Григорян А.А.

Алгоритмическая теория вероятностей: здравый смысл и проблема обоснования применимости теоретико-мерной теории к реальным случайным событиям

Х.Крамер, размышляя над историей теории вероятностей, заметил, что "если в 1920 году она едва ли заслуживала название математической теории, то в 1945 году вступила в послевоенный мир в качестве хорошо организованного раздела чистой математики, обладающего собственными задачами и методами и постоянно расширяющимися сферами приложения в других науках, так же как и в различных видах практической деятельности". Действительно, переворот в теории вероятностей, завершившийся появлением и признанием научным сообществом фундаментальных результатов А.Н.Колмогорова, не только кардинально преобразовал уже существующее знание, но и открыл принципиально иные возможности получения мощных математических результатов, существенно расширивших область применения теоретико- вероятностных методов. Однако было бы неверным утверждать, что теоретико-мерную аксиоматику приняло подавляющее большинство ученых, многих из которых отталкивали ее абстрактность и возникающие интерпретационные трудности. Не случайно, публикуя в 1961 г. написанную еще в 1934 г. статью Хинчина с критикой теории Мизеса, Б.В.Гнеденко отмечал, что "внешне привлекательные и убедительные на первый взгляд концепции Мизеса продолжают находить многочисленных сторонников, особенно среди представителей внематематических направлений исследований”. Более того, работы Э.Бореля, написанные им после появления теоретико-мерной аксиоматики, в которых он из принципиальных соображений не использует аппарат теории меры, свидетельствуют о том, что и для математика, стремящегося к приложению теоретико-вероятностных методов, аксиоматика Колмогорова могла быть камнем преткновения из-за наличия ряда интерпретационных проблем.

Интерпретационная схема, предложенная Колмогоровым в 1933 г., не разъясняла, почему приложение теоретико-мерной теории вероятностей к решению естественнонаучных проблем должно давать хорошие результаты, однако удивительным образом рецепт применения, предложенный Колмогоровым, никогда не подводил. Поэтому в течение нескольких десятилетий после создания аксиоматики основные усилия ее сторонников были сосредоточены на получении далеко идущих математических результатов, в то время как проблема обоснованности применений стояла на втором плане. При этом ученые, применявшие теоретико-мерную теорию вероятностей, пытались дать неформальное обоснование эффективной применимости, пользуясь, как это ни парадоксально, языком отвергаемой ими в качестве логической основы теории вероятностей частотной концепции Мизеса. "Я уже высказывал точку зрения, - писал в 1963 г. Колмогоров, - что основой применимости математической теории вероятностей к случайным явлениям реального мира является частотный подход к вероятности в той или иной форме, неизбежность обращения к которому горячо доказывал фон Мизес... Я иногда выдвигал частотный подход к вероятности, включавший сознательное использование не вполне формальных соображений о "практической достоверности" "приблизительного постоянства частот при больших сериях испытаний" без точного описания того, какие серии "достаточно велики" и т.д.”.

Интерпретационные трудности были связаны прежде всего с истолкованием понятия вероятности. Обычно предполагалось, что при условии достаточно большого числа испытаний отношение количества благоприятных исходов к общему количеству испытаний всегда дает число, близкое, а в пределе равное вероятности (или, пользуясь языком аксиоматики Колмогорова, мере) рассматриваемого события. "Однако сказать "всегда" здесь было бы неверно:

строго говоря, это происходит не всегда, а лишь с вероятностью 1 (а для конечных серий испытаний с вероятностью, близкой к 1. Тем самым понятие вероятности произвольного события определяется через понятие события, имеющего вероятность, близкую (а в пределе равную) единице, которое, следовательно, уже нельзя определить таким способом без явного логического круга" . Таким образом, неформальное использование частотных соображений без использования аксиом Мизеса не помогало прояснению ситуации. Правда, формулировка самих аксиом Мизеса, была совершенно неудовлетворительной с логической точки зрения.

Поиски выхода из создавшегося положения, а также путей преодоления методологического кризиса в области, связывающей теорию вероятностей с ее приложениями, и привели наряду с другими факторами к созданию в начале 60-х гг. алгоритмического подхода в теории вероятностей. Наибольший вклад в построение новой концепции внесли А.Н.Колмогоров, Д.Соломоноф и П.А.Мартин-Леф. Важнейшей работой Колмогорова, непосредственно предшествовавшей выдвижению алгоритмических идей в теории вероятностей, была написанная в 1956 г. глава "Теория вероятностей" в обзорном труде советских математиков "Математика, ее содержание, методы и значение".

В процессе построения теоретико-мерной аксиоматики Колмогоров и его последователи из всего комплекса философско-методологических проблем теории вероятностей обсуждали главным образом их собственно методологическую часть (уровень абстрактности аксиом, принципы построения аксиоматики, выбор основных, неопределяемых понятий). Но в упомянутой нами работе Колмогоров вполне определенно ставит и пытается анализировать онтологические и гносеологические проблемы, связанные с определением понятий случайности и необходимости, со статусом вероятностных и статистических закономерностей в структуре реальности.

0дним из фундаментальных представлений здравого смысла является представление о том, что случайность события означает отсутствие всякой закономерной связи между событием и комплексом условий, при котором зафиксировано его появление. Разумеется, такое представление не может стимулировать создание и развитие науки о случайном, ибо в структуру понятия науки необходимым образом входит понятие закона (закономерности). В связи с этим стоит напомнить, что с точки зрения частотной концепции Мизеса говорить о каких-либо закономерностях появления единичного случайного события бессмысленно - законы теории вероятностей могут давать ответ на вопрос о поведении больших совокупностей событий - коллективов, в то время как утверждение о численном значении вероятности какого-либо отдельного события в рамках данной концепции не является допустимым.

Колмогоров вслед за А.А.Марковым считает вполне возможным в теории вероятностей утверждение о вероятности появления отдельного случайного события А. Такая точка зрения неявно предполагает наличие определенной закономерности между событием А и комплексом условий S, при котором оно происходит или не происходит. Это предположение, столь необходимое для приложения математической теории вероятностей на практике, соответствует онтологическому принципу диалектической философии (как материалистической, так и идеалистической), гласящему, что случайность есть проявление необходимости. Надо отметить, однако, что упомянутый философский принцип, стимулируя поиски закономерностей, управляющих случайными явлениями, сам по себе мало что проясняет в существе проблемы создания прозрачной интерпретационной схемы приложения теории вероятностей.

Естественно считать, что природа закономерностей, описывающих явления, которые мы называем случайными, существенно отлична от закономерностей, управляющих событиями, называть случайными которые у нас нет достаточных оснований. Поэтому в отличие от динамических или однозначно определенных закономерностей, закономерность, связывающую случайное событие А с комплексом условий S , мы вслед за Колмогоровым будем называть вероятностной. Так, можно говорить о существовании вероятностной закономерности, связывающей попадание в цель единичного выстрела при данных условиях стрельбы, или срок службы какого-либо прибора - с качеством исходных материалов и технологией его изготовления.

Как отмечал В.Феллер, говоря о теоретико-мерной теории вероятностей, "успех современной математической теории вероятностей приобретен следующей ценой: теория ограничивается лишь некоторыми сторонами общего предмета" , а именно тем, что "может быть названо физической, или статистической, вероятностью" . Другими словами, отвергая частотный подход Мизеса как принцип построения теории, математическая теория вероятностей формулирует лишь такие вероятностные закономерности, которые, будучи интерпретированными, могут быть выражены через закономерности частотного типа (или статистические, как их принято называть), которые Мизес сделал единственным предметом своего исследования. Только тогда, когда существует устойчивость частот появления или непоявления данного события в больших сериях испытаний, современная математическая теория вероятностей может быть использована для утверждения о наличии вероятностной закономерности. При этом статистическая закономерность лишь отражает вероятностную закономерность, связывающую событие А с комплексом условий S.

В работе, опубликованной в 1956 г., Колмогоров приводит пример вероятностной закономерности, связывающей срок службы лампы с качеством материалов и технологией ее изготовления. Он замечает, что если рассмотреть графики □ (□), выражающие процент ламп, служащих не менее Т часов, то оказывается, что эти графики при различных (но достаточно больших) сериях ламп мало отличаются друг от друга. Основываясь на этом свойстве больших совокупностей ламп, мы имеем возможность утверждать о существовании вероятностной закономерности, связывающей срок службы лампы с условиями ее изготовления. "Вероятностный закон, - отмечает Колмогоров, - задается при помощи функции P(T), где P(T) - вероятность того, что отдельная лампа (произведенная при данных условиях) будет гореть не менее Т часов”. При этом существенно, что утверждение о существовании у события А (срок службы отдельной лампы) определенной вероятности P(A)=P заключается в том, что в различных, достаточно больших сериях испытаний частоты появления события А (в данном случае □ (A)) будут приблизительно одинаковы и близки к Р. Гипотеза о существовании константы Р, описывающей связь между событием А и условиями (в данном случае - это условия изготовления лампы), "к которой частоты оказываются, "вообще говоря", тем ближе, чем больше число испытаний n, хорошо оправдывается для широкого класса явлений. Такого рода явления,- заключает Колмогоров, - естественно называть вероятностно-случайными (или стохастическими)”. Нетрудно заметить определенную расплывчатость рассуждений о "близости" вероятности и частоты, однако эта расплывчатостъ в данном случае неустранима, ибо утверждение о близости Р и □ имеет лишь вероятностный характер.

Таким образом, отход от представлений здравого смысла о природе случайного приводит на основе использования теоретико-вероятностных методов к выделению вероятностно-случайных явлений. Эти случайные явления характеризуются наличием статистических закономерностей, которые отражают более фундаментальные, вероятностные закономерности. При этом если статистических закономерностей обнаружить не удается, то предположение о существовании каких-либо закономерностей, управляющих случайными явлениями, требует дополнительного обоснования. Отсюда следует особая важность самостоятельного научного и философско-методологического анализа статистических закономерностей, на чем определенно настаивал Мизес.

Чисто эмпирическое исследование статистических закономерностей вряд ли представляется возможным, тем более что теория вероятностей обеспечивает возможность после установления экспериментальным путем некоторых исходных закономерностей логически выводить новые. При этом не поддающийся полной формализации реальный смысл основных вероятностных понятий никак не влияет на полную формальную отчетливость аксиоматизированной теории вероятностей. Однако при таком подходе интерпретационние трудности не преодолеваются: они либо сглаживаются на уровне неформальных рассуждений, либо вовсе игнорируются. Насколько велики должны быть по своей численности серии испытаний, чтобы можно было уверенно говорить о наличии или отсутствии свойства устойчивости частот интересующего нас события? Каковы могут быть допустимые отклонения частот друг от друга и от вероятности (или числа, к которому "сходятся" частоты) при тех или иных численностях серии испытаний, чтобы считать применение теоретико-вероятностных методов обоснованными.

Уже получить ответ на эти вопросы оказывается очень непросто, хотя, как отмечает Колмогоров, закон больших чисел и предельные теоремы теории вероятностей в определенной мере проливают свет на имеющиеся здесь неясности. "Существеннее другая скрытая в наших формулировках неясность, относящаяся к способу формирования тех серий, в которых должна наблюдаться устойчивость частот появления события А". Действительно, способ формирования серий испытаний принципиально важен с точки зрения экспертизы явления на "случайность". Поэтому естественно, что "желая... искусственно создать по возможности чисто случайные явления, специально заботятся о том, чтобы никакими доступными средствами нельзя было заранее выделить те случаи, в которых явление А будет иметь тенденцию появляться чаще, чем с некоторой нормальной для него частотой". Руководствуясь именно такими указаниями, составляются, например, тиражи государственных займов. Отсюда можно заключить, что проблема формирования серий испытаний подспудно толкает исследователя к восстановлению в правах представления здравого смысла, гласящего, что случайность есть отсутствие закономерности.

Проблема формирования серий испытаний была одной из центральных проблем мизесовской концепции, что нашло свое отражение во второй аксиоме коллектива (принцип иррегулярности). Мизес, правда, не дает строгих определений и однозначного алгоритма формирования серий, что, как позднее отмечал Колмогоров, трудно было от него ожидать, ибо строгое определение самого понятия "алгоритм" появилось значительно позже. Тем не менее принцип иррегулярности Мизеса, его стремление в явном виде иметь некоторые правила формирования серий содержали большой эвристический потенциал, о чем свидетельствует дальнейшая история теории вероятностей. Однако, как показывает анализируемая работа 1956 г., Колмогоров не сразу осознал принципиальную важность решения проблемы формирования серий испытаний. Он пытается обойти эту проблему, включая принцип формирования серий в комплекс условий S . "Итак, - пишет Колмогоров, - говорить о том, что событие A является "вероятностно-случайным" и приписывать ему определенную вероятность P=P(A/S) можно только тогда, когда указан класс допустимых способов формирования серий испытаний. Указание этого класса мы будем считать включенным в условия S ". Приведенные здесь рассуждения дают возможность Колмогорову сформулировать важное философско-методологическое следствие: "При заданных условиях свойство события A быть вероятностно-случайным и иметь вероятность P=P(A/ S) выражает объективный характер связи между условиями S и событием A. Иначе говоря, не существует событий абсолютно случайных, события являются случайными или необходимыми в зависимости от того, в какой связи они рассматриваются, но в определенных условиях событие может быть случайным совершенно объективно, и это свойство не зависит от состояния знаний какого бы то ни было наблюдателя".

Заметим, что этот вывод не является беспредпосылочным. Отказ от представлений здравого смысла требует определенного упрощения реальной ситуации, примирения с определенной расплывчатостью формулировок, более того, фактического игнорирования на данном этапе проблемы формирования серий испытаний. Некоторым оправданием последнего может служить то обстоятельство, что в реальных ситуациях часто само формирование серий происходит без вмешательства исследователя, независимо от него, как, например, в случае движения молекул в газе, носящего вероятностно-случайный характер.

Хинчин, отвергая претензии Мизеса на построение теории случайных явлений и считая его концепцию совершенно неудовлетворительной, был убежден в адекватности существу дела теоретико-мерной аксиоматики теории вероятностей. Подобный взгляд, абсолютно противопоставлявший два подхода и отвергающий возможность формально-математического развития идей Мизеса, некоторое время разделял также и Колмогоров. (Сам Мизес был решительным противником попыток формально-математического изложения своей теории.).

"Наличие аксиоматизированной теории вероятностей, - писал Колмогоров в 1956 г., - избавляет нас от соблазна "определять" вероятность способами, претендующими на соединение их непосредственной естественнонаучной убедительности с приспособленностью к построению на их основе формально строгой математической теории. Такие определения приблизительно соответствовали бы в геометрии определению точки как того, что получится, если бесконечное число раз обрезать со всех сторон физическое тело, уменьшая каждый раз, скажем, вдвое, его диаметр". Именно к такого рода определениям Колмогоров не без оснований относит определение вероятности по Мизесу как предела частот при неограниченном увеличении числа испытаний. Дело в том, что допущение о тенденции частот группироваться вокруг постоянного значения (вероятности) подобно допущению о "случайности" какого-либо явления верно лишь при сохранении условий, которые практически не могут сохраняться неограниченно долго с неограниченной точностью. Следовательно, не имеет смысла говорить о точном переходе к пределу. Но более существенно то, что "формулировка принципа устойчивости частот при обращении к такому предельному переходу требует определения допустимых способов отыскания бесконечных последовательностей испытаний, которое тоже может быть лишь математической фикцией”. Мизес не давал строгого математического определения допустимых способов формирования серий, Колмогоров же в 1956 г. еще не был убежден в перспективности перевода интуитивных идей Мизеса на формально строгий математический язык. "Все это нагромождение понятий, - писал Колмогоров о частотной концепции, - могло бы еще подлежать серьезному рассмотрению, если бы в результате получилось построение теории столь своеобразной, что иными путями до ее строгого обоснования нельзя было бы дойти. Но, как указано выше, обоснование математической теории вероятностей при современном состоянии теории меры производится просто добавлением условия P(□)=1". Тем более, утверждал Колмогоров, что в реальной ситуации гипотеза о вероятностном характере очень редко обосновывается непосредственной статистической проверкой, что обусловлено либо физической невозможностью ее проведения, либо экономическими соображениями.

Однако уже статья Колмогорова, опубликованная в индийском статистическом журнале “Sankhya” в 1963 г., показывает значительную эволюцию его философско-методологических представлений в области теории вероятностей, изменение его отношения к основополагающим идеям мизесовского подхода. В этой статье ученый отмечал, что теоретико-мерная аксиоматизация теории вероятностей, позволившая устранить большинство трудностей в построении математического аппарата, обеспечившего возможность многочисленных и успешных приложений, на многие годы отодвинула на задний план проблему отыскания причин применимости математической теории вероятностей к реальным случайным явлениям. Вопреки мнению многих исследователей, Колмогоров не считает, однако, эту проблему второстепенной. Напротив, устранение трудностей на пути построения прозрачной интерпретационной схемы приложения теории вероятностей напрямую связано с решением этой непростой методологической проблемы.

"Я уже высказывал точку зрения, - писал Колмогоров, - что основой применимости математической теории вероятностей к случайным явлениям реального мира является частотный подход к вероятности в той или иной форме, неизбежность обращения к которому горячо отстаивал фон Мизес. Тем не менее в течение длительного времени я считал, что (1) частотный подход, основанный на понятии предельной частоты при стремящихся к бесконечности чисел испытаний, не позволяет обосновать применимость результатов теории вероятностей к практическим задачам, в которых мы имеем дело с конечным числом испытаний; (2) частотный подход в случае большого, но конечного числа испытаний не может быть развит строго формально, чисто математически". Далее Колмогоров фиксирует эволюцию своей позиции, обусловленную прежде всего осознанием принципиальной важности идей Мизеса для обоснования приложений теории вероятностей и, в частности, для решения проблемы формирования серий испытаний (или правил выбора подпоследовательности). Правила выбора теперь не включаются им в комплекс условий осуществления события, но рассматриваются отдельно в контексте теста на случайность. "Я по-прежнему придерживаюсь первого из указанных положений, - отмечал Колмогоров. - Что касается второго, то я пришел к выводу, что понятие случайного распределения может быть введено строго формально, а именно: можно показать, что в достаточно больших совокупностях распределение некоторого свойства может быть таким, что частота его появления будет примерно одинаковой для всех достаточно больших выборок, если только закон выбора достаточно прост. Полное развитие такого подхода предполагает введение меры сложности алгоритмов”.

В цитируемой статье Колмогоров впервые строит свою конструкцию допустимых алгоритмов выбора подпоследовательности, отмечая при этом, что она правильно отражает замысел Мизеса, во всей полноте сохраняя основное его ограничение, - при определении того, входит ли член последовательности в получаемую подпоследовательность, не используется само значение этого члена. При этом основным отличием от подхода Мизеса являются строго финитный характер концепции и введение количественной оценки устойчивости частот. Первый камень здания алгоритмического подхода в теории вероятностей был заложен.

Теоретико-мерное и алгоритмическое обоснования теории вероятностей могут быть рассмотрены как родственные отрасли знания, поскольку понятия, которыми оперируют ученые, работающие в одной теории, находят свои аналогии в другой. Однако это и независимые теории в чисто математическом плане, так как изначальный понятийный базис обеспечивают математические формализмы, относящиеся к принципиально различным областям математического знания. Теория меры и теория множеств, лежащие в основе первого подхода, относятся к непрерывной (континуальной) математике, в то время как алгоритмический подход базируется на теории алгоритмов, принадлежащей дискретной математике.

Следует отметить, что применение теории алгоритмов в теории вероятностей было обусловлено не только внутренними потребностями развития этой науки, но и общим осознанием возрастания роли дискретных методов как в математике, так и в естествознании и, в частности, пониманием того, что алгоритмическая перестройка теории информации, базировавшейся ранее на теоретико-вероятностном (континуальном) фундаменте, оказалась чрезвычайно успешной и плодотворной. Остановимся на этом несколько подробнее.

“Чистая математика, - говорил Колмогоров на международном математическом конгрессе в Ницце в 1970 г., - благополучно развивается как по преимуществу наука о бесконечном. И сам основатель формализованной полностью финитной математики - Гильберт предпринял свой титанический труд лишь для того, чтобы обеспечить за математиками право оставаться в "канторовом парадизе" теории множеств. По-видимому, это положение вещей глубоко обосновано устройством нашего сознания, с большой легкостью оперирующего с наглядными представлениями о неограниченных последовательностях, предельных переходах, непрерывных и даже "гладких" многообразиях и т.п.” . С этим, очевидно, и было связано то, что в математическом естествознании вплоть до начала 60-х гг. господствовало моделирование изучаемых явлений на основе средств континуальной математики. На самом деле, однако, у нас нет веских оснований считать, что непрерывные модели лучше дискретных; в частности, мы не можем с достаточной уверенностью утверждать, что некоторый реальный процесс более адекватно описывается на языке дифференциальных уравнений (непрерывная модель), чем с помощью соответствующих разностных схем (дискретная модель). И тем не менее даже в тех случаях, когда те или иные явления носили по преимуществу "дискретный" характер, исследователи до недавнего времени строили сначала сильно идеализированные непрерывные модели и лишь после их разрешения переходили к адекватным дискретным описаниям. И это несмотря на то, что человеческий мозг математика функционирует главным образом в дискретном режиме!

Развитие современных вычислительных средств, постановка проблемы создания искусственного интеллекта существенно повлияли на возникновение устойчивого интереса к методам дискретной математики. "Пользуясь своим мозгом как данным от господа бога, математик мог не интересоваться комбинаторными основами его работы, - замечает Колмогоров, - но искусственный интеллект машин должен быть создан человеком, и человеку приходится погрузиться в неизбежную при этом комбинаторную математику".

Бурное развитие теории алгоритмов и почти одновременное ее применение в теории информации и теории вероятностей, по сути дела, и отражали принципиальные изменения в соотношении использования дискретных методов в математике и естествознании. Появляется убеждение в том, что для решения ряда проблем, в частности, при изучении сложно организованных систем, способных перерабатывать информацию, вместо того чтобы сначала строить сильно идеализированные (хотя и привычные) континуальные модели, целесообразно сразу же перейти к более адекватным, хотя и более громоздким и менее эстетичным дискретным моделям. Построение алгоритмической теории информации было одним из первых крупных достижений на пути признания богатых возможностей теории алгоритмов.

Первоначальное развитие математической теории информации было основано на применении теоретико-вероятностных понятий. Это проявилось уже в том, что основное понятие теории информации - "количество информации" - определялось через понятие вероятности (Шеннон), что сразу же позволило получить ряд важных результатов, используя весь разветвленный аппарат математической теории вероятностей.

Полученные результаты касались прежде всего проблем "передачи по каналам связи "массовой" информации, состоящей из большого числа не связанных или слабо связанных между собой сообщений, подчиненных определенным вероятностным закономерностям". Решая подобного рода проблемы, можно отождествлять вероятности и частоты в пределах одного достаточно длинного временного ряда, не опасаясь перейти границу, за которой огрубления будут неприемлемыми. Более того, такой способ действий получает строгое обоснование в гипотезе "быстрого перемешивания". "Практически можно считать, например, вопрос об "энтропии" потока поздравительных телеграмм и "пропускной способности" канала связи, требующегося для их своевременной и неискаженной передачи, корректно поставленным в его вероятностной трактовке и при обычной замене вероятностей эмпирическими частотами, - писал Колмогоров. - Если здесь и остается некоторая неудовлетворенность, то она связана с известной расплывчатостью наших концепций, относящихся к связям между математической теорией вероятностей и реальными случайными явлениями вообще".

Ясно, однако, что возможность введения понятия количества информации на основе понятия вероятности и решения при этом ряда важных задач не гарантирует факта онтологической или гносеологической первичности понятия вероятности по отношению к понятию информации (или количества информации). Напротив, можно, по-видимому, согласиться с мнением А.С.Кравца, утверждающего, что "информация и вероятность являются в одинаковой мере суверенными и полноправными общенаучными понятиями".

Поиски альтернативы шенноновскому подходу в теории информации особенно активизировались в начале 60-х гг. "Информация по своей природе не вероятностное понятие", замечал Колмогоров в статье, написанной в 1965 г. В другой статье, вышедшей в свет в том же году, он очень ярко проиллюстрировал свою мысль: "Какой реальный смысл (с точки зрения подхода Шеннона. - А.Г.) имеет, например, говорить о "количестве информации", содержащейся в тексте "Войны и мира"? Можно ли включить разумным образом этот роман в совокупность "возможных романов", да еще постулировать наличие в этой совокупности некоторого распределения вероятностей...”.

Более того, многие ученые уже тогда стали высказывать соображения о возможности и плодотворности определения самого понятия вероятности на основе построенной независимо от теории вероятностей теории информации.

"Может ли теория вероятностей рассматриваться как ветвь теории информации, а не наоборот, как делалось раньше?”,- задавались в 1962 г. вопросом Р.С.Ингарден и К.Урбаник, считая, что реализация положительного ответа вполне осуществима. Подобную мысль в уже упомянутой статье 1965 г. высказывал и Колмогоров: "Возможно..., что отношения между теорией информации и теорией вероятностей радикально изменятся... Отношения эти могут быть обратными современным, и не теория вероятностей будет основой высших разделов теории информации, а в основе теории вероятностей будут лежать понятия теории информации”. Не прошло и нескольких лет, и стало ясно, что подобные заявления в определенной мере были пророческими. Но вначале были заложены основы независимой от теории вероятностей алгоритмической теории информации.

Ясно, что если какой-либо объект устроен "просто", то его можно описать с помощью достаточно небольшого количества информации. И напротив, если объект "сложен", то его описание связано с использованием большого объема информации. На основе этих соображений Колмогоров вначале вводит понятие "сложности" конечного объекта, определив его как минимальное число двоичных знаков, в которых содержится вся информация об объекте, достаточная для его восстановления (декодирования). Данное определение сложности зависит от способа кодирования информации с помощью двоичных знаков. Однако на основе общей теории алгоритмов удается дать инвариантное определение сложности, используя доказанную Колмогоровым теорему существования оптимального способа программирования (кодирования), при котором сложность □ не превышает сложности для любого другого способа кодирования с точностью до аддитивной константы, равномерной при всех □ . Введение понятия сложности позволило независимо от теории вероятностей определить понятие "количество информации", которое имеет то преимущество, что оно относится и к индивидуальным объектам. Заложив, таким образом основы алгоритмической теории информации Колмогоров делает два важных вывода, касающихся дальнейших перспектив алгоритмического подхода:

“1. Основные понятия теории информации должны и могут быть обоснованы без обращения к теории вероятности и так, что понятия "энтропия" и "количество информации" оказываются применимы к индивидуальным объектам.

2. Введенные таким образом понятия информации могут лечь в основу новой концепции случайного, соответствующей естественной мысли о том, что случайность есть отсутствие закономерности “.

Именно теория алгоритмов, позволяющая на точном математическом языке определить такие понятия, как "правило", "закономерность", дает возможность восстановить в правах и выявить рациональный смысл естественного представления о случайности как отсутствии закономерности. Кроме того, при обращении к бесконечным последовательностям двоичных знаков алгоритмическая теория сложности позволяет математически точно развить плодотворные идеи Мизеса в полном соответствии с установками Колмогорова, изложенным им в уже упомянутой работе “О таблицах случайных чисел” .

Кратко, не вдаваясь в технические детали, введем основные понятия алгоритмической концепции случайного. Пусть у нас есть конечный класс A конечных объектов. Пусть K - число элементов этого класса. Ясно, что для задания любого элемента этого класса достаточно logK двоичных знаков: заданием элемента может служить двоичная запись его номера. Если элемент обладает какими-то особыми свойствами, другими словами, закономерностями, то возможно его более краткое описание. Это соображение и идея о случайности как отсутствии закономерности оправдывают определение случайного (или абсолютно случайного) элемента класса A как такого, сложность которого максимальна, т.е. равна logK. Если речь идет о последовательностях, то, несколько огрубляя, можно сказать, что случайная последовательность не может быть задана иначе, как просто выписываем целиком всех ее членов (ее сложность максимальна среди всех последовательностей, равных ей по длине). Отклонение сложности от logK является дефектом случайности конечной последовательности (элемента).

В алгоритмической теории вероятностей говорится о случайных бесконечных объектах. Так, бесконечная двоичная последовательность называется случайной, если каждый ее начальный "кусок" случаен в классе двоичных конечных последовательностей той же длины.

В алгоритмической теории вероятностей изучаются свойства случайных объектов. В частности, доказывается (в нефинитной теории), что любая случайная последовательность удовлетворяет любому конструктивному закону теории вероятностей. Под конструктивным законом теории вероятностей понимается свойство двоичных последовательностей с вероятностью 1 (в смысле теоретико-мерной аксиоматики, по лебеговой мере), удовлетворяющее ограничению конструктивности, состоящем, грубо говоря, в определимости свойства на специальном языке. Конструктивными являются практически все полезные в приложениях законы теории вероятностей.

В финитном случае для различных классов А больших размеров доказывается, что случайные элементы этого класса удовлетворяют ряду свойств, которые в обычной теории вероятностей имеют при надлежащем распределении вероятность, близкую к единице.

Говоря о необходимости развития алгоритмического подхода, Колмогоров приводит следующее рассуждение: "любые результаты наблюдений могут быть запрограммированы в виде конечной, хотя иногда и весьма длинной записи. Поэтому когда говорят об отсутствии в результатах наблюдений закономерности, имеют в виду отсутствие достаточно простой закономерности. Например, последовательность из 1000 цифр 1274031274031..., сменяющихся с периодом в 6 цифр, мы с несомненностью отнесем к “закономерным”, а не “случайным” событиям. Последовательность первой тысячи десятичных знаков дробной части □ 1415...,как известно обладает свойствами “случайных последовательностей”. Узнав ее закон образования, мы и ее откажемся признать “случайной”. Но если нам выпишут многочлен 999-й степени, значения которого при x =1,2,3,...,100 доставляют последовательность целых чисел P(x), заключенных в пределах от 0 до 9, полученных в результате честных случайных испытаний типа игры в рулетку, то наличие такого многочлена не помешает нам продолжать считать последовательность “случайной”” .

При внимательном анализе данного рассуждения можно заметить, что употребляя одно и то же выражение - "случайная последовательность", Колмогоров говорит о двух разных смыслах, вкладываемых в этот термин. С одной стороны, это представление о случайности как отсутствии закономерности, с другой стороны – это, так называемая, стохастическая случайность, являющаяся предметом математической теоретико-мерной теории вероятностей и характеризующаяся свойством устойчивости частот. “Если тем или иным способом, - продолжает Колмогоров, - мы пришли к выводу, что последовательность результатов каких-либо испытаний не допускает полного описания в приемлемой для нас в отношении сложности форме, то мы скажем, что эта последовательность разве что частично закономерна, отчасти же “случайна”. Но это еще не та “случайность”, которая нужна для применимости выводов теории вероятностей. Применяя теорию вероятностей, мы не ограничиваемся отрицанием закономерности, а делаем из гипотез о случайности наблюдаемых явлений определенные положительные выводы”. Колмогоров показывает, что практически значимые выводы теории вероятностей обосновываются как следствия из гипотез о предельной сложности изучаемых явлений. Таким образом, алгоритмическая концепция в теории вероятностей призвана согласовать несомненно заслуживающее внимания представление о случайности как отсутствии закономерности со “стохастическим” понимаем случайного, лежащим в основе интерпретационной схемы применения математической теоретико-мерной теории вероятностей.

Любопытно, что идеи о связи случайности и сложности рассматривал еще в начале XX в. Анри Пуанкаре. Анализируя различные подходы к определению понятия случайного, он писал: "Когда мы обнаруживаем простой результат, например, когда мы получаем круглое число, мы говорим, что такого рода результат не может быть делом случая, и мы ищем для его объяснения причину неслучайную. И действительно, вероятность того, чтобы из десяти тысяч чисел случай привел нас к круглому числу, скажем, именно к числу 10000, очень незначительна; она составляет один шанс из десяти тысяч. Но есть также один шанс из десяти тысяч, что мы пришли бы к любому из остальных чисел. И все-таки такой результат нас не удивит, и мы спокойно припишем это случаю... В чем же тут делом? Есть ли это простая иллюзия с нашей стороны, или бывают случаи, в которых эта точка зрения законна? Надо думать, что это так, ибо иначе никакая наука не была бы возможна" . Как видим, Пуанкаре не может объяснить описанный им парадокс несоответствия обыденной точки зрения и теоретико-вероятностных выводов. И, конечно, обыденная точка зрения в отношении примера, приводимого Пуанкаре, вряд ли законна. Однако Пуанкаре прав, что есть случаи, в которых точка зрения здравого смысла оказывается более адекватной, чем точка зрения классической теории вероятностей. Для того чтобы показать это, рассмотрим, например, 100 бросаний симметричного (правильного) шестигранного кубика. Если кто-либо скажет, что ему удалось в результате этих бросаний получить 100 шестерок, то мы откажемся признать такой результат случайным, подозревая сообщившего в нечестности. При этом мы согласимся считать случайной, скажем, последовательность из чисел от 1 до 6 той же длины, выдаваемой датчиком случайных чисел. Но дело в том, что вероятность любой последовательности из 100 чисел, заключенных между единицей и шестеркой, одинакова и равна 1/6 в сотой степени.

Таким образом, с точки зрения классической теории вероятностей (как и, впрочем, теоретико-мерной), обе последовательности неотличимы друг от друга по отношению к их случайности или неслучайности! Но с точки зрения алгоритмической концепции последовательность из одних и тех же цифр максимально неслучайна, ибо она имеет минимальную сложность (ее можно описать с помощью лишь одного элемента)!

Приведенный пример показывает, что алгоритмический подход позволяет выявить рациональный смысл обыденных представлений о случайности. Наряду с этим, как уже отмечалось, алгоритмический подход дает возможность согласовать интерпретационную схему теоретико-мерной теории вероятностей с представлением о случайности как отсутствии закономерности. А поскольку интерпретационная схема, о которой идет речь, во многом сводится к частотному подходу, развивавшемуся прежде всего Мизесом, то естественно, что развитие алгоритмической теории вероятностей было связано с переосмыслением и развитием идей Мизеса. Это касается главным образом принципа иррегулярности Мизеса, ядром которого является идея допустимых правил выбора подпоследовательности.

Общая схема мизесовского подхода тестирования последовательности на случайность, подхода, получившего строгое обоснование в алгоритмической теории, заключается в следующем. Сначала выбирается некоторое основное свойство, которым должна обладать случайная последовательность (у Мизеса это существование предела частот). Затем фиксируется некоторый класс допустимых правил выбора подпоследовательности. Под "правилом выбора" понимается отображение, сопоставляющее каждой бесконечной последовательности нулей и единиц другую последовательность, являющуюся подпоследовательностью исходной. После этого последовательность объявляется случайной, если при применении к ней любого допустимого правила выбора всегда получается последовательность, обладающая указанным основным свойством. Сам Мизес не дал строгого определения допустимых правил выбора, отметив, что существенной их чертой является то, что принадлежность любого члена исходной последовательности к выбираемой подпоследовательности должна определяться независимо от его значения. Это ограничение, наложенное Мизесом, является недостаточным. Так, если мы объявим допустимыми правилами выбора такие, которые сопоставляют последовательности A1, A2, A3... подпоследовательность An(1), An(2), An(3)..., где , n(□) любая целочисленная функция, то случайных последовательностей не будет вовсе, так как одно из правил наверняка преобразует исходную последовательность в подпоследовательность из одних нулей или единиц.

Таким образом, “разумное определение случайности требует ограничения класса допустимых правил выбора”. При этом, разумеется, желательно, чтобы определенные таким образом случайные последовательности подчинялись всем законам математической (теоретико-мерной) теории вероятностей. Так, определение случайной последовательности по Черчу, давшему первую формализацию мизесовского подхода, с этой точки зрения оставляет желать лучшего, ибо случайные по Черчу последовательности не удовлетворяют закону повторного логарифма.

Нефинитная алгоритмическая теория вероятностей дает необходимые средства для такого определения допустимых правил выбора, при котором к последовательностям, называемым "случайными", применимы все законы теории вероятностей. Действительно, как показал А.Х.Шень в уже цитированной статье, определение случайной бесконечной последовательности эквивалентно определению коллектива, если правила выбора понимать в более широком смысле, чем это делал сам Мизес. С другой стороны, случайности достаточно для выполнения теоретико-вероятностных законов. Поэтому на основе алгоритмического понятия случайности можно строить теорию вероятностей, которую позволительно рассматривать как заполняющую логические пробелы полную формализацию частотной теории Мизеса. Следует подчеркнуть, что с чисто математической точки зрения алгоритмическая теория вероятностей не обладает никакими преимуществами перед теоретико-мерной, скорее, наоборот, ибо формализм алгоритмической теории значительно более громоздок.

Однако генетическая связь алгоритмической теории с концепцией Мизеса обеспечивает возможность построения более приемлемой, чем у теоретико-мерной, интерпретационной схемы нефинитной алгоритмической теории. Эта схема предлагает следующий рецепт применения теории.

1. Рассмотреть реальную случайную ситуацию. Поставить ей в соответствие бесконечный математический объект (некую последовательность).

2. Проверить (или поверить, если нельзя проверить), что эта последовательность случайна, и использовать свойства случайных последовательностей, изучаемые в математической теории вероятностей.

3. Сделать соответствующие выводы о реальном процессе.

Однако для того, чтобы из асимптотических свойств бесконечных объектов получить свойства допредельных реальных конечных совокупностей испытаний, вновь нужны дополнительные допущения. И здесь на помощь приходит финитная алгоритмическая теория вероятностей.

Эта теория также имеет идейные связи с учением Мизеса. Коллективам Мизеса ставятся в соответствие индивидуальные случайные объекты. При этом доказывается, что случайные конечные последовательности обладают приблизительной иррегулярностью по отношению к просто задаваемым правилам выбора. Важно отметить, что, являясь строгой математической теорией, финитная алгоритмическая теория является еще более громоздкой, чем ее нефинитная сестра.

Интерпретационная схема финитной алгоритмической теории, которую, как и для нефинитного случая, можно рассматривать как обоснование применимости теоретико-мерной теории вероятностей, выглядит следующим образом.

1. Рассматривается реальный случайный процесс, в соответствие которому ставится конечный математический объект x.

2. Устанавливается, каким закономерностям удовлетворяет реальный объект. При этом, исходя из этих закономерностей, выводятся свойства соответствующего математического объекта. Множество всех объектов, обладающих этими свойствами, и будет нашим классом A (см. выше, с.15).

3. На основании некоторых соображений, относящихся к частной науке, изучающей рассматриваемое явление, постулируется, что других закономерностей в объекте не более, чем C бит (величина C – своя для каждой ситуации и есть тот самый «дефект случайности»).

4. Определяются свойства, которым удовлетворяют все элементы класса A с дефектом случайности, не превышающем C . Для этого, как правило, с помощью методов теоретико-мерной теории вероятностей находят свойства подходящих случайных (с теоретико-мерной точки зрения) объектов и из них выводят свойства случайных элементов класса A. Важно отметить, что при теоретико-вероятностных вычислениях почти всегда используются близкие к рассматриваемым конечным объектам бесконечные объекты. Таким образом, здесь может быть использована вся теоретико-мерная теория вероятностей.

5. Делается вывод, что x обладает установленными в (4) свойствами.

6. На основании (5) делается прогноз о свойствах изучаемого явления. При этом здесь уже не требуется дополнительных допущений о скорости сходимости частот, ибо прогноз делается на основе сопоставления "протокола" реального эксперимента и конечного математического объекта.

Описанную схему можно считать достаточно удовлетворительной. Разумеется, остается пункт (3), где постулируется случайность объекта, но если не налагать никаких ограничений на объект, то нельзя сделать никаких содержательных выводов о его свойствах. Все же заметим, что если объект неслучаен, то гипотезу о его случайности в принципе можно экспериментально фальсифицировать. Однако верификация гипотезы о случайности объекта, который действительно случаен, в общем случае принципиально невозможна.

В заключение сделаем несколько выводов о взаимоотношениях различных концепций построения теории вероятностей.

1. Частотная теория Мизеса (в частности, в связи с тем, что Мизес считал теорию вероятностей не математической, а естественнонаучной теорией) не может претендовать на роль логического обоснования теории вероятностей. Непосредственная ее формализация является достаточно трудным предприятием. К тому же она не позволяла получить все необходимые для приложений математические факты. Однако, хотя интерпретационная схема мизесовской теории и обладала серьезными дефектами, все же она рассматривалась как удовлетворительная - за неимением лучшего.

2. Теоретико-мерная система обоснования теории вероятностей логически безупречна и чрезвычайно плодотворна с точки зрения получения мощных математических результатов. Однако ее интерпретационная схема, построенная на основе использования ряда соображений частотного подхода, не позволяет понять причины эффективного применения математической теории к исследованию реальных явлений.

3. Алгоритмическая теория вероятностей, идейно и генетически связанная с мизесовским подходом, но при этом использующая специально для нее разработанный нетривиальный математический аппарат, так же как и теоретико-мерная теория вероятностей, является строгой математической

дисциплиной. Однако вследствие громоздкости ее построений она вряд ли когда-нибудь станет на место теоретико-мерной теории в качестве системы логического обоснования теории вероятностей.

Интерпретационная схема нефинитной теории вероятностей, построенная на основе алгоритмического подхода, сходна с интерпретационной схемой частотной теории и страдает теми же пороками, что и мизесовский интерпретационный механизм (выводы о реальных конечных последовательностях делаются на основании исследования идеализаций – бесконечных последовательностей). Однако, имея значительные преимущества перед интерпретационной схемой теоретико-мерной теории, она может быть искусственно присоединена к последней в качестве интерпретационного механизма ее применения.

Что касается финитной алгоритмической теории, то она еще менее удобна с чисто математической точки зрения, однако надо думать, что ее интерпретационную схему можно рассматривать как обоснование применимости теории вероятностей, построенной на основе аксиоматики Колмогорова.