Катречко С.Л.

К вопросу об «априорности» математического знания

(расширенный и переработанный вариант текста от 19.11.01; будет несколько расширен и дополнен в последней своей части)

Введение. Постановка проблемы.

Поставленная для обсуждения проблема «математика и опыт» (соотношение априорного и апостеорного в математике) нуждается, в свою очередь, в более тщательной методологической проработке и предполагает, с одной стороны, анализ природы математического знания и его детерминантах; а, с другой стороны, уточнение концепта «априорное» и соотношения «априорное vs. апостеорное». Этим и будет определяться структура настоящего анализа. Первая — основная — часть нашего исследования будет посвящена исследованию единства математического знания в контексте его исторического развития. Понятно, что если математика является разнородным(-ой), многокомпонентным(-ой) знанием (деятельностью), то вопрос об его априорности «расщепляется» на ряд вопросов об априорности его важнейших составляющих (структурно-синхронный аспект анализа). Кроме того, если этот — математический — комплекс к тому же эволюционирует во времени (истории), то вопрос об априорности математического знания должен быть уточнен с учетом видоизменения и структурной перестройки этого комплекса (ср. с «городской» аналогией математического знания Н. Бурбаки) в тот или иной исторический период, так как может оказаться, что «степень априорности» математики изменяется на протяжении ее истории (диахронный аспект анализа). Поэтому изначальный вопрос должен быть конкретизирован так: *об априорности* («степени априорности») собственно ***какой математики*** идет речь: о геометрии, арифметике или каком-то другом разделе математического знания; какая собственно математика — античная, нововременная или современная — подвергается анализу?

Правда, у методолога (или специалиста по кантовской философии) может возникнуть законный вопрос: разве правомерно говорить о «степени априорности»; не совершена ли здесь методологическая или «категориальная» по Г. Райлу, ошибка? Ведь знание может быть или априорным, или апостеорным, т.е. пара «априорное vs. апостеорное» образуют отношение строгого противоречия и о никаком «перекрещивании» этих понятий (промежуточной области априорного и апостеорного), т.е. о «степени априорности—апостеорности», не может быть и речи. Однако именно с этим и будет связано еще одно уточнение исходной постановки проблемы априоризма математического знания. Вторую задачу нашего исследования составляет прояснение соотношения «априорное vs. апостеорное». В рамках этой задачи будет предпринята попытка анализа концепта «априорное», т.е. проведена соответствующая «языковая игра» (Л. Витенштейн) путем сопоставления концепта «априорное» с концептами «формальное», «абстрактное» и «умопостигаемое». Собственно вторая часть нашего исследования будет посвящена анализу ***типов априорности*** (тогда исходный вопрос может быть конкретизирован так: о ***какой априорности*** *математики* идет речь?) и критике жесткого противопоставление априорного (до-опытного) апостеорному (эмпирическому), которое, на наш взгляд, составляет своеобразную «третью догму эмпиризма» (ср. с тезисом У. Куайна о «двух догмах эмпиризма») и должно быть заменено на более «мягкое» сопоставление априорного—апостеорного и выявление «степени априорности (апостеорности)» того или иного типа знания.

Часть 1. К вопросу о «природе» и «единстве» математического знания.

Обсуждение столь общих вопросов, к каковым относятся вопросы о уточнении (1) статуса математики в структуре человеческой деятельности (знания), (2) ее «природы» и наиболее значимых — как «внутренних», так и «внешних» — детерминант, (3) «единства» — однородности — математического знания требует от исследователя повышенного внимания к используемой методологии анализа и, по возможности, ее точной экспликации.

Давайте этим прежде всего и займемся. В качестве отправной точки нашей методологии выбрана известная гегелевская схема: *бытие ... — качество ...— сущность*. На наш взгляд в этой схеме, пусть в несколько мистифицированной форме, схвачены ключевые моменты любого познавательного процесса, представлены основные этапы — «логика» — развития любого исследования. Поэтому, если представить гегелевский категориальный ряд в качестве методологической схемы—развертывания, а на этом основан наш анализ, то его можно соотнести с основными этапами методологического анализа [1].

[1] Впервые об применении этой методологии было заявлено нами в статье «Сознание и бесконечность» [1] (см. «электронные версии» этой и последующей статьи «Способ бытия сознательных объектов» в Интернете — http://www.philosophy.ru/library/ksl/katr_011.html; http://www.philosophy.ru/library/ksl/katr_008.html). Обратим внимание на то, что нами пропущен гегелевская категория — этап анализа в

Тем самым анализ математической деятельности (математического знания) должен начинаться с фиксации и уточнения предмета исследования (этап «бытия»), после чего выделенный в общих чертах феномен должен пройти методологическую стадию сопоставления с другими сходными феноменами — в нашем случае необходимо сопоставить математику с «физикой» (естествознанием) как нижележащей и «метафизикой» (философией) как вышележащей по отношению к математике практикам (типам знания) — с целью уточнения «бытийного» статуса выделенного феномена и выявление его специфики (этап «качества»), а конечной целью исследования должно быть выявление его «сущности» (природы математики), что соответствует третьему — основному — этапу анализа.

Зафиксировав восходящую к Гегелю методологическую схему в чистом — последовательном — виде будем рассматривать ее как некий идеал, с которым должно считаться методологическое исследование. Понятно, что в ходе реального исследования эта схема полностью не реализуема и выделенные этапы нередко перемешены. Это связано с тем, что проблематика всех трех этапов исследования образует своего герменевтический круг, поскольку существует и обратная детерминация нижележащих этапов вышележащими. Так, например, решение вопроса о специфике предмета исследования (этап «качества») нередко связано с решением (более глубокого) вопроса о «сущности» предмета, а выделение предмета исследования (этап «бытия») может существенно корректироваться с учетом результатов последующих — «качественного» и «сущностного» — этапов. Однако выявление «чистой» методологической схемы обладает определенным эвристическим потенциалом, поскольку указывает на наличие и важность предварительных более описательных этапов анализа — «бытийного» и «качественного» этапов, предшествующих этапу «сущности», — которые исследователь должен в той или иной мере учитывать, ставя вопрос о выявление природы того или иного феномена.

Кроме этого, отметим следующую особенность нашего анализа, которая заключается в том, что это анализ не собственно математической деятельности, а представлений о «природе» математики, данный современниками той или иной исторической эпохи (как правило, крупными математиками, или философами, взгляды которых были достаточно авторитетны для современников, в том числе и для работающих математиков соответствующего исторического периода).

Опыт философствования XX века показывает, что нередко серьезные трудности

нашей интерпретации — «количества». Это связано с тем, что при проведении гуманитарного исследования, а в данном случае мы анализируем математику как социокультурподжидают исследователя уже на первом — «бытийном» — этапе анализа и связаны с тем, что предмет исследования как правило дается не чистым, а искаженным — в виде «превращенной формы» (М. Мамардашвили) — образом, т.е. как исторически сложившееся культурное кентаврическое сцепление, требующее значительных усилий по своему «очищению» (ср. с процедурами «деструкции» М. Хайдеггера, или «деконструкции» Ж. Деррида). В частности, как показал М. Фуко, одним из распространенных искажений — «сцеплений» — такого рода является «ошибка непрерывной хронологии», когда имеет место невольное заполнение «разрывов», имеющихся между различными, хотя и близкими историческими феноменами, с целью «торжества непрерывного ряда событий» [2, стр.12] и постулируемого псевдоединства, вместо тщательного анализа имеющихся в реальной истории «дискретных» серий [2].

Следуя критическому настрою М. Фуко сформулируем следующую метаметодологическую дилемму, развернутую уже не в диахронно—историческом (как у Фуко), а в синхронно-структурном аспекте[3]: *является ли математика некоторым целостным феноменом или представляет собой некоторое кентаврическое сцепление близких по духу, но все же различных практик; можем ли мы говорить об едином феномене математики на протяжении длительного периода человеческой истории или мы имеем дело с некоторой «серией» математических практик, (слабо) связанных между собой* (например, отношением «семейного сходства» (Л. Витгенштейн[4]))?

ный феномен, этап «количества» сильно вырожден.

[2] Определенным аналогом «дискретного» подхода (непрерывность versus прерывность) М. Фуко в области естествознания является «парадигмальный» подход Т. Куна.

[3] Восходящий к «археологии» М. Фуко вопрос об «историческом» единстве математики, т.е. является ли она единым историческим феноменом, а не разрозненной цепью различных — «дискретных» — исторических практик, будем все время держать в уме на протяжении нашего исследования, хотя начнем его с несколько наивного предположения об исторической «непрерывности» математической практики, вполне возможно значительной модифицируемой, вплоть до постулируемых Фуко «разрывов», на протяжении ее истории.

[4] Заметим, что отмеченный чуть выше «сериальный» подход М. Фуко очень близок к концепции «семейного сходства» Л. Витгенштейна, предназначенной для анализа феноменов с «размытыми» границами и не имеющим единого концептуального ядра, к которым можно отнести любой исторический феномен, в том числе и математическую деятельность (см. изложение концепции «семейного сходства» в [3, стр.110—111]). Уточняя нашу методологию в данном исследовании, можно сказать, что мы придерживаемся сильного варианта концепции «семейного сходства», при котором некоторое общее «ядро» (математической деятельности) — пусть и довольно расплывчатое — все же можно указать. Сам же Л. Витгенштейн предложил концепции «семейного сходства» для работы с такими «размытыми» в концептуальном отношении феноменами, для которых единое общую черту (формально «общее») указать в принципе невозможно.
=== [фрагмент для «электронной версии»] === Вот как Витгенштейн описывает свою концепцию «семейного сходства», беря в качестве примера феномен «игры»:

«66. Рассмотрим, например, процессы, которые мы называем «играми». Я имею в виду игры на доске, игры в карты, с мячом, борьбу и т.д. Что общего у них всех? Не говори «В них должно быть что-то общее, иначе их не называли бы «играми», но присмотрись, нет ли чего-нибудь общего для них всех. Ведь, глядя на них, ты не видишь чего-то общего, присущего им всем, но замечаешь подобия, родство, и притом целый ряд

Формулировка этой дилеммы и обсуждение ее возможных решений тем более уместны, поскольку в обыденном мышлении (и даже у ряда авторов обсуждения проблематики априорности математики на конференции) прочно господствует взгляд на математику как на некий единый корпус (текстов), основа которого начала формироваться в античности и была продолжена в Новое время, то время как одна из исходных — следуя Фуко — интенций нашего анализа заключается в том, чтобы подвергнуть испытанию на прочность данное культурологическое (псевдо?)единство.

Итак первый вопрос, который хотелось подвергнуть анализу и получить на него ответ, сформулируем так: является математика единой «гомогенной» наукой или в ее составе можно выделить ряд разнородных — сходных, но все же различающихся — практик, и прежде всего (1) «геометрию» (топологию) и (2) «алгебру» как два основных «способа понимания в математике» (Г. Вейль, [4]), как два концептуальных «ядра», конституирующих два разных математических комплекса ошибочно принимаемых за единую математику?

Выбранное нами различение в составе математического знания отнюдь не случайно или произвольно, а хорошо осознается уже в самом начале развития математического знания (об этом подробнее см. ниже) и проходит красной нитью через всю ее историю вплоть до XX века (см., например, уже упомянутую выше работу Г. Вейля)[5]. Новизна же

таких общих черт. Как уже говорилось: не думай, а смотри! Присмотрись, например, к играм на доске с многообразным их родством. Затем перейди к играм в карты: ты находишь здесь много соответствий с первой группой игр. Но многие общие черты исчезают, а другие появляются. Если теперь мы перейдем к играм в мяч, то много общего сохранится, но многое и исчезнет. Все ли они «развлекательны»?... Во всех ли играх есть выигрыш и проигрыш, всегда ли присутствует элемент соревновательности между игроками? Подумай о пасьянсах. В играх с мячом есть победа и поражение. Но в игре ребенка, бросающего мяч в стену и ловящего его, этот признак отсутствует... А подумай о хороводах! Здесь, конечно, есть элемент развлекательности, но как много других характерных черт исчезает... А результат этого рассмотрения таков: мы видим сложную сеть подобий, накладывающихся друг на друга и переплетающихся друг с другом, сходств в большом и малом.

67. Я не могу охарактеризовать эти подобия лучше, чем назвав их «семейными сходствами», ибо так же накладываются и переплетаются сходства, существующие у членов одной семьи: рост, черты лица, цвет глаз, походка, темперамент и т.д. и т.п. И я скажу, что «игры» образуют семью» (ФИ, стр.110—111).

[5] Заметим, что предложенное двухчастное разбиение единого математического псевдокомплекса на «геометрию» и «арифметику» является достаточно устойчивым на протяжении всей истории математики (здесь и далее закавыченные «геометрия» и «арифметика» будут пониматься предельно широко; они, в частности, «покрывают» вейловское различение «топология vs. алгебра»). В данном случае это является лишь предварительной гипотезой, которая обладает эвристическим потенциалом в пользу неоднородности математического знания. Принципиальным в данном случае является переход от единственности математики к множественности математик, а вопрос о «количественной» стороне этого перехода в данном случае не так важен. Например, если обратиться к работе Н. Бурбаки «Архитектура математики», в которой высказан тезис об единстве математики, можно найти трехчастное разбиение «единой» математики на структуры топологии, алгебры и структуры отношения порядка. К этому же близок и Г. Вейль, говорящий о наличии в математике промежуточных между алгеброй и топологией структур «количественных», или порядковых, чисел [4, стр.26]. Однако, несмотря на выявление в «единой» математике разнородных структур, вопрос о разнородности математики как таковой молчаливо обходится стороной. Заметим, что это связано с тем, что «внутри» математики действуют мощные «центростремительные» силы, восходящие еще к mathesis universalis

нашей постановки проблемы в том, что мы предполагаем возможное «усиление» этого различия до противоположности и вопрошаем о том, не является ли указанное различие «точкой разрыва» единого математического комплекса и не следует ли «расщепить» его на два, что, соответственно, приводит и к «расщеплению» поставленного в начале вопроса о природе единого математического знания, по крайней мере, уже на два вопроса:

1. о природе и детерминантах «геометрического» (топологического) математического комплекса и, соответственно, об априоризме—апостеоризме уже этого «комплекса»;
2. о природе и детерминантах (об априоризме—апостеоризме) «арифметического» (алгебраического) математического комплекса.

Поэтому имеет смысл немного задержаться на указанном различении между «геометрией» и «арифметикой» и более точно выявить его статус и основания.

Достаточно четко это различие фиксируется одним из крупнейших математиков XX века Г. Вейлем [4]:

«Центральное понятие [математики — К.С.] действительного числа позволяет сразу объяснить, чем это вызвано. Система действительного числа подобна двуликому Янусу: с одной стороны — это совокупность <das Field> алгебраических операций + и – и им обратных, с другой — континуальное однообразие, части которого связаны друг с другом непрерывно. Первый лик чисел алгебраический, второй топологический» [4, стр.26];

«Может быть, теперь мы немного лучше поймем отношение между двумя [алгебраическим и топологическим — К.С.] методами… В топологии начинают с непрерывной связи как самого изначального и лишь постепенно, в ходе спецификации, вводят те или иные *структурные моменты*; в алгебре же, наоборот, исходным пунктом математического мышления выступают *операции* [над дискретными элементами (NB!) — К.С.], а непрерывность (или ее алгебраический суррогат) вводится лишь на заключительном этапе спецификации» [4, стр.34].

Если же учесть ключевое для Г. Вейля понимание математики как «работы с бесконечностью»: «Эта интуиция возможности «всегда увеличить на единицу» — открытой счетной бесконечности — лежит в основе всей математике» ([5, стр.13; см. также мою работу «Бесконечность и теория поиска вывода», [6]), то можно представить следующую схему взаимодействия двух — выделенных ранее «геометрического» и «арифметическо-

---

Декарта—Лейбница, которые, согласно Бурбаки, проявляются, например, в единстве методов математической деятельности (аксиоматический метод) и создании единого математического языка и базиса (теория множеств). Хотя тот же Г. Вейль указывает на альтернативу аксиоматического метода — метод конструирования.

го» — математических комплексов. Центральным, лежащем в середине и в силу этого единящим две разнородных практики, концептом математики является понятие бесконечности[6]. «Геометрия» и «арифметика» выступают, согласно Вейлю, как два противоположных способа ухватывания бесконечности. Если «геометрия» (топология) начинает свою деятельность, постулируя бесконечность как непрерывность (континуальность), которую потом, путем разбиения, пытается «ухватить» в своих конструкциях, то «арифметический» (алгебраический) путь — это операциональное (алгоритмическое) построение дискретной «бесконечности» (множественности) из первоначально данной «единицы». Т.е. «геометрия» и «арифметика» находятся, если ввести своеобразную иерархическую шкалу, как бы по разные стороны от «бесконечности»: первая из них начинает свой путь «вверх» от нее к «числу», пытаясь «разложить» исходную континуальность, а вторая, находясь «выше» ее, спускаясь пытается сконструировать бесконечность путем «суммирования» исходных конечных дискретностей.

Оказывается, что сформулированная выше, восходящая к Вейлю, концепция «двухцентровой» природы математики восходит к античному — платоно-пифагорейскому — пониманию эпистемологического статуса математического знания. Ее суть — в достаточно четком (онтолого-эпистемологическом) иерархическом различении двух математических практик (арифметики и геометрии), несмотря на то, что обе они онтологически находятся как бы в «невещественном промежуточном мире» (Прокл) между идеальным (априорным) миром идей и эмпирическим (апостеорном) миром вещей[7]. Вот как это различие — на онтологическом уровне — фиксируется Проклом в его комментарии к книге «Начал» Евклида:

«И пусть геометр утверждает, что если данные четыре величины (NB! геометрия «работает» с *величинами* — К.С.) пропорциональны, то существует и обратная пропорция, *и пусть доказывает это, опираясь на начала своей науки* (выделено мной — К.С.); арифметик к ним обратиться не может, но пусть и он утверждает, что если данные четы-

[6] Памятуя об отмеченной Фуко ошибке «поспешного единения», вполне возможно, что вместо единого понятия «бесконечности» необходимо говорить о двух бесконечностях: топологической (непрерывной) бесконечности—континуальности и алгебраической (дискретной) бесконечности—множественности. В этом случае «разрыв» между «арифметикой» (алгеброй) и «геометрией» (топологией) остается.

[7] Исходя из общих соображений понятно, что вейловское разделение математики на топологию и алгебру не строго соответствует античному разделению на геометрию и алгебру. Если античная геометрия в большей мере соответствует современной топологии, то различие между античной арифметикой и алгеброй более значительно. Это связано с тем, что собственно алгебра была привнесена в европейскую математику через арабский Восток. Однако если в качестве критерия различения выбрать пару «дискретность vs. континуальность», то сближение (отождествление) арифметики с алгеброй и геометрии с топологии вполне правомерно.

ре числа (NB! арифметика , в отличие от геометрии, «работает» с числами — К.С.) пропорциональны, то существует и обратная пропорция, и доказывает это исходя из начал своей науки» [7, стр.53—55];

«Поэтому, кстати, мы не требуем от всей математической науки одинаковой точности: ведь если одна ее часть так или иначе соприкасается с чувственно воспринимаемым (геометрия — К.С.), а знанию (арифметике — К.С.) другой принадлежит умопостигаемое, не могут обе быть точными, но одна — точнее другой» [7, стр.103];

«Так вот, если исходить из точности, то арифметика точнее геометрии, потому что ее начала отличаются простотой: монада лишена положения, а точка имеет положение, и точка, когда она получила положение, является началом геометрии, а начало арифметики — монада» [7, стр.153].

Соответственно, различие в эпистемологическом статусе между геометрией и арифметикой заключается в том, они реализуются с помощью различных познавательных способностей. Согласно Платону арифметика как изучающая умопостигаемые (интеллигибельные) *числа* (монады) подпадает под власть ума—разума (ноэзиса), в то время как геометрия изучающая материально-интеллигибельные, или интеллигибельно-материальные (=пространственные; в античности (у Платона) пространство (хора) выступает как особая интеллигибельная материя) *фигуры* является предметом мысли низшей по отношению к ноэзису способности ума-рассудка (диаонойи). Прокл же, особо обсуждая статус уже геометрии в своем втором введении [7, стр.128—197], еще больше понижает эпистемологический статус геометрии по отношению к арифметике, т.к. познавательной способностью геометрии является уже даже не низшая часть ума — рассудок (как это было у Платона), а *воображение*, которое занимает еще более низкое — промежуточное — положение между умом и чувственностью[8]:

Попробуем явно сформулировать *античную парадигму математики*. Математика является условно-единым (квази)комплексом, в составе которого можно выделить две разнородные — как в онтологическом, так и в эпистемологическом плане — практики: «геометрию», как практику работы с непрерывными величинами, и «арифметику», как

---

[8] Вот как Прокл конституирует способность воображения: «Именно поэтому иногда воображение решаются назвать «аффицируемым умом». Однако же, если это ум, — как он может быть аффицируемым и материальным? И если он действует на основе аффектов, то правильно ли назвать его умом? Ведь уму и умной природе (с чем, например, «работает» арифметика — К.С.) соответствует неаффицируемость, а сфера аффектов далека от нее. Впрочем, я думаю. что воображение названо так в силу желания выявить его срединное положение между самыми высшими и самыми низшими познавательными способностями: «умом» — поскольку оно имеет сходство с наивысшими, но в то же время — «аффицируемым», поскольку оно имеет сродство с низшими (т.е. познанием через органы чувств, как пишет Прокл чуть ниже — К.С.)» [7, стр.137].

практику работы с дискретными числами. С «внешней» точки зрения математическое знание — как единый комплекс — занимает срединное положение между «физикой» и «метафизикой»; «внутри» же математики «арифметика» занимает более высокое по отношению к «геометрии» «положение», т.е. является более «метафизической» составляющей математического комплекса. Соотношение между античными геометрией и арифметикой можно трактовать как двухуровневое строение математического знания: геометрия соответствует нижнему — «квазиэмпиричекому» — менее абстрактному (и более содержательному) уровню, в то время как арифметика соотносится с более абстрактным (формальным) уровнем математического знания, что в области естествознания аналогично уровню «теоретической науки». В соответствие с этим различением между арифметикой и геометрией можно предложить «античное» решение вопроса о априорности — апостеорности математики: если арифметика тяготеет к априорному, умопостигаемому знанию и сродни метафизике (философии), то геометрия тяготеет к апостеорному (эмпирическому) естествознанию (механике, астрономии, оптике, геодезии etc).

Кроме этого можно предложить общий «механизм» развития математической парадигмы. Модификация античной парадигмы возможна по двум «параметрам» (соответственно, есть две детерминанты развития математического знания). С одной стороны, возможно варьирование всего математического квазикомплекса в целом по шкале «метафизика — физика», и тогда можно говорить о большей или меньшей абстрактности (априорности) — эмпиричности математики в целом, той или иной степени сходства математики с «физикой» или «метафизикой» («внешняя» детерминация)[9]. С другой стороны, возможна «внутренняя» флуктуация (перестройка, модификация) математического знания в сторону одного из двух выделенных нами «центров»: арифметики или геометрии, т.е. «чередование» арифметических и геометрических «всплесков» уже внутри той или иной математической парадигмы. Причем, что является третьим важным моментом предлагаемого нами подхода, в ходе развития математического знания, в силу относительной независимости «внешних» и «внутренних» детерминант, возможно как совпаде-

[9] Заметим, что выделенная «внешняя» детерминация математического комплекса «внутри» пары «физика versus метафизика», где «физика» и «метафизика» задают нижнюю и верхнюю границы возможного местоположение математики, является как бы самой «внешней» детерминантой, т.е. одной из детерминант по критерию априорности. Если же мы несколько меняем критерий анализа математического знания, например нас интересует не его априорность, а близкие к ней степени его абстрактности, формальности (взаимоотношение с логикой), то можно выделять другие, «внешние» по отношению к математике, «интервалы». В этом случае картина «флуктуации» математики будет более детальной, но его анализ усложняется. Поэтому здесь мы ограничимся заведомо упрощенной «картинкой», пренебрегая различиями между указанными критериями, т.е. понимаем «априорность» в расширенном — неуточненном — смысле. Анализ и уточнение смысловых компонентов концепта «априорное» будет проведен ниже, во второй части нашего исследования.

ние, так и несовпадение «векторов» их развития, что усложняет решение вопроса о статусе математики и степени его абстрактности, априорности etc: например, при «внешней» тенденции к сращению математики с «физикой», что снижает степень ее априорности, тенденция математики к арифметизации приводит к возрастанию степени ее абстрактности в составе физико-эмпирического комплекса знания.

С этих позиций обратимся теперь к анализу (развития) математической парадигмы знания в последующие эпохи. Принципиально иное решение о статусе математического знания (с учетом «внешних» и «внутренних» факторов) мы находим в Новое время, когда, как уже отмечалось выше, и был «создан» собственно тот единый культурологический комплекс «математика» — *нововременная парадигма математики*, сохранившая свое влияние и в наши дни. Специфицирующей чертой этой парадигмы является нивелирование различий между геометрией и арифметикой, сближение этих разнородных познавательных практик в составе универсальной «всеобщей математики» (mathesis universalis), что связано, прежде всего, с фигурой Декарта, которому за счет алгебраизации геометрии — создания аналитической геометрии — удалось концептуально срастить арифметику и геометрию в единую науку[10]. Именно с этой фигуры начинается формирование новой парадигмы «единой» математики. Однако в процессе ее формирования и модификации не только этот — «внутренний» — фактор является решающим. С одной стороны, при отмеченном выше «подтягивании» геометрии до алгебры («внутренняя») абстрактность математического комплекса усиливается и происходит повышение ее эпистемологического статуса по отношению к «физике»: математика занимает место как бы «прикладной метафизики», т.е. она расположена «выше» (физической) науки, поскольку

[10] В задачи нашей работы не входит детальное исследование той интеллектуальной революции в области математики, которую совершил Р. Декарт. Некоторое представление о величии этого революционного переворота можно почерпнуть из приводимых ниже цитат исследователей творчества Декарта, взятых из учебника «Западная философия от истоков до наших дней» Дж. Реале и Д. Антисери (СПб, «Петрополис», т.3. стр.208—211): «Геометрия греков может быть сравнима с изящной ручной работой, алгебра арабов — с автоматическим производством. Мы можем сказать, что современная математика началась три столетия назад, когда алгебраические механизмы стали применять в геометрии и изучение кривых, поверхностей, геометрических фигур стало переводиться в изучение определенных уравнений» (Л. Ломбардо-Радиче); «Концепция Декарта наносит последний удар по концепции греков, геометрия окончательно утратила свой титул королевы математики, и на место геометрической математики приходит математика алгебраическая…Западная цивилизация, посредством применения двойного алгоритма в физике и механике, трансформировала облик Земли. Из фазы ручного труда математика перешла в фазу промышленного развития» (Э. Колериус). Как мы уже отмечали ранее, есть тонкое различие между (античной) арифметикой и (арабской) алгеброй, которое связано с тем, что алгебра выступает как алгоритмо-функциональная «работа» с числами. Однако на этом этапе различием между арифметикой и алгеброй можно пренебречь и говорить об едином «арифметико-алгебраическом» математическом комплексе в его отличие от геометрического комплекса. В настоящее время, время развития ЭВМ, алгебра (дискретная математика, программирование) выступает уже как третья самостоятельная составляющая, наряду с «геометрией» и «арифметикой», математики.

— как говорил ближайший предшественник Декарта, Галилей — вся природа написана на языке математики. С другой стороны, в Новое время существенно снижается общий («внешний») онтологический статус математического знания, поскольку происходит отождествление пространства геометрического (античной интеллигибельной материи) и пространства физического (чувственно данной, телесной материи)[11]. Т.е. наблюдается общий «дрейф» от «метафизике» к «физике». Здесь, например, достаточно показателен термин «натурфилософия» из основополагающей работы И. Ньютона, которая, не смотря на название, никакого отношения к «метафизике» не имеет; или провозглашенный чуть позже О. Контом переход от «метафизики» к «позитивной науки».

Пропуская ряд ключевых фигур, остановимся чуть более подробно на взглядах на природу математического знания И. Канта, который завершает разработку эпистемологического аспекта формирования единого математического комплекса XVI – XVII вв. Речь идет о том, что Кант находит для «алгебры» и «геометрии» единое (трансцендентальное) эпистемологическое основание, и находит его в области чувственности. Возможность геометрии «выводится» из априорной формы чувственности — пространства, а в основании арифметики лежит другая априорная форма чувственности — время[12].

Обратим внимание на три принципиальных момента, проясняющих суть кантовского переосмысления природы математического знания. Во-первых, Кант существенно снижает «внутренний» статус математического знания, помещая ее на «шкале» познавательных способностей даже ниже (теоретической) «физики», которая работает на уровне рассудка. В этом смысле математика оказывается даже более эмпиричной, т.е. апостеорной, чем надстраивающаяся над чувственно-математическом базисом теоретико-рассудочное естествознание и занимает самый низший эпистемологический статус теоретического знания[13].

---

[11] Обратим внимание на одну удивительную особенность новой парадигмы математики: ее онтологическим базисом, в отличие от эпистемологии, выступает уже не «арифметика», а «геометрия» в виде декартовской «субстанции протяженной» (ср. с декартовой системой координат как общем «поле» любых представлений). Этот же ход мысли затем повторяется у И. Канта и будет настойчиво воспроизводиться в европейской культуре вплоть до начала XX в. (подробнее об этом см. ниже). Поэтому говорить о безоговорочной победе «арифметики» над «геометрией» (см. предыдущую ссылку) было бы слишком опрометчиво.

[12] Заметим, что Кант существенно переосмысливает античную — аристотелевскую — «категориальную сетку», выводя из ее состава категории «пространства» («места») и времени». Причем эта редукция более радикальна, чем может показаться на первый взгляд, т.к. в аристотелевской категориальной сетке (см. соответствующие главы аристотелевской работы «Категории») по существу рассматриваются «сдвоенные» категории пространства и времени: как разновидности «количественной» категории («математизированные» аналоги пространства и времени как модусы непрерывного количества) и как «физические» категории (собственно категории «места» и «времени» как таковые).

[13] Заметим, что согласно Канту математика по степени своей априорности (абстрактности, теоретичности) значительно уступает «физике», что не согласуется с общеприня-

Во-вторых, эпистемологическим (а не только онтологическим) базисом объединения математики выступает уже не более интеллигибельная «алгебра», как это было у Декарта, а чувственноподобная «геометрия». Основаниями (историческими) для совершенной Кантом (в концептуальном — эпистемологическом — плане) «геометризации» математики служат: во-первых, как это не парадоксально звучит с учетом совершенной Декартом алгебраизации геометрии, общая метафизическая концепция Декарта — введение им (геометризированной!) «субстанции протяженной» (что указывает на специфику нововременной алгебраизации математики, если ее рассматривать не с внутриматематической, а с внешней — общефилософской — точки зрения); во-вторых, ньютоновская концепция абсолютного пространства и времени (ср. кантовскими априорными созерцаниями), которые представляет собой как бы субстанциональный фон (последующего) «телесного» мира. Суть же нововременной, завершенной Кантом, «внешней» концептуальной — в отличие от внутриматематической алгебраизации — «геометризации» математики заключается в том, что время, по аналогии с пространством, рассматривается как (априорное чувственное) созерцание, т.е. как некоторая «статическая» — квазипространственная — данность, или как некоторая объемлющая вещи «среда» (= аналог ньютоновского абсолютного пространства), из которой исключается существенный для природы времени «динамический» — «событийный» — аспект. Обобщая, это можно назвать феноменом опространствливания времени, что в последующем, с одной стороны, послужило концептуальной базой для собственно физических теорий (например, для специальной теории относительности, в рамках которой время рассматривается как одно из квазипространственных «измерений», а еще в большей степени в рамках геометрической интерпретации общей теории относительности), а, с другой стороны, вызвало резкую критику такого рассудочно-статического рассмотрения времени у А. Бергсона.

В-третьих, это противоположная первым двум тенденция повышения «метафизического» статуса математики концепция априорности пространства и времени (так называемый «коперниканский переворот» Канта), что отчасти возрождает античное понимание статуса математического знания. При более детальном сопоставлении античной (пифагоро-платона-аристотелевской) и кантовской концепции математики (числа) можно выделить следующее. Во-первых, как это уже отмечалось выше в первом замечании, Кант исключает категории пространства и времени из числа рассудочных категорий (соответственно, математику из области «ума», развивая концепцию Прокла), хотя против

тым сейчас положением о большей абстрактности математического знания по отношению к другим наукам и указывает на значительную модификации кантовской парадигмы математики в настоящее время.

этого, особенно по поводу категории времени, есть весьма веские основания. Дело в том, что в основе построения (рассудочной) категориальной сетки Канта лежит анализ суждений («все действия рассудка мы можем свести к суждениям», а «понятия же относятся к как предикаты возможных суждений», то «…все функции рассудка можно найти, если полностью показать функции единства в суждениях» [7, стр.80; см. также анализ «категориальной сетки» Канта и ее сравнение с подходом Аристотеля в работе Г. Райла «Категории» [8]), и Кант выделяет такую характеристику суждений как (алетическую) модальность. Алетические модальности же, как это известно было уже в античности (анализ высказываний о будущих событиях Аристотеля, построения Диодора) тесно связаны с категорией времени: «возможность» можно соотнести с «будущим», а «необходимость» — с настоящим. Поэтому вполне возможно рассматривать «время», не как априорную форму чувственности, а как своеобразную рассудочную категорию[14]. Во-вторых, обратной стороной такого понижения эпистемологического статуса математики является существенное переосмысление базового концепта математики — понятия числа. Кант тесно увязывает категории «числа» и «времени» через понятие «числового ряда». В этом смысле Кант рассматривает не число как таковое, а «числовой ряд», основывающийся на априорном созерцании времени. Тем самым Кант исключает из античного числа как единства предела и беспредельного первой — собственно «метафизической» — составляющей.

Таким образом, концепция математического априоризма Канта представляет собой промежуточный вариант — между сверх-априоризмом (умопостигаемостью) античности и эмпиризмом Нового времени — понимания природы и статуса математического знания.

Для иллюстрации современных — посткантовских — изменений в понимании природы и статуса математического знания кратко остановимся на анализе взглядов Г. Кантора и Г. Фреге. Наша задача заключается в том, чтобы на примере анализа воз-

[14] Конечно, отношение Канта к категории «времени» намного сложнее, чем это представлено (из-за ограниченности объема статьи) здесь. «Время», в отличие от «пространства» рассматривается Кантом не только как «чистое чувственное созерцание», но и как «посредник» между чувственностью и рассудком. Однако в контексте нашей работы этим можно пренебречь. Более подробно о категории времени у Канта можно найти в оригинальной интерпретации М. Хайдеггера «Кант и проблема метафизики», а также в обстоятельном анализе В.И. Молчанова «Время и сознание».

Другим интересным развитием темы является «реабилитация» пространства в качестве (рассудочной) категории. Из-за недостатка места, наметим здесь только основную линию такой «реабилитации», оставаясь в рамках априоризма. «Пространство» как априорное условие познания оказалась настолько значимым для эволюционного выживания человека, что для повышения его биологической эффективности произошло модификация рассудочной категории «пространства» в сущность более «низкого» уровня — чистое чувстзрений этих мыслителей на природу числа показать тенденцию — отчасти анти-кантовскую и анти-нововременную в целом — к повышению «метафизичности» математики. Надо сразу же оговориться, что оба указанных мыслителя работают в области «арифметики» (что соответствует общей тенденции к «алгебраизации» математики в это время), и это несколько сужает индуктивную базу наших обобщений на развитие математического знания в целом, но тем не менее анализ их концептуальных воззрений на природу числа достаточно показателен и характеризует существенное изменение, произошедшие с парадигмой «единой математики» в конце XIX — первой половине XX века[15].

Начнем с анализа взглядов Г. Кантора. Остановимся более внимательно на его революционном в концептуальном отношении понятии «кардинального числа». Вот канторовское определение: «”мощностью” или «кардинальным числом» множества ***M*** мы называем то общее понятие, которое получается при помощи нашей активной мыслительной способности из ***M***, когда мы абстрагируемся от качества его различных элементов m и от порядка их задания» [10, с.173]. Результат этой *двойной* абстракции Кантор обозначает как ***//M*** (двойная черта указывает на двойное абстрагирование). Из приведенного определения видно, что канторовское концептуальное переосмысления понятия числа заключается в введении мета-абстрактных объектов «кардинальных чисел» (мета-чисел), которые выступают как результат (вторичного) абстрагирования от обычных — порядковых — чисел, являющихся, в свою очередь, результатом первичного абстрагирования от «качественной» определенности предметов реального мира. Понятно, что это огромный шаг вперед по сравнению «порядковым» («временным») пониманием числа у Канта. Однако этот шаг в определенном отношении не только возрождает «метафизическое» понимание математического знания в античности, но и развивает ее еще дальше. Точнее здесь происходит возрождение самого крайнего пифагоро-платоновского — в противовес аристотелевскому квазиэмпиризму — априоризма античности, поскольку в концептуальном (категориальном) отношении канторовское «кардинальное число» находится «выше» аристотелевской категории «количества». Т.е. статус канторовской теории мно-

---

венное созерцание «пространство», «работать» с которым намного эффективнее из-за более быстрого — без рассудочной рефлексии — «времени загрузки».

[15] Следуя выявленному нами феномену исторического «чередования» «алгебраических» и «геометрических» периодов в развитии математики, можно ожидать, что на смену «алгебраизации» математики конца XIX — первой половине XX вв., связанной с деятельностью Кантора, Фреге, Гильберта, должен прийти ренессанс «геометрической» компоненты математического знания, что и происходит во второй половине XX в. и связано с появлением более «геометризированной» ***теории категорий*** как радикальной альтернативы «арифметическому» теоретико-множественному подходу. Неизбежным следствием этого является определенное снижение (внутреннего) эпистемологического статуса — степени априорности — математического знания при общем повышении степени ее абстрактности.

жеств, на которой базируется вся остальная математика, не просто формален, как отвлечение от «качественных» особенностей вещей (математика 1 уровня — «квазиэмпирическая математика»), но и мета-формален (математика 2 уровня — мета-математика), поскольку здесь происходит вторая, более «метафизическая», абстракция от категории «порядкового количества». Тем самым в канторовском понятии «кардинального числа» содержится принципиальная возможность для конституирования новой, более абстрактной (т.е. более априорной) математики, математики второго уровня, или «мета-математики» (в широком смысле этого слова). В последующем развитии математики XX в. было реализовано несколько проектов канторовской — рассудочной — мета-математики: во-первых, это «формализм» (и теория доказательств) Д. Гильберта (метаматематика в узком смысле); во-вторых, «логицизм» Б. Рассела («логика» как априорный и «метафизический» базис математики); в-третьих, «структурализм» Н. Бурбаки (математика изучает не «структуры» физического мира, а «работает» с мета-структурами, т.е. абстракциями второго уровня — математическими структурами). Вместе с тем необходимо отметить и наличие определенного противовеса этой слишком уж «метафизической» тенденции в развитии математики, а именно: формирование интуиционизма как более эмпирической — «чувственной» по Канту — в эпистемологическом отношении концепции математической деятельности. Однако и в этом случае можно говорить о повышении степени априорности математики, т.к. и в этом случае — для интуиционистов — базовой интуицией математической деятельности является умопостигаемая —«арифметическая» — интуиция «счетного ряда» (см., например, цитированные выше фрагменты из работ Г. Вейля).

Более развернутая в концептуальном плане — и в чем-то даже более радикальная в своей «метафизической» тенденции — концепция числа принадлежит Г. Фреге. Покажем это на примере анализа его фундаментальной работы «Основоположения арифметики (логико-математическое исследование о природе числа)» [11], которая определенным образом учитывает и «метафизические» достижения канторовской мысли об абстрактном статусе (канторовских) «бесконечных чисел». Прежде всего, Фреге убедительно показывает (в частности, критикуя за это и Кантора[16]), что число не может быть свойством

[16] Как уже отмечалось выше, «метафизическая» позиция Фреге гораздо радикальнее канторовской. В самом начале своей работы Г. Кантор «К обоснованию учения…» дает ставшее классическим определение множества: «под «множеством» мы понимаем соединение в единое целое определенных хорошо различимых предметов ***m*** нашего созерцания или мышления» [10, стр.173]. Как показывает текстологический анализ работ Г. Кантора здесь «предмет» понимается в обычном — «эмпирическом» — смысле, а числа возникают путем абстрагирования от предметов, что дало основание Г. Фреге рассматривать Г. Кантора как сторонника понимания математики как опытной науки [11, стр.48].

«внешних» вещей наподобие понятия цвета, твердости, тяжести etc и получаться путем абстрагирования из предметов, и, тем самым, опровергает тезис о математике как опытной науке (см. [11], гл. «Является ли число свойством внешних предметов?»). С другой стороны, число, в отличие от Канта, не может быть чем-то субъективным, т.е. «внутренним» представлением (см. [11], гл. «Является ли число чем-то субъективным?»). Поэтому оно должно быть «нечувственным и объективным» [11, стр.57], т.е. занимать какое-то промежуточное положение между «внешними» вещами и «внутренними» представлениями (ср. с античным — платоновским — решением о промежуточном онтологическом статусе математических (геометрических) объектов). В этом отношении «числа» должны быть подобны предикатам, если мы понимаем их (предикаты) в платоновском смысле как «идеи» (=свойства) вещей. Однако «число» — на примере «единицы» — по своему статусу отличается и от «реальных» предикатов (т.е. является специфическим, несодержательным, предикатом). Вот как Фреге фиксирует это различие: «Если бы «один человек» понимался наподобие «мудрый человек», то следовало бы думать, что «один» может использоваться как предикат, поэтому также как «Солон был мудрый» можно было бы сказать «Солон был один»…Но само по себе «один» не может быть предикатом [в тексте Фреге здесь стоит сноска, которую мы опускаем, но заменяем ее своим разъяснением[17] — К.С.]. Еще яснее это проявляется при множественном числе. Тогда как «Солон был мудрый» и «Фалес был мудрый» можно скомбинировать «Солон и Фалес были мудрые», нельзя сказать «Солон и Фалес были один» [11, стр.58—59]. Далее Фреге, ссылаясь на Баумана и Ст. Джевонса, делает еще один шаг, принципиальный для нас в связи с предшествующим изложением кантовской позиции на природу математики, когда подчеркивает независимость числа от времени (пространства) в связи с возможной применимостью «числа к непространственному и невременному» [11, стр.71]. Таким путем, последовательно отвергая различные «эмпиристские» понимания числа из-за их узости

[17] Я думаю. что мысль Фреге станет понятней, если мы выразим ее так: «число (один) не может быть *реальным*, или содержательным, предикатом». (ср. с известной кантовской фразой о том. что «*бытие не является реальным предикатом*»). Т.е. таким предикатом, который привносит нечто новое (содержание) в субъект суждения. Тем самым сказать «Солон один» — это просто сказать «Солон», а «добавка» термина «один» в первой фразе ничего не добавляет к «содержанию» термина «Солон». В этом смысле языковое употребление термина «один» сходно с использованием основного метафизического термина «бытие»: «Солон» тождественен «(одному, существующему) Солону» в отличие от выражения «мудрый Солон», которое высказывает нечто новое о Солоне, т.е. является синтетическим суждением. Чуть позже Фреге приводит еще один пример, поясняющий его (и нашу) мысль. «Помыслите (eine) и попробуйте, изменится ли представление, если неопределенный артикль заменить числительным «один». Ничего сверх того не происходит, в то время как слову «зеленый» в представлении все-таки нечто соответствует» [11, стр.84]. Заметим, что фундаментальное различие между числами и «реальными» предикатами закреплено уже в грамматике языка, т.к. числа являются числительными, в то время как «реальные» (содержательные) предикаты — это прилагательные.

(по логическому объему): абстрагирование от предметов (неправомерное сходство числа с качественными признаками предметов — математика как опытная наука), (неправомерное) отождествление числа с пространственно-временными характеристиками существования предметов (ср. с кантовским априоризмом), (неправомерное) сходство числа с реальными предикатами — Фреге приходит к пониманию числа как *чистого* «количества»[18]. Суть фрегевского подхода заключается в том, что число является не реальным предикатом (предикатом первого уровня), а предикатом второго уровня, мета-предикатом; число является (количественной) характеристикой не предметов как таковых, а характеристикой *понятий* (о предметах), или, говоря другими словами, характеристикой «неопределенных [абстрактных — К.С.] предметов»: «число приложимо только к *понятию* [а не к предмету!; выделено мной — К.С.], под которое подводится внешнее и внутреннее, пространственное и временное, непространственное и невременное» [11, стр.77]. Здесь же он приводит ключевые для уяснения его позиции слова Б. Спинозы: «Я отвечаю, что вещь может называться единой или единственной [т.е. «принимать» числовые — количественные — характеристики — К.С.] лишь по отношению к своему существованию, а не по отношению к своей сущности, ибо мы *мыслим вещи под [категорией] числа только после того, как они подведены под некоторый общий род* [т.е. когда рассматриваются не сами по себе в своем физическом модусе существования, а как «родовые», т.е. как «логические», или абстрактные, объекты; выделено мной — К.С.]» [11, стр.78—79]. Обратим внимание на корреляцию категорий «существования» («бытия») и «числа» в этом отрывке. Чуть ниже Фреге эту коррелятивную связь несколько расшифровывает: «В этом отношении существование [предикат существования — К.С.] имеет сходство с числом [с предикатом числа — К.С.]. Ведь утверждение существования есть ничто иное, как отрицание числа ноль [соответственно, полагание числа один в частном случае, когда мы говорим «Сократ» (неявно приписывая ему мета-предикат «есть» («существует») равный числовому мета-предикату «один») — К.С.]», поскольку Фреге различает признаки предметов и свойства (мета-признаки) понятий (признак vs. свойство!): например, «…прочность, вместительность, удобство [понятия] дома не могут применяться при его строительстве, наряду с камнями, строительным раствором и бревнами» [11, стр.80]. Т.е. Фреге сближает основополагающее для арифметики понятие «число» с основополагающим метафизическим понятием «бытие» и, тем самым, приравнивает

---

[18] Обратим внимание на концептуальное сходство в понимании числа Кантора и Фреге. Кантор расширил понятия числа за счет совершения второй — «надпорядковой» — абстракции (см. его определение «кардинального числа»). Фреге, аналогично Кантору, рассматривает числа как характеристику не предметов, а понятий, т.е. как абстракцию второго уровня (см. подробнее об этом ниже).

эпистемологический — априорный — статус арифметики статусу метафизики (ср. с кантовским пониманием «бытия» как отличного от «реального», т.е. «содержательного», предиката).

Подводя итог рассмотрению взглядов Фреге, можно сказать, что он обосновал возможность математики как *мета-науки*, исследующей не свойства (эмпирических) предметов, а признаки умопостигаемых понятий о предметах. В этом смысле математика, вернее ее «арифметический» комплекс, является мета-теоретической — априорной! — дисциплиной по сравнению с «содержательными» теоретическими дисциплинам типа физики, химии.., или, как принято говорить, математика является не содержательной, а «формальной» дисциплиной, что роднит ее с (формальной) логикой и метафизикой (как учением о (платоновских) «формах»). В середине XX века фрегевское понимание математики (в качестве мета-науки) получил развитие в работах Н. Бурбаки, которые рассматривали математику как (мета)науку о (мета)свойствах «математических структур», которые, в свою очередь, могут рассматриваться как канторовские «количественные» абстракции первого уровня (ср. с понятием «кардинального числа» Г. Кантора — см. об этом выше).

Таким образом, в работах Г. Кантора и Г. Фреге (а позже и у Н. Бурбаки) было показано (обосновано), что математика является неоднородным иерархизированным комплексом знания, многослойной дисциплиной. Помимо «эмпирического» слоя математического знания, связанного с количественной-порядковой характеристикой предметов (абстрагирование от «качественной» определенности предметов), возможна априористская математика второго — «теоретического» — уровня (метауровня), которая изучает более высокие абстракции: «надпорядковые» структуры («кардинальные числа» Кантора) и/или «неопределенные предметы» — понятия (Фреге).

Часть 2. К вопросу о концепте и типах «априорного»[19].

Если первая часть нашего исследования проходила под знаком вопроса «Об априорности ***какой математики*** — например, античной геометрии, новоевропейской алгебры или современной теоретико-множественной математики — идет речь?», то теперь впору задаться еще одним вопросом: а о ***какой*** *(каком типе)* ***априорности*** математики идет

[19] Термин «концепт» будет употребляется здесь в том специальном значении, которой придали ему Делез и Гваттари [12], т.е. «концепт» не является синонимом любого понятия: (1) «концепт» — это то, с чем «работает» философия в отличие от «функтивов» науки и «перцептов» искусства; (2) любой «концепт» (например, кантовское a priori) является составным, т.е. обладает сложной «смысловой» структурой, которую и надо выявить в ходе анализа.

речь?

Сначала буквально несколько слов об истории этого термина (концепта). Впервые понятие «априорное» (противопоставление «априорное vs. апостеорное») появляется в работах Декарта — Лейбница и связано с концепцией «врожденных идей». В этом смысле история концепта восходит платоновской концепции анамнезиса, которая в процессе познания припоминает (априорные) не-чувственнные «идеи». В более развитом виде концепт априорного получает проработку у Лейбница, который выделяет особый класс истин — так называемые «истины разума», в конечном основании которых лежит закон непротиворечия. Тем самым априорное у Лейбница — это аналитически-умопостигаемое. Существенное переосмысление лейбницевского понимания «априорного» происходит у Канта. Во-первых, он освобождает «априорное» от «содержания»: априорной является уже не некоторая содержательная идея, например, идея «числа», а пустая (априорная) «форма», которая «оформляет» поступающее «извне», через наши органы чувств апостеорное, т.е. опытно-чувственнное «содержание» [20]; во-вторых, Кант вводит различение между парой «априорное vs. апостеорное» и парой «аналитическое vs. синтетическое», отсутствующее у Лейбница, т.е. показывает неправомерность прямого лейбницевского отождествление априорного и аналитического и вводит новую категорию «синтетического a priori». В дальнейшей истории философии закрепилось кантовская трактовка априорного, причем как правило под априорным стало пониматься , во-первых, именно «синтетическое a priori», а, во-вторых, именно кантовский набор «априорных форм».

Наша задача — подвергнуть кантовский концепт «априорное» более тщательному анализу и показать не единственность, или ограниченность, кантовского решения этой проблемы.

Во-первых, необходимо проанализировать какие «составляющие» можно выделить в концепте «априорное», т.е. какие понятия образуют его семантическое, или смысловое, поле. Прежде всего, (кантовское) «априорное» тесно связано с понятием «формы»: априорным является не-содержательное, а формальное. Интересно отметить, что в самом начале своей «Критики чистого разума» (далее — КЧР) Кант формулирует эпистемологическое — отличное от античного (платоновского) онтологического — «учение о материи и форме»: «то в явлении, что соответствует ощущением, я называю его *материей*, а то, благодаря чему многообразное в явлении может быть упорядочено определенным

[20] Отметим, что здесь Кант не столько переосмысляет, сколько развивает концепцию Лейбница о том, что «в уме нет ничего, что не происходило бы из чувств, — кроме самого ума, или того, что он понимает». [13, стр.374]

образом я называю *формой* явления», причем «материя всех явлений дана нам только a posteriori, [а] форма их целиком должна для них находиться готовой в нашей душе a priori» [14, стр.48]. Тем самым «априорное» является «абстрактным» (хотя и не полученным, по Канту, в результате операции абстрагирования от содержательно-эмпирически-чувственного), или «умопостигаемым», т.е. не-чувственным. Таким образом, концепт «априорное» обладает сложной составной структурой, которая в первом приближении может быть выражена таким сложным термином как «абстрактно—формально—умопостигаемое», а центральным смысловым ядром кантовского понятия «априорного» является его «формальный» характер, априорное — это формальное.

Во-вторых, Кант выделяет всего лишь две априорные «формы», имеющие отношение к математике: «пространство», лежащее в основании «геометрии», и «время», лежащее в основании «арифметики». Как уже было отмечено выше, здесь Кант опирается на декарто-ньютоновское «наследие»: прежде всего, на декартову «субстанцию протяженную» и на ньютоновские понятия «абсолютного пространства» и «абсолютного времени». Однако более значимым в данном случае является интеллектуальное наследие («ходы мысли») Декарта, который, решая проблему «первичных—вторичных качеств», предложил самый радикальный (и «формальный») подход, редуцировав все «вторичные» качества к единственному «первичному» качеству, т.е. к единственной «внешней» форме «общего чувства» (Лейбниц[21]), — «пространству». Соответственно, все явления «внутреннего мира», т.е. *единственной* «формой» декартовской «субстанции мыслящей», упорядочиваются «общей» — чувственной — формой «внутреннего чувства» — «временем». Отметим, что априористский подход Канта хорошо согласуется с «двухцентровой» — арифметико-геометрической — моделью математического знания.

В-третьих, Кант жестко противопоставляет «априорное» и «апостеорное» (см. п. 1 выше), т.е. призывает мыслить «априорное» как «абсолютно априорное», или «чистое априорное», «безусловно независимое от всякого опыта» [14, стр.33], хотя в допускает в «локальном» познавательном акте «*относительное априорное*», т.е. такое «априорное», которое является до-опытным относительно данного опыта. В частности в «введении» к КЧР [14, стр.32] он приводит пример с «подрыванием фундамента дома», в рамках которого говорит об *опытном a priori*, т.е. предшествующем этому непосредственному

[21] В содержательно-концептуальном аспекте опираясь на Декарта, Кант в методологическом аспекте опять-таки опирается на Лейбница, который разделил все «понятия» на три уровня: «*только чувственные* — составляющие предмет каждого отдельного чувства, *чувственнные и умопостигаемые одновременно* — принадлежащие общему чувству и *только умопостигаемые* — присвойственные только уму [«рассудку», в кантовской терминологии — К.С.]» [13, стр.374.]

«опыту» подкапывания фундамента «знании» о том, что дом рухнет.

В-четвертых, Кант различает, хотя и не акцентирует на этом внимание, в составе априорного — формального — три типа априорного (три типа «абстрактного»), которые образуют своеобразную иерархию. Во-первых, это чувственно-априорное — «формы общего чувства»; во-вторых, это следующая, боле высокая ступень, априорного —«категории» рассудка; в-третьих, это «идеи» разума. Однако тему критерия различении (основания) разных типов априорного и, тем более, проблему механизма их образования и их функциональной роли в познавательном процессе практически не развивает.

Попробуем теперь, в свете кантовского учения об a priori, выделить ключевые точки развития проблемы априоризма математического знания.

Во-первых, оставаясь в рамках кантовского априоризма, это вопрос о «формах» математически-априорного. Как уже отмечалось выше, Кант выделяет всего лишь две «формы», что хорошо было согласовано с господствующей в то время «двухцентровой» моделью математического знания. Однако в настоящее время в составе математического знания выделяются три «составные» части. Как, например, с быть с третьим основным типом математической структуры — «структурами порядка» (Н. Бурбаки), которые не могут быть редуцированы к «геометрическим» (топологическим) и «арифметическим» (алгебраическим) структурам [22]? Более серьезная проблема возникает, если в составе математической деятельности выделяется не просто «статические» *структуры*, которые в общем можно трактовать как аналог (или обобщение) кантовского понятия «формы», а «динамические» составляющие, связанные, прежде всего, с алгоритмической деятельностью, или «алгеброй» как таковой. В настоящее время этот «центр» математического знания под названием «вычислительная математика» является одним из господствующим в структуре математики, но какая «априорная форма» ему соответствует? Определенный ответ на этот вопрос содержится в кантовском учении о схематизме, но «алгебраическая» составляющая математики требует своего тщательного продумывания в свете априоризма.

Во-вторых, в настоящее время принципиально изменилось соотношение математики и естествознания с точки зрения «абстрактности» (или «формальности») типов знания. Решение, предложенное Кантом, когда математика относится к «трансцендентальной эстетике», а «физика» — к «трансцендентальной логике» явно не согласуется с современ-

---

[22] Заметим, что если же признать в качестве базовых математических структур только «топологические» и «алгебраические» структуры, то кантовские априорные формы «пространства» (как соответствующие непрерывным *топологическим структурам*) и «времени» (как соответствующие дискретным *алгебраическим структурам*) выполняют функцию трансцендентальных оснований математического знания.

ным пониманием о глубокой внутренней взаимосвязи между логикой и математикой (и, соответственно, о различии между «логикой» и «физикой»). Если математика является более «абстрактной» — не-естественной по меткому замечанию С. Капицы — наукой, то тогда статус математических — чувственных по Канту — «априорных форм» должен быть «выше», чем статус физических — рассудочно-категориальных по Канту — «априорных форм».

В-третьих, кантовский априоризм не решает проблемы «происхождения» априорных форм и «механизмов» их образования. В современной эпистемологии предложен интересный подход к разрешению этой проблематики в рамках так называемой эволюционной теории познания. Однако этот подход, предлагает слишком уж кардинальный отход от кантовской мысли в сторону «эмпиризма» («апостериоризма»). На наш взгляд более соответствующим духу кантовского априоризма является разрабатываемый нами подход, в рамках которого основной познавательной способностью, ответственной за образование «априорных форм» является кантовская способность к воображению, которая, как пишет Кант, является ответственной за операцию синтеза, в том числе и за синтез «априорных форм». Подробнее этот подход излагается нами в работе [15].

В-четвертых, возможна следующая (существенная) модификация кантовского априоризма, которая может быть названа концепцией ***эпистемологического гилеморфизма*** (ср. с кантовским разделением «материи» и «формы» в познавательном процессе — см. об этом выше) [**Внимание! Данная часть статьи дана здесь только в тезисной форме и будет расширена в окончательном тексте — К.С.**]. Аналогом для этой модификации является аристотелевское «учение о гилеоморфизме», в котором он преодолевает «строгое» платоновское противопоставлении умопостигаемого «мира идей-форм» и эмпирического «мира вещей». Вместо этого Аристотель предлагает иерархическую лестницу, крайними точками которой являются, соответственно, «абсолютная» материя (первоматерия) и «абсолютная» форма (первоформа, или аристотелевский Бог-Нус), но которая «заполнена» промежуточными — «относительными» — сущностями, которые являются «формами» для нижележащих уровней и «материей» для вышележащих уровней этой лестницы. Точно так же, если трактовать любой познавательный акт (вслед за Кантом) как симбиоз апостеорного «содержания» и априорной «формы», то можно ввести понятие об «относительной априорной форме», которая в рамках этого познавательного акта выступает как мета-уровневое по отношению к предшествующему — «содержательному», апостеорному — уровню образование. При этом возможно оставить кантовское «строгое» различение «априорное vs. апостеорное» только лишь для крайних точек этой шкалы.

Основанием для этой концепции являются:

— на «локальном» уровне познания: «вероятностная» концепция языка В.В. Налимова [см. его книгу «Вероятностная модель языка»], который трактует «априорное» как предшествующий данному акту познавательный «базис», изменяющийся от акта к акту.

— на «мезоуровне»: концепция социокультурной обусловленности знания «апирорными» для данной культуры и исторического периода «догматами» (например, куновской «парадигмой», или «эпистемами» (М.Фуко), или соответствующими «онтологическими допущениями» (У. Куайн));

— на «макроуровне»: концепция эволюционной эпистемологии, которая вскрывает «механизмы» наиболее устойчивых «априорных форм», т.е. «идолов рода» по Бэкону, к которым относятся и собственно кантовские априорные формы .пространства и времени.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ.

Суммируем основные тезисы нашего исследования.

1. (Основной тезис) Математика не является однородной — «одноцентровой» — научной дисциплиной. Говорить об единстве математики надо с некоторой долей осторожности. По своей природе математика разнородна, в ее составе есть два различных «центра»: «арифметика» и «геометрия» (или даже три «центра», если различить *арифметику* как науку о числе и *алгебру* как науку об операциях (алгоритмах)). Эпистемологический статус этих составляющих математического знания различен. Если «арифметическая» составляющая тяготеет к априорному метафизическому знанию, то «геометрическая» составляющая тяготеет к апостеорной «физике». Следовательно, при решении вопроса об априорности математического знания надо учитывать ее неоднородный, «двухцентровый» характер. На протяжении истории развития математического знания происходит последовательная смена основной «центровости» математического знания. В отдельные исторические периоды преобладает либо «арифметическая» составляющая математики, либо ее «геометрическая» составляющая. Наряду с этим процессом «внутренней» флуктуации между «геометрией» и «арифметикой», статус математического знания в ту или иную эпоху определяется «внешними» детерминантами: математика то сближается с «физикой», то с «метафизикой».
2. Высказанный в предыдущем пункте тезис о неоднородности математического зна-

ния должен быть дополнен указанием на иерархичность — «вертикальную» неоднородность — математического знания, что особенно проявилось (и было осознано) на более зрелом этапе ее развития (XX в.). Если в п.1 математика мыслилась как двухчленная — арифметико-геометрическая — иерархия, то теперь оказывается, что и сами эти дисциплины неоднородны, иерархичны. Например, согласно концепции Г. Кантора в составе «арифметики» есть как «порядковые» (результат первой абстракции), так и «надпорядковые» — кардинальные — числа (результат второй абстракции). Тем самым внутренняя структура математического знания еще более усложняется. Соответственно, это также накладывает существенные ограничение на решение вопроса об априорности (апостеорности) математики в целом, т.к. верхние ее этажи являются более «априорными», чем нижние.

3. Кроме этого, необходимо отказаться от мифа абсолютного противопоставления «априорное versus апостеорное», которое выражает лишь крайние степени шкалы «содержательное — формальное»». Это противопоставление имеет ограниченное методологическое применение и значимо (1) для анализа простых познавательных практик и (2) на начальных этапах анализа сложных познавательных практик. При более детальном анализе знания (познания) это различения является слишком «грубым» и теряет свою эвристическую ценность. В качестве альтернативы предлагается использовать оригинальную концепцию «эпистемологического гилеоморфизма», являющейся модификацией кантовского априоризма и восходящую к концепции Аристотеля.

Литература

1. Катречко С.Л. Бесконечность и сознание //Бесконечность в математике: философские и исторические аспекты (сборник). — М., Янус-К, 1997. — стр.329-337.
2. М. Фуко Археология знания. Киев, «Ника-Центр», 1996.
3. Л. Витгенштейн Философские исследования //Его же. Философские работы. Часть 1. М., Гнозис, 1994.
4. Г.Вейль Топология и абстрактная алгебра как два способа понимания в математике //Его же. Математическое мышление. М., Наука, 1989.
5. Г.Вейль Математическое мышление //Его же. Математическое мышление.
6. Катречко С.Л. Бесконечность и теория поиска вывода //Бесконечность в математике: философские и исторические аспекты (сборник). — М., Янус-К, 1997. — стр.190-196.
7. Прокл Комментарий к первой книге «Начал» Евклида. Введение. М., Греко-Латинский кабинет, 1993.

8. И. Кант Критика чистого разума (серия «Философское наследие»). М., Мысль, 1994.
9. Г. Райл Категории //Его же. Понятие сознания. М., ДИК, 2000.
10. Г. Кантор К обоснованию учения о трансфинитных множествах //Его же. Труды по теории множеств. М., Наука, 1985. — стр.173—246.
11. Г.Фреге Основоположения арифметики (логико-математическое исследование о природе числа). Томск, Водолей, 2000.
12. Ж. Делез, Фр. Гваттари «Что такое философия?». СПб., Алетейя, 1998.
13. Лейбниц Г.В. Письмо Софии-Шарлотте (о том, что независимо от чувств и материи) //Его же. Собр. соч. в 4тт. Т.3. М., Мысль, 1984. — стр.371—395.
14. Кант И. Критика чистого разума. М., Мысль, 1994.
15. Катречко С.Л. Как возможно творческое воображение? //Воображение как познавательная способность (в печати; см. «электронную версию» этой по адресу http://www.philosophy.ru/library/image/index.html; http://www.philosophy.ru/library/image/sb_image.doc, а также материалы телеконференции «Как возможно творческое воображение?» на эту тему — http://www.fido7.net/cgi-bin/forumi. fpl? user=Kant)