

В. Янков

Опыт и онтология математических объектов.

1. Я хотел бы защитить здесь тезис, что отдельные выдающиеся показания опыта или же общий его характер могут оказывать влияние на философию математики, но тогда только, когда они попадают в контекст некоторого осмысления реальности. С этой целью делается обзор двух этапов развития математико-философской мысли. Первый начинается с пифагорейской математики и доходит до различных платоновских интерпретаций. Вторым начинается с Декарта и доходит до Огюста Конта.

2. В ранней греческой математике большую роль сыграло открытие, что музыкальные интервалы определяются рациональным отношением длин струн. Открытие было сделано ранними пифагорейцами, не исключено, что самим Пифагором. Оно если не вызвало, то во всяком случае способствовало пониманию реальности как построенной из чисел (точнее, телесных чисел), да и пониманию самого числа.

Пифагор искал в реальности устойчивого, способного противостоять текучести анаксимандрова апейрона. Началом для такой устойчивости он провозгласил перас, определяющее. Числа, т.е. построенные из монад материальные конструкции, обладают относительной устойчивостью. Арифметика - наука об этих числах. Опытным подтверждением этому для пифагорейцев и были музыкальные числовые соотношения, показывающие отражения числовых принципов в музыкальных данных.

"Подлинная" геометрия первоначально мыслилась тоже монадическим образом, так что две будущие науки имели одну и ту же онтологию. Они были науками об общей относительно устойчивой структуре реальности.

3. Открытие бесконечной делимости величин пифагорейцами школы Гиппаса отделило геометрию от арифметики и заставило искать для первой новую онтологическую основу. Это и привело к созданию "геометрии" величин", где последние и выступали основными объектами геометрии, видимо, отождествляясь с объектами реальными. Статус точки, линии и поверхности оставался неопределённым там, где речь шла о вырлждении измерений. Вопрос о том, что такое геометрия как бы отрывался от опыта и решался спекулятивным образом в зависимости от мировоззрения. Можно угадать попытку Анаксагора привязать геометию к телесной действительности, введя "семена" качеств, являвшиеся актуальными бесконечно-малыми. В качестве примера выступали вероятно "роговидные углы", меньшие любого прямолинейного угла, но остававшиеся углом.

4. Следующая эпоха, однако, выступает против стремлений осознать геометрию бесконечной делимости как что-то телесно-реальное. Она-то как раз не доверяет спекулятивным построениям и исходит из опыта действительности, как она есть, т.е из некоторой чувственно данной "поверхности".

Зачинатель движения Протагор выступает с критикой математики. До нас дошли только его аргументы по поводу "роговидных углов", направленные, надо полагать, против Анаксагора. Чувства говорят нам, что шар и цилиндр не касаются плоской поверхности в точке, а лежат на ней, образуя площадку касания.

Этот первый скепсис приводит к отвержению геометрии величин и к отрицанию бесконечной делимости. Делаются даже попытки основать новую математику, согласующуюся с непосредственным чувственным опытом. От неё нам дошло антифонтово решение квадратуры круга.

Суть этого решения, как известно, в приближении круга правильным многоугольником с большим числом сторон. Расуждая, как Протагор,

Антифонт утверждал, что на некоторой стадии построения произойдёт совпадение окружности и многоугольника, после чего обе длины становятся доступными измерению.

Есть основания полагать, что к этой же софистской математике относится и гиппиева квадратура с помощью "кватратиссы". Ван дер Варден предполагает, что целью построения кривой была трисекция угла. Однако, в рамках софистской математики неделимых, т.е. опытно неделимых величин, вряд ли такая задача имела интерес: разделить угол можно подбором. Вместе с тем некоторые авторы (Прокл) недвусмысленно говорят о гиппиевой квадратуре. Вероятно, Гиппий устанавливал нужное равенство дуги и отрезка с помощью "протагоро-антифоновых" рассуждений, и такое доказательство действительно может быть реконструировано.

5. В это время Демокрит выдвигает свою дискретную математику "математически неделимых", основанную на физической теории, т.е. на "глубинном", а не "поверхностном" понимании опыта. Оба вида дискретной геометрии существуют рядом с традиционной, анаксагоровой и пифагорейской, но последняя вряд ли чувствует себя уютно. Представляется, что именно это время пришло к понятию "айтемы", требования принять определённые положения без обсуждения для того, чтобы иметь возможность развивать геометрию. Тем самым последняя приобретает как бы гипотетический характер, но это вполне согласуется с духом диалектики и риторики, требующих уметь вести рассуждения из воображаемых ситуаций.

В общем же ситуация представляется таковой: втиснуть геометрию в действительность после протагоровой критики не удаётся. Новая, основанная на "опыте" геометрия неудовлетворительна, старая же вынуждена обращаться к предположениям.

6. Новые возможности открываются при Платоне.

Отделение мира "бытия" от мира "становления" позволило поставить вопрос об онтологическом статусе математических объектов в первом из них. Сам Платон в своём "неписанном" учении склоняется к приписыванию числам идеального характера. Числа у него даже "порождаются" в мире идей из "Одного" с помощью неопределённой "Двоицы". Геометрия в то же время принадлежит миру становления. Более того "пространство" (σῶντα) лежит в основе становления, являясь восприемницей идей, так что всё-таки геометрические образования как-то причастны идеальному и имеют промежуточный характер.

Неоплатоники в последующем - уже в совсем другой исторической обстановке - нашли особое место для пребывания "промежуточного" геометрического мира, а именно, мир **воображения**. Такую концепцию мы находим в известном комментарии Прокла к первой книге "Начал". Исследователи возводят её по крайней мере к Порфирию.

Числа между тем ещё Августин помещает (в трактате "О музыке") помещает среди идей-прообразов Бога.

7 Нужно сказать, что основная вещно-телесная концепция геометрии, противопоставляемая платонизму, т.е. концепция Аристотеля, выглядела неубедительно. Геометрические структуры рассматривались как реальные структуры в отвлечении от всех других свойств, кроме геометрических. Поскольку актуальная бесконечность систематически изгонялась Аристотелем из физики, то реальные тела не могли воплощать идеальные геометрические объекты. Точки, правда, определялись как концы отрезков, линии как границы поверхностей т.д. Но чем должна была быть прямая. Конечность космоса не давала также возможности определить параллелизм.

Словом, мы видим, что опытный материал в новом понимании - по сравнению с древней бесконечной актуальной делимостью, например, не давал опоры для телесной интерпретации геометрии в то время, как

платоническое мышление создавало противоположные возможности.

8. Венцом платонизма в этом отношении следует считать концепцию новых измеряющих чисел, которую мы находим у Омара Хайама.

Речь идёт о совокупности всевозможных антанарейзисов (т.е. цепных дробей), которую Хайам трактует как многообразие положительных чисел нового рода, допускающую арифметические операции и неравенства, могущую служить для измерения, но в её целостности недоступную человеческому уму. Это по сути дела является понятием положительного вещественного числа. Хайам в его комментарии к Евклиду не указывает способ существования новых чисел. Однако, его философские трактаты, примыкающие к философии Ибн Сины, позволяют понять, что числа как орудия измерения могут существовать в производных от Бога Божественных Интеллектах. Бог ислама, чьё отношении к миру односторонне - он является творцом и правителем, но Сам Себя миру не отджаёт, как христианский Бог - создаёт пространство, в котором возможна хайамовская концепция.

9. Обратимся теперь к Европе Нового времени.

В начале его мы видим оживление мысли о материальной геометрии. Она была поддержана опытом новой математической физики (кинематики динамики) в трудах Кеплера и Галилея.

Главным представителем этой мысли был Декарт. Его основные положения представляют очень связную систему:

1) Пространство (протяжённость) отождествляется с телесной материей, которая, разумеется, мыслится как нечто положительное, т.е согласно традициям христианства (низшее тварное бытие), а не платонизма.

2) Пространство мыслится как нечто обсчитываемое. Декарт понимает геометрию по новому - как геометрию координатного пространства (аналитическую). Обсчитываемость касается и стабильной пространственной

картины и самого движения материи-протяжённости.

3) Само понятие числа - инструмента обчитывания - расширяется Декартом (впрочем, у него были предшественники) до числовой прямой, ещё не являющейся полной вещественной прямой, но включающей в себя все доступные описанию в то время иррациональности.

Опыт, на который ссылался Декарт, играет в этом случае такую же роль как звуковые интервалы у пифагорейцев. Но за этими ссылками скрывается мышление о предназначении человека к власти над природой и математической науке как инструменте этой власти.

10. Декартовская концепция пространства вызвала оживлённые споры среди метафизиков эпохи. Выдвигаемые идеи родственны неоплатоновским, только речь идёт не о пространстве евклидовой геометрии, а о исчисляемом пространстве геометрии аналитической. Мальбранш считает, что прообраз такого пространства (протяжения) является божественной идеей и имеет посредством неё Бог позволяет нам увидеть реальное пространство. Спиноза, как известно, делал протяжённость одним из атрибутов Бога, выражавшим его Существо.

Новое внёс Лейбниц, различавший пространство от наполнявшей его субстанциональной материи. Пространство по Лейбницу виртуально, т.е. является неким общим знаменателем, согласовывавшим между собою перцепции монад, но не имеющих реального существования. Это близко к геометрии воображения Прокла, но ориентировано не столько на занятия геометрией как подготовку к размышлению над идеями, сколько на общее понимание аналитической геометрии как инструмента научного познания.

Таким образом споры эти при всей близости к платонизму отражали научно-познавательный дух времени.

11. За временем "глубинной" метафизики XVII века последовало время

Просвещения и философии "поверхности", во многом напоминающее софистское Прсвещение. Сила новой науки была такова, что скепсис, свойственный такому духу мысли, не смог остановить развитие. Однако же он проявлял себя.

Если Кондильяк считал, что геометрия, а до какой-то степени даже механика "вычитываются" из видимой (а по его теории - по сути дела осязаемой) поверхности и развиваются с помощью тождественных преобразований, то Юм по иному видел поверхность вещей и подобно математикам-софистам отказывался признавать бесконечную делимость и заявлял о существовании "видимых неделимых". Но отвержение старой математики и замене её на новую, как это делали в свой время Антифонт и Гиппий, Юм всё же не отваживался: математика (классическая геометрия, алгебра и развивающийся анализ) имеет право на существование, поскольку она приводит к практически правильным результатам. Математика поэтому повисала в воздухе как что-то полезное, но не имеющее онтического фундамента.

12. Интересно, что время выдвигало решения, напоминавшие о платонизме. Речь идёт о ведущем представителе "шотландской" философской школы Томасе Риде. Именно он предложил считать объекты геометрии и других дисциплин объектами воображения, как в своё время это объяснял Прокл.

Конечно, воображение у неоплатоников и у Рида мыслилось по-разному. Для первых оно как бы располагалось между ощущениями и умом, так что его предметы оказывались промежуточными между ощущаемым и идеальным. Рид же боролся с "идеями" предшествующим ему мыслителей (картезианцев, Локка, Юма), но оставался верен британскому натурализму. Воображение не соединяло у него человека с чем-то высшим, но было важной функцией разума, которая позволяла держать перед собой в уме отвлечённое от ощущений предметное содержание, не приписывая ему существование. Здесь предчувствуется теория предметности Мейнонга и феноменология Гуссерля.

13. Так было указано направление освобождения объектов математики от телесной онтологии. Кант делает это в отношении геометрии.

Мир идей-архетипов был закрыт, но Кант открывает новое а priori - творческую природу познавательных способностей человека. "Чистая чувственность" создаёт протяжённость как априорную форму всякого внешнего восприятия. "Чистое понимание" строит исходя из протяжённости геометрию априорным образом, да и не только геометрию, но и ньютоновскую механику. Так геометрия и механика, определяя предметы внешнего мира, получают независимый источник происхождения.

14. В дальнейшем эти мысли развивались кантианцами, но новый статус математических предметов требовался и самой математике. Решающее значение здесь принадлежит Огюсту Конту, взглянувшему на опыт позитивных наук, накопленный к тому времени, с новой и трезвой точки зрения.

Конт предлагает свою известную классификацию наук, имеющую ступенчатое строение так, что более высокая наука базируется на предшествующих. В основание кладётся математика. При этом оказывается, что математика исследует не реальные предметы, как это делается на последующих ступенях, но общие схемы предметности. Поэтому она оказывается пригодной как инструмент высших ступеней.

Концепция Конта никуда не помещает математические объекты, поскольку его общая позиция является антиметафизической. Её можно понять, исходя из уровня, достигнутого науками ко времени Конта, т.е. исходя из современного ему опыта, но надлежащим образом истолкованного. Развитие показало, что природные законы не сводятся непосредственно к законам механики, но как бы распадаются на группы, определяемые своеобразием материала. Математика, применимая к некоторым из этих групп (или даже ко всем, но в разной степени), должна поэтому мыслиться именно контовским

схематическим образом.

14. От этих мыслей, а также от открытия неевклидовых геометрий открывается путь к мышлению о математических предметах как о просто сущих, безотносительно к телесному существованию. Фактически это старый мир идей, но без его экзистенциальной нагрузки как спасительного прибежища. По этому пути идут и Кантор и Фреге с его онтологией функций, на которой он строит новую логику.

15. Какие выводы можно сделать из сравнения двух эпизодов истории математики, очень параллельных между собой? В каждом случае развитие начиналось с опыта, порождавшего представление о том, что математические объекты можно считать принадлежащими вещной действительности. Следовало другое, феноменальное осмысление опыта, и математика готова была рухнуть. Она находила своё спасение в идеальном мире. Но мотивы для этого в рассматриваемых развитиях различны. В развитии античного осмысления математики её объекты находили своё место в мире идей или в мире воображения только потому, что этот мир открывался и объекты чувствовали в нём как у себя дома. В развитии XVI-XIX веков такого дома не было, и понимание математики как идеальной сферы имело за собой и новый сложный научный опыт двух предшествующих столетий.