С.Н. Бычков

МЕТАМАТЕМАТИКА И ОПЫТ

Проблема "Метаматематика и опыт" не выглядит особо значимой по сравнению с вопросом о соотношении с эмпирической действительностью самой математики. Действительно, суть гильбертовского замысла заключалась в обосновании непротиворечивости классических математических конструкций посредством оперирования их формальными записями в рамках "наглядных средств" элементарной теории чисел[1]. Корректность использования "идеальных объектов математики" гарантировалась бы в случае успеха метаматематической редукции заведомой корректностью оперирования "конструктивными объектами" метаматематических рассуждений, принадлежащих сфере непосредственного человеческого опыта[2]. С теоремой Геделя о неполноте надежды на осуществимость "эмпирического обоснования" непротиворечивости математики стали более чем призрачными. Первым вывод о необходимости использования абстрактных понятий для доказательства непротиворечивости классической теории чисел сделал в 1935 г. П. Бернайс, однако наибольшую известность в плане выводов из неудачи первоначальной гильбертовской программы получила вышедшая в 1958 г. работа [4] самого автора этого фундаментального метаматематического результата. Абстрактные понятия, согласно Геделю, "охватывают не свойства и отношения *конкретных*

---

[1] Возможности подобных средств интуитивной арифметики иллюстрируются в [1] на примере доказательства иррациональности $\sqrt{2}$.

[2] В недавних работах Е.Д. Смирновой содержатся аргументы в пользу того, что этот "метаматематический опыт" у Гильберта не так уж и непосредственен, а носит, скорее, трансцендентальный характер в духе построений Канта [2,3].

объектов (например, комбинаций знаков), а относятся к *мысленным образам* (например, к доказательствам, осмысленным высказываниям и т.д.), причем при рассмотрении доказательств используется такое понимание последних, которое получается не из комбинаторных (пространственно-временных) свойств представляющих их знаковых комбинаций, а из их смысла" [4, с.299].

В финитной установке гильбертовской метаматематики различаются две составные части. "Во-первых, конструктивный элемент, который состоит в том, что речь о математических объектах может идти лишь постольку, поскольку они могут быть предъявлены или фактически построены. Во-вторых, специфически финитистский элемент, требующий, сверх того, чтобы объекты, о которых делаются высказывания и которые служат исходными данными построений и получаются в результате, были "наглядными", что означает, в конце концов, пространственно-временное сопоставление им элементов, все особенности которых, за исключением равенства и различия, несущественны" [ibid., с.301]. От этого второго требования Гедель и считает необходимым отказаться.

В результате, как видим, проблема обоснования корректности использования идеальных объектов переносится из математики в метаматематику. И пусть в метаматематике объем используемых абстрактных понятий существенно меньше, нежели в математике "объектной", все равно подозрение в обоснованности их применения не может не сохраниться.

Мы не будем специально рассматривать вопрос о возможности расширения границ финитной установки Гильберта с сохранением достаточно надежных гарантий удостоверения непротиворечивости "объектных" теорий[3]. Речь пойдет о другом подходе к проблеме "Метаматематика и опыт", связанном с различиями в логических аппаратах метаязыка и языка формализованной математической теории. Основной тезис, обосновываемый в дальнейшей части работы, заключается в следующем: акцентирование вещественно-пространственного характера объектов в финитном подходе Гильберта приводит к использованию родовидовой логики Аристотеля. В то же время формальное исчисление предикатов фактически опирается на неаристотелевский вариант формальной логики, восходящий к учению стоиков. Подобное рассогласование ставит под сомнение обоснованность ряда моментов в доказательстве теоремы Геделя о неполноте формальной арифметики как в семантическом, так и в синтаксическом его вариантах. Но обо всем по порядку.

§ 1. Родовидовая логика и опыт

В современной формальной логике представление о роде не имеет сколько-нибудь явной связи с чувственным опытом. Так, в одном из базовых учебников для высшей школы *род* определяется просто как универсум **U**, по которому пробегает некоторая предметная переменная α. *Вид* при этом отождествляется с видовым отличием $\mathbf{A}(\alpha)$, выделяющим из универсума предметы, подпадающие под понятие α $\mathbf{A}(\alpha)$ [6, с. 186-187].

Зачатки подобного понимания можно найти уже у Аристотеля, когда он приводит последнее из значений, в которых употребляется

[3] Этот вопрос обсуждается, например, в [2,5].

термин "род": "Основная часть определений при обозначении сути вещи – это род, видовые отличия которого обозначают свойства" (Метафизика, 1024 b 5-6). Первые два значения рода у Аристотеля, однако, имеют четкое "биологическое происхождение", ибо в них "говорится о роде: касательно непрерывного рождения [существ] одного и того же вида; касательно первого двигавшего того же вида, что и порожденное им…" (ibid., 1024 b 7-8)[4]. И совершенно не случайно то обстоятельство, что поначалу реальный род неразрывно был связан с физическим временем.

Как отмечается в [8, с. 85], вневременной характер математических объектов был осознан в платоновской Академии. Это и дало толчок тому чисто количественному пониманию родовидовых отношений, которое принято на вооружение формальной логикой [8, с. 80] и которое используется в классической математике.

Такие разделы классической математики, как арифметика, алгебра, анализ имеют дело не с высшими, а с промежуточными родами. Как показано в [9], это приводит к тому, что в доказательствах от противного в этих науках на деле используется не закон исключенного третьего, а более слабый закон контрапозиции

$$(A \_ B) \_ (\rceil B \_ \rceil A).$$

Этот закон генетически связан с родовидовой логикой, в которой отрицание понимается как *внутреннее*, осуществляемое внутри рода. В качестве примера можно привести следующее умозаключение: если из равенства сторон треугольника вытекает равенство противолежащих этим сторонам углов, то, наоборот, неравенство

[4] Интересно в этой связи сопоставление базовых понятий современной теории алгоритмов с терминами биологии в [7, с. 25].

углов треугольника влечет за собой и неравенство соответствующих сторон. Отрицание равенства углов треугольника преобразуется здесь в их неравенство. Это *определенное* отрицание, в противовес неопределенному отрицанию "Неверно, что углы α и β треугольника равны", из которого нельзя вывести никакого следствия без предварительного его преобразования из сугубо негативного суждения в утвердительное суждение о неравенстве углов. Эта, казалось бы, совершенно безобидная логическая процедура, отождествляющая внешнее и внутреннее отрицания суждения[5] в контексте содержательного математического рассуждения, приводит к осложнениям в теории множеств, родовидовой статус понятий которой далеко не столь очевиден, как в разделах классической математики.

§ 2. Родовидовая логика и канторовская диагональная процедура

В косвенном рассуждении от противного, обосновывающем невозможность пересчета точек континуума натуральными числами, также содержится преобразование внешнего отрицания суждения во внутреннее отрицание. После того, как для построенного по произвольному отображению $f: X \to P(X)$ "диагонального" объекта Z показано, что он не может принадлежать образу $f(X)$ множества X, отсюда сразу же делается молчаливый вывод, что построенная совокупность Z и является тем подмножеством множества X, которое не охвачено "пересчетом" при помощи отображения f. Иными

---

[5] Для последующего изложения вполне достаточно сугубо формального – лингвистического – различения этих двух видов отрицания в зависимости от расположения частицы "не" по

словами, утверждение "Совокупность Z не является множеством вида $f(t)$ ни для какого $t \in X$" преобразуется в утверждение "Совокупность Z является подмножеством множества X, отличным от множеств вида $f(t)$ для $t \in X$". В работах [9-11] уже анализировалось существенное отличие подобного преобразования внешнего отрицания суждения во внутреннее от аналогичных операций в разделах классической математики. А именно, на примерах было показано, что это преобразование никак не вписывается в закон контрапозиции, достаточный для проведения косвенных рассуждений от противного, например, в геометрии и теории чисел. Вместе с тем, возможно и прямое рассуждение, демонстрирующее некорректность указанного перехода с точки зрения аристотелевской логики.

В "наивной" теории множеств для того чтобы некоторая совокупность X могла рассматриваться в качестве множества, должно выполняться естественное "минимальное требование": для произвольного объекта x из "универсума"[6] должно выполняться либо условие $x \in X$, либо противоположное условие $x \notin X$ (это условие предполагается автоматически выполненным и во всех вариантах аксиоматической теории множеств)[7]. Если принять это за *определение* понятия множества в "наивной" теории множеств, отделяющее множества от совокупностей, заведомо множествами не могущими быть, то *не-множествами* тогда окажутся те

отношению к связке "есть".

[6] Под универсумом понимается совокупность всевозможных объектов, могущих рассматриваться в качестве элементов каких-либо множеств. Более формально в соответствии с традицией это можно определить как совокупность объектов x, удовлетворяющих соотношению $x = x$.

[7] Проверка принадлежности произвольного элемента универсума некоторой совокупности X считается, таким образом, более простой и фундаментальной операцией, нежели удостоверение факта принадлежности X к классу множеств.

совокупности X, для которых относительно некоторого объекта x выполняются одновременно два условия $x \in X$ и $x \notin X$ [8], либо ни одно из них[9]. В математике стремятся оперировать достаточно определенными совокупностями, так что всегда допускается принципиальная возможность в отношении любого объекта x из универсума ответить исчерпывающим образом относительно его принадлежности к рассматриваемой в рассуждении совокупности. Поэтому (неявно) предполагается, что возникающая в процессе математических рассуждений совокупность может не оказаться множеством только по первой из вышеназванных причин.

Когда в диагональной процедуре демонстрируется, что совокупность Z, состоящая из всех тех элементов x, принадлежащих множеству X, которые не являются элементами подмножества $f(x)$, не охватывается “пересчетом”, задаваемым отображением f, *форма противоречия* “$t \in Z$ и $t \notin Z$” относительно "гипотетического элемента" $t \in X$, для которого допускается возможность равенства $f(t) = Z$, оказывается в точности такой же, как и в парадоксе Рассела[10]. Почему же в этом случае не делается вывод о том, что "диагональный объект" Z в действительности множеством не является? Только потому, что совокупность Z с самого начала предполагается множеством[11].

---

[8] Эта ситуация возникает в парадоксе Рассела.

[9] Если совокупность задана столь неопределенным образом, что не для всякого x из универсума можно зафиксировать хотя бы одну из рассматриваемых альтернатив.

[10] В работе [9, с. 315] отмечено то обстоятельство, что Рассел пришел к формулировке своего парадокса именно в результате анализа канторовской диагональной процедуры.

[11] Соответствующую аксиому "Всякая частичная совокупность множества является множеством" Кантор, как показано в [9, с.313-314], сформулировал лишь в 1899 г. в письме к Дедекинду. В аксиоматической теории множеств Цермело-Френкеля это предположение формулируется в виде аксиомы выделения, входя тем самым в самый фундамент данной теории.

"Ранний" Кантор придерживался иного взгляда на понятие множества. В работе 1883 г. "Основы общего учения о многообразиях. Математически-философский опыт учения о бесконечном" он так сформулировал свое понимание: “Под "многообразием" или "множеством" я понимаю вообще всякое многое, которое можно мыслить как единое, т.е. всякую совокупность определенных элементов, которая может быть связана в одно целое с помощью некоторого закона, и таким образом я думаю определить нечто, родственное платоновскому ειδος или ιδεα…” [12, с. 101] Трудно представить, каким образом "диагональный объект" Z можно сопоставлять с платоновским ειδος′ ом. Это еще можно было бы допустить, если бы платоновский ειδος каким-либо образом "помогал" производить процедуру проверки принадлежности каждого из элементов t множества X собственному образу $f(t)$. Но поскольку само отображение f считается существующим лишь *на время* косвенного рассуждения от противного, то надежда на помощь платоновской онтологии в данной конкретной ситуации едва ли будет оправданной…

Какие аргументы помимо "позднего" канторовского понятия множества можно привести против попытки рассматривать *форму противоречия* “$t \in Z$ и $t \notin Z$” как свидетельство того, что "диагональный объект" Z множеством не является? Прежде всего, тот, что для *конечного* множества X совокупность Z множеством все же являться будет. Но вследствие чего это мы в этом уверены? Никакой ειδος здесь ни при чем, просто для конечных множеств у нас есть алгоритм, позволяющий поочередно сравнивать элемент t с элементами подмножества $f(t)$ множества X. В терминологии теории алгоритмов это означает, что Z мы считаем множеством лишь постольку, поскольку оно является *разрешимым множеством*. Понятие разрешимого множества уже никак с платоновским ειδος'ом не связано, поскольку опирается не на актуальную, а на потенциальную бесконечность. Именно по этой причине, кстати, его использование и считается допустимым не только в математике, но и в метаматематике.

Нетрудно видеть, что канторовская диагональная процедура была бы корректной с точки зрения родовидовой логики не только для конечного, но и для счетного множества X, если бы мы каким-то образом были уверены в том, что счетная совокупность Z является разрешимым множеством в смысле теории алгоритмов. Нетрудно видеть, однако, что Z могло бы быть разрешимым только в предположении "конструктивности" отображения f, а ограничение подобного рода никак с существом "наивной" теории множеств не связано. По этой причине Z фактически не может рассматриваться и как разрешимое множество.

Если в теории алгоритмов все же говорят, например, о перечислимых неразрешимых множествах, то только потому, что отсутствие какого-либо алгоритма для установления принадлежности некоторого элемента t множеству Z не считается достаточным основанием для заключения о том, что совокупность Z множеством не является (вспомним, что в математике не место неопределенности!). Для того чтобы закрыть место неопределенности (т.е. исключить вторую из перечисленных ранее "причин", не позволяющих совокупность считать множеством), в математическую логику и вводится понятие *алгоритма с оракулом*[12].

---

[12] В этом обобщении понятия алгоритма назначение оракула как раз и состоит в том, чтобы давать ответ на вопрос о принадлежности объектов некоторому фиксированному – вообще

Его назначение в том, чтобы не ограничивать класс счетных множеств одними разрешимыми множествами.

Важное с точки зрения проблемы "Метаматематика и опыт" замечание относительно сущности понятия оракула принадлежит В.А. Успенскому и А.Л. Семенову: "…Теория алгоритмов… формализует некоторые стороны деятельности человека (в отличие от других математических дисциплин, которые формализуют нечто не предполагающее непременного присутствия человека). В частности, теория алгоритмов использует понятие *элементарной операции*. Понятие элементарности – существенно "человеческое" понятие… Можно считать, что человек, осуществляя вычисление, непрерывно обращается к некоторому оракулу, только оракул этот отвечает на столь "элементарные" вопросы (типа "Тождественны или нет эти два символа?"), что даже не замечается. Можно представить себе более мощный, чем у человека, запас вычислительных средств, подразумевающий, в частности, обращение к некоторому нетривиальному (с человеческой точки зрения) оракулу (который в рамках этих средств не осознается скорее всего, как внешний оракул, а признается частью самих этих средств)" [7, с.98-99]. Таким "сверхчеловеческим" средством (вместе с содержащимся в нем оракулом) для теории алгоритмов и является "поздняя" канторовская теория множеств, сознательно ориентированная на Бога, а не на человека [9, с. 306-314]. Если теория алгоритмов вводит вместе с понятием оракула в метаматематику неразрешимые множества, то нечего и надеяться на какое-либо облегчение проблемы "Метаматематика и опыт" по сравнению с более общей "Математика

говоря, *неразрешимому* – множеству *A*. Отсюда другое название алгоритма с оракулом *A* – *алгоритм относительно A*.

и опыт": опыт, по определению, может быть только *человеческим* опытом.

Общепринятая в современной "наивной" теории множеств (а вместе с ней и в опирающейся на теорию множеств теории алгоритмов) родовидовая схема носит, таким образом, следующий характер:

$$\{\text{конечные множества}\} \subset \{\text{разрешимые множества}\} \subset$$
$$\subset \{A\text{-разрешимые множества}\} \subset \{A\text{-разрешимые множества и не-множества}\}.$$

Этому случаю соответствует неаристотелевская логика, в которой отождествляются внешнее и внутренне отрицания.[13]

Если же ограничить используемые в метаматематике средства (подобно классической "доканторовской" математике) родовидовой аристотелевской логикой, то родовидовая схема для счетных множеств[14] будет выглядеть совсем иначе:

$$\{\text{многообразия "раннего" Кантора}\} \subset \{\text{разрешимые множества}\} \subset$$
$$\subset \{\text{совокупности: множества и не-множества}^{15}\}.$$

Действительно, если множество элементов может быть связано в единое целое по образцу платоновского $\varepsilon\iota\delta o\varsigma'$а (наподобие множества четных чисел или множества квадратов), то для него нетрудно построить и алгоритм[16]. Неразрешимое в смысле теории алгоритмов множество не будет при этом и множеством с точки

---

[13] Как показано в [9, с. 322], фактическое отождествление двух типов отрицания через аксиому "Всякая частичная совокупность множества является множеством" произведено Кантором именно в связи с диагональной процедурой.

[14] В метаматематике в ее исходном гильбертовом замысле достаточно, очевидно, только счетных множеств.

[15] Класс не-множеств при этом будет шире, чем в ранее приведенной схеме, включая в себя не только "расселовские" множества, но и "недостаточно определенные".

[16] Обратное, как можно убедиться, неверно. Произвольная возрастающая последовательность натуральных чисел является разрешимым множеством в смысле теории алгоритмов, однако многообразием в смысле "раннего" Кантора может и не быть [10, с. 24].

зрения родовидовой логики. В случае отсутствия алгоритма, выясняющего однозначным образом для некоторого натурального n его принадлежность части Z множества натуральных чисел, для Z может выполняться как первая, так и вторая возможности, характерные для не-множеств. С точки зрения родовидовой аристотелевской логики мы вынуждены, таким образом, рассматривать форму противоречия “$n \in Z$ и $n \notin Z$” как признание совокупности Z не-множеством.

В доказательстве теоремы Геделя о неполноте, как известно, используются рассуждения "диагонального" характера. Важно поэтому выяснить, не отражается ли на корректности используемых в доказательстве рассуждений полученное (в результате анализа специфики родовидовой логики применительно к диагональной процедуре) ограничение класса счетных множеств лишь разрешимыми множествами.

§ 3. Родовидовая логика и теорема Геделя о неполноте

Все семантические доказательства теоремы о неполноте первопорядковой арифметики так или иначе опираются на факт существования перечислимого неразрешимого множества (см., например, [13, с.41-42]. Поскольку существование подобного множества не может быть обосновано в рамках родовидовой логики, то доказательство теоремы Геделя требует использования "канторовской" логики, отождествляющей внешнее и внутреннее отрицания и потому принципиально несоотносимой с опытом.

Не так просто дело обстоит с синтаксическими доказательствами.

Рассмотрим сначала восходящее непосредственно к Геделю доказательство из [14, с.115-159]. После построения формулы

$$\forall x_2 \rceil W_1 (\overline{m}, x_2),$$

(**)

утверждающей свою собственную невыводимость в формальной арифметике S, вторая часть предложения 3.31 "Если S ω-непротиворечива, то формула ⌉(**) невыводима в S" доказывается путем вывода из предположения + ⌉(**) его отрицания "неверно, что+ ⌉ (**)". Пусть T – совокупность теорем формальной арифметики. Тогда полученный в доказательстве результат означает, что T – не-множество "расселовского" типа.

Примечательно, что у этого утверждения есть аналог в математической логике – утверждение о нерекурсивности[17] совокупности T_K геделевых номеров элементов T[18]. Так как геделеву нумерацию можно выбрать допустимой[19], то тогда и T также будет неразрешимым множеством. Тем самым приведенная выше интерпретация *формы противоречия* как указания на "не-множественность" совокупности T в геделевском доказательстве получает подтверждение в виде известной теоремы математической логики.

Следует, однако, заметить, что конструкция Россера, использующая аналогичную, но более тонкую идею построения формулы, утверждающей, что в случае существования ее вывода в S должно выводиться также и ее отрицание, свободна от отмеченного недостатка [14, с.160-162]. Может создаться впечатление, что за счет

---

[17] В [14] вместо термина "разрешимость" используется "рекурсивность".

[18] Следствие 3.36 в [14].

перехода от семантики к синтаксису удается избавиться от затруднений, связанных с неопределенностью понятия неразрешимого множества в родовидовой логике. Однако и здесь не все гладко. Чтобы разобраться в этом, следует вернуться к самим основам математической логики и рассмотреть с точки зрения различения родовидовой и канторовской логик саму концепцию теорий первого порядка в математической логике.

§ 4. Родовидовая логика и теории первого порядка

Аксиомы теории первого порядка подразделяются на *логические* и *собственные.* В исчислении предикатов, где отсутствуют собственные аксиомы, как показано в [16], под знаком $\rceil$ может подразумеваться только внешнее отрицание. На примере наиболее компактной аксиоматики из [14, с. 65] данное обстоятельство можно проиллюстрировать на том же примере предиката, что и в [16], взяв в схеме аксиом

$$(\rceil B \supset \rceil A) \supset ((\rceil B \supset A) \supset B) \qquad (1)$$

в качестве B предикат "число 9 есть голубое".

Если под $\rceil B$ понимать внутреннее отрицание "число 9 есть не-голубое", а в качестве A взять, например, "1 = 0", то антецедент $(\rceil B \supset \rceil A)$ формулы (1) будет истинным суждением, а консеквент $((\rceil B \supset A) \supset B)$, очевидно, ложным. Следовательно, вся формула (1)

[19] См. [15, с. 63-64].

окажется ложной. Но тогда под $\rceil B$ может подразумеваться только суждение "Число 9 не является голубым", т.е. внешнее отрицание.

В то же время в формальной арифметике, как это видно из [1, с. 330-331] на примере доказательства формулы

$$a \neq 0 \_ \exists x\, (x' = a),$$

отсутствие равенства между элементом a и 0 интерпретируется как *неравенство* элемента соответствующей индивидной области предметной константе из этой же предметной области. Это вытекает из того обстоятельства, что элемент a, не будучи равным 0, в то же время считается подпадающим под действие собственных аксиом формальной арифметики. Последнее означает, что собственные аксиомы этой теории "высекают" род из ничем не ограниченного универсума исчисления предикатов, а операция отрицания "незаметно" преобразуется из операции внешнего в операцию внутреннего отрицания. Ясно, что это можно расценить только как проявление непоследовательности в построении Гильбертом оснований математической логики – непоследовательности, связанной с отказом им от представления об *универсальной индивидной области*, которого придерживались Фреге и Рассел[20].

Завершая анализ сюжетов, связанных с "эмпирической" интерпретацией результатов метаматематики, подчеркнем, что этим последняя никак не затрагивается, если только метаматематику рассматривать не как дисциплину, созданную для обоснования собственно математической науки, а как собственный ее раздел. В таком случае было бы неуместно для ее анализа применять родовидовую логику Аристотеля, поскольку после создания теории множеств она была вытеснена де-факто в основаниях математики "канторовской" логикой, в которой внешнее и внутреннее отрицания отождествляются. Если же пытаться сохранить верность исходному гильбертову замыслу и стремиться ограничивать набор используемых в метаматематике приемов средствами, применяемыми в "эмпирических" науках и таких разделах классической математики, как теория чисел или геометрия, то тогда возникнет задача пересмотра всего ее инструментария с точки зрения именно аристотелевской родовидовой логики. Эта задача актуальна ровно в той мере, в какой метаматематика претендует на право называться общенаучной –"философской" – дисциплиной.

§ 5. Еще раз о логике

Приведенная критика построений метаматематики опирается на ту же самую родовидовую логику, которой (пусть не всегда последовательно) пользуется сама метаматематика. Возможна и “внешняя” критика метаматематических результатов, основывающаяся на идее другой – гармонической – логики. Подобная критика представлена в работах [17-18]. Выводы этих работ ставят под сомнение часть результатов, представленных в [9-11, 16]. Следует, однако, отметить, что указанная критика не затрагивает аргументацию настоящей работы.

Метаматематика, согласно ее *исходному замыслу*, не вправе опираться на идеализации теории множеств (в том числе и на понятие вычислимости с оракулом). По этой причине она и вынуждена ограничить объем понятия множества разрешимыми (в смысле теории алгоритмов) множествами. Неразрешимые множества

---
[20] [1, с. 211].

"канторовской" теории алгоритмов становятся с точки зрения "аристотелевской" теории алгоритмов тогда примерами не-множеств, причем представление о них основывается на абстракции потенциальной бесконечности. Такая трактовка не-множеств не противоречит выводам работы [18].

Более проблематичной выглядит ситуация с использованием в [16] "смыслового" (а не чисто лингвистического) противопоставления внешнего и внутреннего отрицания, корректность чего как раз и ставится под сомнение в [17]. Суждение "число 9 есть не-голубое", с точки зрения [17], не ложно, а просто бессмысленно. Но подобное возражение ставит под сомнение не столько формализацию арифметики, сколько формализацию самого исчисления предикатов. Проблематизация же исчисления предикатов затрагивает не конкретный раздел метаматематики, а весь ее замысел в полном объеме. В настоящей работе критика теоремы Геделя велась *изнутри*, а не извне метаматематики. Вместе с тем необходимо отметить, что, поскольку проблема “Метаматематика и опыт” далеко не исчерпывается обсуждением вопросов, связанных с теоремой Геделя, содержащиеся в [17-18] аргументы критического характера заслуживают отдельного обсуждения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Гильберт Д., Бернайс П.* Основания математики. Логические исчисления и формализация арифметики. М., 1979.
2. *Смирнова Е.Д.* Логика и философия. М., 1996.

3. *Смирнова Е.Д.* Логика в философии и философия логики // Логические исследования. Вып. 7. М., 2000. С. 217-231.
4. *Гедель К.* Об одном еще не использованном расширении финитной точки зрения // Математическая теория логического вывода. М., 1967.
5. *Крайзель Г.* Исследования по теории доказательств. М., 1981.
6. *Бочаров В.А., Маркин В.И.* Основы логики. М., 1999.
7. *Успенский В.А., Семенов А.Л.* Теория алгоритмов: основные открытия и приложения. М., 1987.
8. *Мочалова И.Н.* Концепция научного знания в ранней Академии // Некоторые проблемы истории античной науки. Л., 1989.
9. *Бычков С.Н., Зайцев Е.А., Шашкин Л.О.* Диагональная процедура Г. Кантора и теория множеств (историко-научный и логический контекст) // Историко-математические исследования. Вторая серия. Вып. 4 (39). М., 1999. С. 303-324.
10. *Бычков С.Н., Шашкин Л.О.* К критике канторовской диагональной процедуры доказательства несчетности континуума // Традиционная логика и канторовская диагональная процедура. М., 1997. С. 22-29.
11. *Бычков С.Н., Шашкин Л.О.* Канторовская диагональная процедура и непротиворечивость теории множеств // Историко-математические исследования. Вторая серия. Вып. 5 (40). М., 1999. С. 290-300.
12. *Кантор Г.* Труды по теории множеств. М., 1985.
13. *Успенский В.А.* Теорема Геделя о неполноте. М., 1982.
14. *Мендельсон Э.* Введение в математическую логику. М.,1984.

15. *Смальян Р.* Теория формальных систем. М., 1981.
16. *Виннер Д.И.* Виды отрицания и исчисление предикатов первого порядка//Математические методы решения инженерных задач. М., 1999. С. 51-53.
17. *Петросян В.К.* Критика аристотелевской теории отрицания. М., 2001.
18. *Петросян В.К.* Критика канторовской “диагональной процедуры”. М., 2001.