоризма частично выводится только процедура их обоснования.

В-третьих, вместо априорного созерцания в форме евклидова пространства возникло допущение о наличии единого фундамента, абсолютного пространства, спецификациями которого являются пространства всех геометрий. Это усовершенствование математического априоризма, предложенное Л.Нельсоном и следующее из отмеченной ранее стратегии “лучшая защита – нападение”, получило внутреннее оправдание. Именно, синтетические априорные суждения допускают противоположные как осмысленные, хотя у Канта не говорится, что они истинны наряду с евклидовыми. Неопределенности у Канта позволяли принять такую трактовку, а совместимость различных геометрических систем (так, гиперболическая планиметрия выполняется на псевдосфере, расположенной в евклидовом трехмерном пространстве; "Эрлангенская программа” Ф.Клейна устанавливает единые основания различных геометрий через классификацию групп движений; другой вариант взаимосвязи геометрий был предложен в концепции Б.Римана, в которой “основным понятием является не фундаментальная группа, а фундаментальная (произвольная) квадратичная форма, являющаяся обобщением понятия расстояния между двумя бесконечно близкими точками.” (см.: *В.П. Визгин “К истории “Эрлангенской программы” Ф. Клейна” – Историко-математические исследования, вып.XVIII. М., Наука, 1973, с.222-223*), подводила математическое основание под подобную точку зрения. Похожая ситуация, кстати, складывалась и с расширением понятия числа (введение кватернионов и других числовых систем). Однако, насколько я знаю, в контексте влияния на априоризм эта сторона эволюции математики рассматривалась только А.Н. Кричевцом, причем он “дошел”только до этапа введения отрицательных чисел и его осмысления Кантом и не продвинулся далее.

В то же время, сохранялась и более консервативная позиция, согласно которой равноправие различных геометрий есть только в сфере математики (как математических теорий) и физики (как теорий, имеющих приложения в физике), но в фундаменте находится именно евклидова геометрия как схема нашего созерцания (В.Майнеке). Все остальные геометрии доступны нам постольку, поскольку они ограниченно моделируются с помощью евклидовых образов.

14. Что получилось у Гуссерля и неокантианцев (новый, урезанный математический априоризм)?

Г.Гуссерль «Начало геометрии». М., «Ad Marginem”, 1996 – испытал влияние марбургской школы и Б.Больцано. Основная идея – очищение сознания от эмпирического содержания (феноменологическая редукция), поскольку мы конституируем ощущения в мышлении. А так как акты сознания есть оценочные акты, то при очищении сознания от эмпирии в итоге остается последнее неразложимое единство сознания, его интенциональность как направленность на предмет. Содержание интенциональности, т.е. <u>на что</u> направлено наше сознание, Гуссерль называет ноэмой, а форму интенциональности, т.е. <u>как</u> сознание направляется на предмет, он обозначает как когито (“я думаю, что”). Когито обеспечивает саму интенциональность, а ноэма обусловливает возможные вопросы об объекте. (*Robert S.Tragesser “Husserl and realism in logic and mathematics”.Cambridge, Cambridge Univ.Press, 1984, p.80-82.*) Далее, интенциональность выводит, как выражается Гуссерль, на разные “онтологические регионы” (кстати, близкая конструкция была в статье Душкина!). Эти онтологические регионы могут быть регионами воображаемых объектов, возникающих при мысленном осуществлении некоторых действий, например действий по воображаемому скручиванию, склеиванию и т.п. некоторых поверхностей. Р.Трагессер показывает, что при этих действиях нам необходимо приходится достраивать наше представление объектов, с которыми мы действуем. По настоящему, «у нас есть иллюзия установления синтетических истин априори.» (*R.Tragesser, ibid., p.97*). Таким образом, у Гуссерля происходит отказ от пред-заданности априорных форм созерцания. Ноэмы эволюционируют, что обеспечивает расширение математики;

марбургская школа – Г.Коген, П.Наторп, Э.Кассирер. *Э.Кассирер “Познание и действительность. Понятие о субстанции и понятие о функции”. СПб, “Шиповник”, 1912*. Гипотеза занимает место априорных форм, и с ее помощью производится упорядочивание созерцания;

баденская школа – В.Виндельбанд, Э.Ласк, Г.Риккерт. *Г.Риккерт “Введение в трансцендентальную философию. Предмет познания”. Пер. с немецкого. Киев, 1904*;

физиологическое направление – Ланге, Г.Гельмгольц;

психологическое направление – Л. Нельсон;

реалистическое направление – А.Риль, О. Кюльпе, О.Бехер;

Видно, что реконструировать общую позицию неокантианцев, обрисовать единое состояние исследовательской программы математического априоризма второй половины XIX – первого десятилетия XX вв. крайне тяжело. Внутренние разночтения между ними, и даже прямо противоположные взгляды на некоторые вопросы (как, например, Г.Гельмгольца, Л.Нельсона и В.Майнеке о равноправии различных геометрий с точки зрения наличия их априорного созерцания: Гельмгольц – полностью равноправны, Нельсон – абсолютная геометрия в основании созерцания, а все остальные геометрии производны, Майнеке – евклидова геометрия в основании созерцания) не позволяют построить приемлемую для всех них во всех частях схему. Тем не менее, относительно дальнейшего развития математического априоризма можно выделить ряд черт, фиксирующих его регресс.

Конечно, ядро программы, утверждения об априорном синтетическом характере математики, о том, что в основе этого знания лежит созерцание, осталось. Однако, вспомогательные утверждения и способы их защиты претерпели изменение. Ослабление программы математического априоризма заключалось, на мой взгляд, в следующем:

- математические утверждения ухватываются актом синтетического созерцания, представляющем из себя последовательность процедур (конструирование) в соответствии с формальной интуицией пространства и времени. Но доказательство этих утверждений все равно нужно, и логический вывод не устраним. Иными словами, мы “видим”, что данное утверждение истинно, что это так на самом деле, мы понимаем смысл утверждения, но такого видения мало. Необходимо также системное представление, обнаружение связи данного утверждения с другими утверждениями, то есть доказательство. Здесь – простор дедукции. Из доказательства в его “идеальном” исполнении (без пробелов и прямых отсылок к интуитивному усмотрению) математический априоризм изгоняется;
- представления о пространстве и, в меньшей степени, времени как формах априорного созерцания, данные Кантом, теряют определенность. Например, неясно, что понимается под пространством и насколько можно сохранить евклидово представление;
- принимается положение, что математика может расширяться и выходить за пределы наглядности, очевидности и единственности теорий;
- априорное созерцание распространяется главным образом на “чистую” математику, но не на приложения (прикладную математику).

15. Новые факты против – формально-аксиоматическое построение математики. В частности, новый образ геометрии. Новый взгляд отчетливо выразил П.К.Рашевский. Он писал: “Можно сказать, что геометрия как математика – это геометрия, рассматриваемая с точки зрения ее логической

структуры." (*П.К. Рашевский "Основания геометрии" Гильберта и их место в историческом развитии вопроса". – в кн.: "Д. Гильберт "Основания геометрии". М.-Л., ОГИЗ ГИТТЛ, 1948, с.10*)

16. Совсем новый математический априоризм – дальнейшее отступление.

Перминов – один вариант, предел отступления априоризма в которой положен стабильностью праксеологического конструирования. Граница отмечена двумя соединенными межевыми знаками: стабильность однажды доказанного, и принятие суждений не на формально-логических основаниях. Вот, по моему, центральный тезис данной конструкции: "Подтверждение (проверка доказательства) математической теоремы представляет собой всегда конечный процесс, сводящийся к установлению возможности или невозможности некоторых комбинаций в конечном множестве элементов, т.е. к элементарным праксеологическим констатациям, которые уже не могут быть подвергнуты ревизии со стороны логики или опыта. Доказательства математических теорем являются столь же законченными, сколь законченной может быть наша практическая деятельность по упорядочению конечного числа элементов." (*В.Я. Перминов "Развитие представлений о надежности математического доказательства" М., Изд-во МГУ, 1986, с. 66*). Здесь уже затрагивается происхождение априорных форм в практической деятельности – вещь, не обсуждавшаяся в неокантианстве (я бы сказал, что ближе всего к этой позиции Э.Гуссерль, полагающий из других оснований пластичность ноэм).

Вторая ветвь хорошо исследована Кричевцом: признание эволюционной нестабильности самих априорных форм – вещи, сохранявшейся непоколебимой в неокантианстве. *K.Lorenz "Kant's Doctrine of the apriori in the Light of Contemporary Biology". Ed. H.C. Plotkin. Learning, Development, Culture. Essays on Evolutionary Epistemology. Chichester, 1982; Ж.Пиаже. Избранные психологические труды. М., Просвещение, 1969.*

Третий вариант – совмещение структурализма и формального подхода к математике как совокупности формальных структур, и трансцендентализма. (*Г.Б.Гутнер «Онтология математического дискурса». М., Издание Московского Культурологического Лицея, 1999, с.17*). Г.Гутнер пишет: «Математический объект существует постольку, поскольку сконструирован. Однако математика не есть простое конструирование объектов. Она представляет собой решение задач, а потому каждый объект появляется в ней в рамках более общей структуры, продуцируемой познавательными способностями для того, чтобы получить такое решение. Значит, объект существует, поскольку встроен в такую структуру в виде ее элемента. Сама структура предстает как конструкция способности воображения, и о ней может быть поставлен вопрос – в рамках какой еще более общей структуры она существует.» (*Г.Б.Гутнер, с.41*). Интересно, что и у Гутнера, и у Кричевца большое значение придается анализу рефлектирующей способности суждения («Третья критика» Канта).

Неясно, куда отнести *М.К. Мамардашвили "Кантианские вариации" М., АГРАФ, 1997* ?

17. Возможны, я бы даже сказал назревают, новые интегральные математические факты, требующие дальнейшего ослабления математического априоризма. Это новый характер приложений математики в первую очередь. Много качественных приложений, аллегорического использования языка математики. Здесь не просматривается априорное синтетическое созерцание, посему из приложений априоризм решительно изгоняется. Во вторую очередь, под сомнение ставятся некоторые фундаментальные для целых классов теорий утверждения математики. Я имею в виду тот спор, который сейчас происходит относительно доказательств Кантора в теории множеств. Мне представляется, что защитникам априоризма следовало бы задуматься не о том, как повергнуть другие концепции природы математики, а как отступить дальше без

значительных потерь, как еще более ослабить априоризм, пожертвовав его второстепенными положениями с целью защиты его центральных тезисов.

---

[1] Отдельным вопросом является то, имеются ли наперед заданные правила (схемы) такого конструирования, или нет. Этот вопрос применительно к подведению эмпирических явлений под одно правило или суждение, как указывает А.Н. Кричевец, решался Кантом по-разному. В «Критике чистого разума» Кант полагает, что правило или суждение как бы предзадано и неизменно. В «Критике способности суждения» правило формируется через рефлектирующую способность суждения, оно гибко. (см.: *А.Н. Кричевец «Априорность и адаптивность»М., РПО, с.8-11*). Если принимать позднюю позицию Канта, то, как мне кажется, мы вплотную подойдем ко взгляду Д.Гильберта, что не существует универсального правила решения всех задач.

[2] Значимость нахождения предиката в связи с субъектом суждения особо отмечает М.Леппакоски – *M. Leppakoski "The transcendental how. Kant's transcendental deduction of objective cognition". Almqvist&wiksell International, Universitet Stockholms, 1993, p.54.*

[3] О драматизме этого открытия свидетельствует, в частности, то обстоятельство, что творцы гиперболической геометрии непременно хотели выяснить ее отношение к действительности. Например, Я.Больяи писал: «…обе геометрии одинаково доступны ввображению, и навсегда останется неразрешимым, какая из них является действительной.» (*Я. Больяи. Аппендикс… », М.-Л., 1950, с.196.*). Иная позиция была у Н.И. Лобачевского. Он считал, что «Как бы то ни было, новая Геометрия, основание которой уже здесь положено, если и не существует в природе, тем не менее может существовать в нашем воображении и, оставаясь без употребления для измерений на самом деле, открывает новое, обширное поле для взаимных применений Геометрии и Аналитики.» (*Н.И. Лобачевский. О началах геометрии. – в сб.: «Об основаниях геометрии», под ред. А.П. Нордена, М., ГИТТЛ, 1956, с.48*).

[4] Защитные аргументы неокантианцев собраны в кн.: *В.Я.Перминов «Философские и методологические проблемы математики» М., Изд-во МГУ, 1986, с.60-62.*