Кудряшев А.Ф.

ПАРАДИГМЫ МАТЕМАТИКИ

В статье последовательно обсуждаются вопросы: 1) что можно считать парадигмами математики?; 2) какие парадигмы наиболее существенны для математики в целом?; 3) о свободе в математике; 4) об одной парадигме математики в особенности, а именно о парадигме «математика как физика»; 5) об итоговой парадигме математики (вместо заключения).

Парадигмы, о которых здесь будем говорить, понимаются нами весьма просто, поскольку берутся вне системы понятий, развитой Томасом Куном и включающей в себя «научную революцию», «научное сообщество», тезис о несоизмеримости старой и новой парадигм, концепции антикумулятивизма, историцизма и пр. Возможно, что методология Т.Куна способна найти более целостное и более продуктивное применение к процессам развития математики, чем использование одного только понятия «парадигма», тем более, что отчасти это уже было сделано теми, кто в развитии математики нашел научные революции (например, Георгий Иванович Рузавин). Но нам достаточно взять понятие парадигмы в самом тривиальном значении, как устойчивое, содержательно наполненное направление исследований, задаваемое определенными принципами. Последние неизменны, потому что не сохраняются непринципиальные методологические детали, входящие в данную парадигму. Применительно к математике понятие парадигмы может обозначать выбранное направление математических исследований, попросту говоря, некоторую ее модель.

Оставим вне обсуждения метафоры типа: «математика -царица наук» или «математика - гимнастика ума». В то же время стоит признать отнюдь не переносное значение «математики как спорта (соревнования)» или, что вовсе безусловно, «математики как учебного предмета». Внутри математики можно выделить прежде всего алгебраическое и геометрическое направления, составляющие две альтернативные парадигмы, связь между которыми была обнаружена в аналитической геометрии. Можно проследить связь и того и другого направления с теоретико-множественной концепцией математики, замечательно выраженной Никола Бурбаки посредством понятия математической структуры. Все это позволяет объединить алгебраическое и геометрическое направления в парадигму алгебро-геометрического дуализма. Однако и их мы не будем здесь обсуждать, как и возможности рассмотрения тех парадигм, которые заложены в так называемых неканторовских математиках, в интуиционистской и конструктивной математике и в неевклидовых геометриях. Ясно и так, что все указанные «математики» весьма различны.

В статье выделяются существенно более крупные парадигмальные образования, в основном долгоживущие и потому проверенные временем: берутся во внимание такие планы изучения, где математика фигурирует как целое. Среди них есть давние, абсолютно несомненные в силу своей исторически сложившейся внутренней стройности, и относительно новые, может быть, развитые не настолько, чтобы вполне утвердиться в качестве несомненных.

Перечислим некоторые парадигмы современной математики, рассматриваемой главным образом не на уровне отдельных ее теорий, различающихся своими объектами, а на уровне подходов более крупного масштаба, каждый из которых пригоден для изучения нескольких математических теорий. Наиболее объемлющие парадигмы: 1. Математика как особая наука; 2. Математика как совокупность математических методов; 3. Математика как логика; 4. Математика как физика; 5. Математика как язык науки; 6. Математика как искусство. Для всех перечисленных случаев находятся их апологеты, у которых имеется большее или меньшее число сторонников.

Понимания математики или как системы математических знаний, или как определенной профессиональной деятельности входят, по большей части, в 1. Случай 1 - предметный в том плане, что подразумевается существование особого предмета математики. Случай 2 - такой, что предметность математики отрицается. В 3-ем случае проводится логицистская точка зрения, которую, как нам представляется, нельзя сбрасывать со счетов. В случае 4 не видят принципиальных отличий математики от физики. В случае 5 математика рассматривается как особая семиотическая система. Эта парадигма имеет своего исторического предшественника в виде утверждения-философемы: математика - язык природы. Случай 6, пожалуй, наиболее оригинальный, но в принципе неудивительный, поскольку известные аналогии между музыкой и математикой (не только арифметикой и алгеброй) вполне могут быть проведены в более общей форме, например, в той, какая обозначена здесь числом 6. Парадигма 6 ориентируется на концепцию, согласно которой человеческое творчество - удел искусства; тогда, если считать математика способным к творчеству в своей области, сферу его занятий – математику - надо причислить к разновидностям искусства, а математический метод - к совокупности художественных средств.

Возможно, что парадигмы, о которых тут говорится, не умрут, пока живет математика. До какой-то черты, чем больше парадигм и сильнее конкуренция между ними и их сторонниками, тем богаче возможностями содержательное развитие математики, тем интереснее споры и дебаты, плодотворнее научная деятельность, разнообразнее тематика диссертаций и пути обновления образовательных программ. Однако несмотря на такой обширный «шестиаспектный» охват, намеченное рассмотрение математики оставляет ощущение недостаточности. Кажется, что в перечне парадигм, даже взятом вместе с напрашивающимися уточнениями и конкретизациями, чего-то не хватает, может быть, - самого главного. Но об этом, как было заявлено в плане статьи, - в ее конце.

Вопрос о сущности математики вполне определенным образом решался Георгом Кантором. Широко известен его афоризм «сущность математики заключается в ее свободе», воспроизводимый, разумеется, с точностью, зависимой от перевода. Г.Кантор имел в виду не безграничную, ничем не обусловленную свободу-произвол. Он подразумевал свободу математической деятельности. Но даже и в математике для Г.Кантора дозволено далеко не все, что можно было бы создать в воображении ученого. Ограничения накладывает, конечно же, принцип непротиворечивости, регулирующий математические рассуждения и доказательства. Редуцируем высказывание Г.Кантора к виду: «Сущность математики - в ее свободе». Предположим, что от этого смысл всего высказывания не изменился, хотя в варианте, более близком к оригиналу, наверняка содержатся дополнительные нюансы смысла.

Совершенно иное в содержательном отношении, но по форме близкое высказывание получаем на основе анализа взглядов Жан-Поля Сартра. Французский философ много рассуждал о свободе человека, который для него «сначала существует»[1], «просто существует"[2], но так, что «осужден быть свободным»[3]. Феноменологическое описание человека, чем был занят Ж.-П.Сартр, не должно идти «вглубь», поскольку «нет никакой природы человека»[4], явление и сущность совпадают. Но это только с одной стороны. С другой - сущность есть и для Ж.-П. Сартра-феноменолога, так как не секрет, что «феноменологическое учение о бытии имеет своим средоточием сущность, или природу, человека»[5], и человек у него все же «определяется»[6]. Тезис Ж.-П. Сартра: «Человек – это свобода»[7] прочитывается на языке гегелевской философии как высказывание: «Сущность человека - это свобода», и сартровская свобода (сознание, выбор, ничто) в том же языке должна трактоваться как эссенциальное, а не экзистенциальное понятие. Иначе говоря, смысл воззрений Ж.-П.Сартра на человека не пострадает, если его выразить фразой, сходной по структуре с тезисом Г.Кантора о сущности математики: «Сущность человека - в его свободе». Кстати, в такой трактовке взглядов Ж.-П.Сартра нет ничего нового, но, как видим , она не лежит на поверхности. Для наглядности расположим две интересующие нас фразы в виде столбца:

«Сущность математики – в ее свободе»;

«Сущность человека – в его свободе».

Мы не будем поддаваться искушению и выписывать скоропалительные обобщения типа: «Сущность X - в X-а свободе», где X - какой угодно объект. У нас также отсутствует намерение отождествить человека с математикой на основе сходства высказываний: конечно же, человек и математика - далеко не одно и то же. Тем не менее возьмем эти высказывания как систему, рассмотрение которой позволяет предположить, что свобода, как метафизическая сущность, проявляется и в математике, и в человеке, т.е. математика и человек предстают как явления свободы, которые можно совместить. Тогда проявления свободы найдем на пересечении человека и математики. Это - математика в человеке и человек в математике (в обоих случаях речь идет, видимо, о профессионале-математике). Лаконичность словосочетаний «математика в человеке» и «человек в математике» позволяет по-разному их интерпретировать. Интерпретации кратких высказываний включают более развернутые формулировки вместе с соответствующими им смыслами и по идее должны быть такими, чтобы не возникала проблема их собственных интерпретаций. Некоторые интерпретации оказываются очевидно неразумными и их легко разоблачить. Скрытую неразумность других, когда она есть, надо демонстрировать. Пример неразумной интерпретации первого словосочетания: «Все содержание математики находится в каком-то определенном человеке». Резонно предположить, что продолжение размышлений о математике в человеке при адекватной трактовке способно дать значимые результаты. Но этим мы заниматься не намерены. Ограничимся обсуждением, и притом небольшим, человека в математике.

В чем конкретно свободен математик? Он выбирает не только парадигмы, направления исследований. Гораздо чаще он сталкивается с необходимостью выбора задач, которые он затем принимается решать. Однако еще более часто математик имеет дело с вопросами. Понятно, что в составе всякой задачи есть вопросы, но вопросы (может быть, другие) формулируются еще тогда, когда данная задача до поры до времени не поставлена.

В вопросах выражается суть проблемы, и нормой является то, что множество окончательных ответов меньше имеющегося множества вопросов. Как они появляются? Вопросы могут рождаться из осмысливания наблюдений. Математик внешне наблюдает записи уравнений и их систем, формулы, отдельные символы, рисунки фигур и геометрические построения на плоскости, пространственные тела, которым соответствуют определенные мыслительные образования и их внутреннее наблюдение. Посредством мышления математик переводит внешнее во внутреннее и наоборот, хотя, будучи целостным, оно прежде всего констатирует то, что созерцается, и это последнее, т.е. предмет созерцания в его элементарных формах, не продуцируется мышлением, а фиксируется в нем как нечто данное. Тем самым во внутреннем наблюдении заложена пассивность, проявляющаяся в безразличии к тому, что им запечатлевается. Речь идет, разумеется, о конечных объектах математики, которые «ведут себя» нормально, никак не «пугают» того, кто их наблюдает, хотя удивлять неожиданностями вполне в состоянии. Монстры появляются, когда пытаются представить бесконечность. Ординарные случаи конечных множеств в принципе не должны вызывать испуг.

Когда объект неподвижен и находится в органичной для него и, в свою очередь, неизменной среде, тогда достаточно простого созерцания, которое ее не портит, не травмирует, не наносит ущерба, не возмущает ее. От созерцания не страдают ни объект, ни его непосредственное окружение, входящее в «картинку» созерцания: она вмещает в себя несколько больше того объема, какой занимает сам объект. Например, математическое наблюдение числа 2 как объекта теории чисел составляет его «чистое» созерцание, но в окружении прежде всего чисел 1 и 3, ближайших к числу 2 элементов натурального ряда и находящихся с этим числом в определенных фиксированных отношениях.

В том случае, когда в «картинке» возникает движение, скажем, движется объект, созерцание переходит в наблюдение, организованное более сложно. Кроме того, наблюдатель вынужден находиться в напряжении, опасаясь упустить непредвиденное, обусловленное не только внутренними причинами объекта самого по себе, но и изменениями во внешней среде. Наблюдатель, как ученый, не ограничивается полученной из наблюдения информацией. В этом смысле он отнюдь не пассивен, поскольку производит необходимые мыслительные процедуры: он сравнивает, обобщает, анализирует, умозаключает. Все это тесно связано с задаванием вопросов, и в первую очередь себе. Однако для наблюдателя характерна установка на бездействие по отношению к объектам, и поэтому он воздерживается от действий над ними. Так что нетрудно установить сходство между наблюдением в математике и физическим наблюдением.

В деятельности математика и физика можно найти аналогию не только наблюдению, но и эксперименту. Правда, отличия весьма существенны. Известны, например, социальные запреты на проведение опасных физических экспериментов. От подобных ограничений математический эксперимент свободен, так как это, во-первых, мысленный эксперимент, а, во-вторых, эксперимент, производимый над «бездушными» сущностями. С учетом сказанного, имеет смысл назвать его «квазиэкспериментом» (термин

Леонарда Эйлера)[8]. Однако в процессе математического квазиэксперимента производятся действия, такие, как сложение, умножение и т.д., над объектами, подобно тому, как активно воздействует на исследуемые объекты физик-экспериментатор. С эволюцией математики увеличивается количество вопросов; хотя ответов тоже становится все больше и больше, растет и число вопросов, на которые весьма затруднительно ответить. Ответы в математике переформулируются в виде теорем и содержат доказательства (тогда, когда ответ найден), а когда доказательства математического утверждения нет, ответ предстает как некое множество гипотез и не является окончательным.

Свобода субъекта в математике заключается прежде всего в вопросах, которые он задает сам себе (это может делать и коллективный субъект), коллегам, а теперь еще и компьютеру. Можно надеяться, что и в поисках ответов на поставленные вопросы математик действует, имея некоторые альтернативы, а не просто как заранее запрограммированное кем-то логическое устройство. Физик-экспериментатор, в отличие от математика, всегда более насторожен. Он постоянно контролирует свои действия для того, чтобы не допустить нарушения социальных и методологических запретов. Главное же, что его беспокоит, - это возможность и вызванное ею ожидание от объекта экспериментирования какой-либо неожиданности.

Как отмечал Джордж Пойа, сравнивая «физические и математические» ситуации, в «физических ситуациях» следствия выводятся из двух посылок, первая из которых совпадает с посылкой в «математических ситуациях», а вторая посылка отличается своим гораздо более смутным уровнем: употреблением характеристик «менее правдоподобно» вместо «ложно», «более правдоподобно» вместо «истинно»[9]. «Это отличие мне кажется существенным; дополнительные трудности физических ситуаций могут им объясняться»[10], - пишет Д.Пойа. Математик же более категоричен, чем физик.

В математике есть и удивительное, и неожиданное, но «пугать» математика могут люди: те, кто стоят выше по административной лестнице и причастны к власти, те, кто имеют более весомый социальный статус, «крики беотийцев» и т.п. Внутри самой математики аналогичной способностью обладает только бесконечность, но никак не конечный объект. Физик, задавая вопросы не только себе, но и природе, вынужден ее остерегаться, поскольку она остается свободной. Свободна природа в целом, свободен и объект физического исследования, по окончании которого всегда будет остаток, напоминающий ученым о кантовской «вещи–в–себе». Поэтому свобода физика ограничена свободой его «визави»: природы и природных объектов, на которые направлен его исследовательский интерес. Концепция «диалога» человека с природой как раз и пытается учесть наличие этой «второй» свободы.

Трудные вопросы, не получающие ответов, создают у математиков ощущение несвободы. Однако сходство между математикой и физикой является более глубоким, чем можно было бы полагать, будучи приверженцем какой-либо парадигмы, отличной от точки зрения «математики как физики». Математические объекты, даже самые знакомые, оказываются гораздо более независимыми и свободными, чем хотелось бы.

Вещь, задействованная в эксперименте, может меняться или сильно, или слабо. Слабые изменения незначительны и таковы, что протекают мало заметным, если судить по результатам, образом. В отличие от слабых, сильные изменения такие, что подверженный им объект утрачивает свою идентичность. При повторном эксперименте требуется использовать другую вещь, похожую или почти тождественную, но все равно другую. Таким образом, следует отметить, что экспериментатор, повторяющий - и не один раз - опыт для объективности научного исследования, должен иметь запас экспериментального материала.

При таком же подходе к объектам математики (а в рамках парадигмы «математика как физика» это обязательно должно быть, так как здесь главенствуют принципы физики) математик обязан иметь запас математических объектов. Разумеется, прежде всего - запас натуральных чисел.

Возьмем бесспорно принадлежащее всякому натуральному ряду число 2 (относительно 1 и тем более 0 как началах натурального ряда возможны сомнения. В любом случае, с какого бы числа натуральный ряд ни начинался, он нуждается в числе 1). Пока математик, имея объектом созерцания число 2, «всматривается», «вслушивается» («внутренним взглядом», «внутренним слухом») в него, с ним ничего не происходит. Но вот он начинает с ним «экспериментировать», т.е. производить операции: $2x2=2^2$ (теорема). В записи этого равенства использовано несколько двоек (если мы будем их пересчитывать, то нам понадобится дополнительно найти еще несколько штук). Двойки берутся из натурального ряда. Можно предположить, что когда-то был первый натуральный ряд, в котором число 2 впервые появилось как число натурального ряда. В парадигме «математика как физика» начало «исходного» натурального ряда должно было выглядеть так (с единицей в роли первого числа): 1,1,1,…1,2,2,2…2,3,3,3,…3,… . Поскольку исторический опыт «работы» с числами велик, то остается признать: тот натуральный ряд давно «растащили» по кускам. Чтобы продолжать и дальше «работу» с целыми положительными числами, мы вынуждены предположить, что каждого из них сколь угодно много. Конечно, хорошо было бы уметь перенумеровывать двойки, но для этого надо было бы иметь запас натуральных чисел. Откуда же их брать в нужном количестве, пока не завершен самый первый натуральный ряд? Даже взять двойку (понимаемую как сумму 1+1), чтобы пометить ей единицу, следующую за первой единицей, мы сможем не сразу: двойки появятся после того, как будет выписано достаточное число единиц. Желание сначала выписать все единицы и затем их перенумеровать, очевидно, невыполнимо не просто потому, что не будет, например, двойки, но потому, что мы не сможем выписать все единицы (именно поэтому не будет и двойки). При нумерации мы не сможем пойти дальше первой единицы, на которой все и остановится. Сходная ситуация была описана Зеноном в известной апории «Дихотомия» с ее аргументом в той форме, какая приводит к выводу, что движение не может начаться. Или мы все продолжаем и продолжаем строить натуральный ряд, начиная с числа 1 (но тогда откуда берутся новые единицы ?), или мы заранее имеем бесконечное множество единиц, безжалостно расходуемых на получение других чисел ? В последнем случае натуральный ряд надо начинать с числа 2. Заметим: предположение, будто целые положительные числа могут существовать сами по себе и поэтому их можно найти вне натурального ряда, сталкивается с проблемой их различимости, которая решается просто, если множество чисел упорядочено их вхождением в натуральный ряд.

Физика, как видим, подталкивает к тому, чтобы ввести понятие потенциальной бесконечности. Однако, дабы перейти от числа 1 к числу 2, приходится вводить актуальную бесконечность единиц. И в случае потенциальной, и в случае актуальной бесконечности можно заключить, что их введение есть результат цивилизационного развития. Вместе с тем ситуация с введением бесконечности по своим последствиям значительно превосходит последствия введения аксиоматического метода, - увы, не такие уж благополучные: « … конструкция, порожденная разумом, - последовательность целых чисел, эта простейшая и самая прозрачная для конструктивного ума вещь, - обретает аналогичную неясность и ущербность, если подходить к ней с позиций аксиоматики. Но тем не менее это факт, отбрасывающий зыбкий отблеск на взаимосвязь опыта и математики», - пишет Герман Вейль[11].

Не будем здесь останавливаться на вопросе о субстанциональности каждого из чисел натурального ряда и на возможности числовой монадологии. Тем не менее отметим, что физическая трактовка математики подводит к предположению об убывании запасенного количества чисел, происходящего вместе с их ростом: чем больше натуральное число, тем меньший запас этого числа требуется человечеству. Это – общая, но не монотонная тенденция, ибо запасы степеней целых чисел, прежде всего степеней 10, требуются более обширные, чем запасы других больших и, в особенности, сверхбольших чисел.

Парадигма «математика как физика» побуждает оптимиста-математика к тому, чтобы признать: «хорошая физика называется математикой».

Другая трактовка числа 2 отличается от предыдущей своим «невещным» характером. В ней двойки полностью отождествляются. Их нельзя перенумеровать: индексы к числам не «прилипают» по определению, согласно которому числа, входящие в одно и то же гнездо натурального ряда, абсолютно тождественны. Поэтому двойки полностью взаимозаменяемы и таковы, что извлечение их из недр натурального ряда в нем ровным счетом ничего не меняет, ряд после извлечения остается точно таким же, каким он был до такой операции. Объект, полученный в результате рассматриваемой трактовки, и есть по-настоящему специфический объект чистой математики. Соответствующая парадигма (присвоим ей номер 7) при узком ее толковании, отличающем ее от всех шести вышеперечисленных парадигм математики, может быть теперь озаглавлена «математика как математика». Возвращаясь к словам Г.Кантора, мы можем дать им и такую интерпретацию: актуальная бесконечность есть самое живое проявление свободы самой математики. Но в достаточно широком смысле парадигма «математика как математика» вбирает в себя все остальные парадигмы, включая и ту, которая только что была помечена номером 7 и была названа «узкой». Эта широкая парадигма и будет итоговой парадигмой математики.

Примечания

1. Сартр Ж.-П. Экзистенциализм – это гуманизм // Сумерки богов. М. 1989. С. 323.
2. Там же. С. 327.
3. Там же.
4. Там же. С. 323.
5. Киссель М.А. Философская эволюция Ж.–П. Сартра. Л. 1976. С. 51.
6. Сартр Ж.–П. Экзистенциализм – это гуманизм. С. 323.
7. Там же. С. 327.
8. См.: Пойа Д. Математика и правдоподобные рассуждения. М. 1975. С. 25.
9. См.: Там же. С. 251 – 252.
10. Там же. С. 252.
11. Вейль Г. Математическое мышление. М. 1989.С. 23.