ПАМЯТНИКИ ФИЛОСОФСКОЙ МЫСЛИ

Герман ГРАССМАН Роберт ГРАССМАН

Логика и философия математики

Избранное

Герман ГРАССМАН Роберт ГРАССМАН

Наука

РОССИЙСКАЯ
АКАДЕМИЯ НАУК

Институт философии

ПАМЯТНИКИ ФИЛОСОФСКОЙ МЫСЛИ

Серия основана в 1978 г.

Герман
ГРАССМАН

Роберт
ГРАССМАН

Логика и философия математики

Избранное

МОСКВА НАУКА 2008

УДК 001
ББК 87в
Г77

Перевод с немецкого
доктора философских наук Б.В. БИРЮКОВА

Вступительная статья
Б.В. БИРЮКОВА, Л.Г. БИРЮКОВОЙ

Послесловие Б.В. БИРЮКОВА

Комментарии:
доктор философских наук Б.В. БИРЮКОВ,
кандидат физико-математических наук З.А. КУЗИЧЕВА

Ответственные редакторы:
кандидат философских наук Л.Г. БИРЮКОВА,
кандидат физико-математических наук З.А. КУЗИЧЕВА

Рецензенты:
доктор философских наук А.Л. НИКИФОРОВ,
кандидат философских наук И.С. ВЕРСТИН

Грассман Г.

Логика и философия математики. Избранное: пер. с нем. / Герман Грассман, Роберт Грассман; [отв. ред. Л.Г. Бирюкова, З.А. Кузичева]; Ин-т философии РАН. – М.: Наука, 2008. – 503 с. – (Памятники философской мысли). – ISBN 978-5-02-033858-6 (в пер.).

В сборник избранных работ выдающихся немецких мыслителей – братьев Г. Грассмана (1809–1877) и Р. Грассмана (1815–1901), занимавшихся математикой, философией, логикой, филологией, включены тексты, раскрывающие разные стороны философских воззрений и методологии авторов. Тексты Грассманов подробно прокомментированы и снабжены обширным Послесловием.

Для широкого круга читателей, интересующихся историей философии, логикой, философией математики, методологией науки.

Темплан 2006-I-3

ISBN 978-5-02-033858-6

БРАТЬЯ ГРАССМАНЫ: ВЕХИ ТВОРЧЕСКОГО ПУТИ

Генетические и конструктивистские (алгоритмические, эффективистские) компоненты присущи логике и математике на протяжении всей истории этих наук. Достаточно указать на силлогистику Аристотеля – по крайней мере ассерторическую, – которая содержала регулярный метод распознавания логической правильности рассматривавшихся им умозаключений. В современную эпоху компьютеризации, когда методы эффективной вычислимости приобрели в науке и практике первостепенное значение, а понятия алгоритма и формализованной эвристики получили широкое философское звучание, многие факты развития знания предстают в новом свете. Открывается новая сторона в истории логики и философии математики. Именно в этом свете следует подходить к логическим и философско-математическим достижениям Германа и Роберта Грассманов.

Имя *Германа Юстуса Грассмана* (1809–1877), мало говорившее научному миру почти до последних лет жизни ученого, ныне широко известно и связывается обычно с его знаменитым «учением о протяженностях», по нашему мнению, еще недостаточно изученным историками математики. Многогранны достижения Грассмана в физике: он был автором работ по электромагнитной теории, акустике, теории цвета – работ, которые во многом основывались на разработанной им теории «протяженностей». Значительное место Г. Грассман занимает и в языкознании, а также востоковедении. Здесь его вклад касается, в частности, санскритологии и изучения древнеиндийской культуры: им был составлен словарь к старейшему религиозному и литературному памятнику Индии – «Ригведа» и осуществлен его перевод на немецкий язык.

Историки математики возводят к работам Г. Грассмана теорию гиперкомплексных числовых систем, линейную и тензорную алгебру, теорию многомерных евклидовых пространств и многое другое; о нем вспоминают, когда в учебниках «теоретической арифметики» приводят индуктивные (рекурсивные) определения операций сложения и умножения (натуральных) чисел. При этом, однако, остаются невыясненными те философские воззрения, которые лежали в основе грассмановского подхода к математике. *Философия математики* Г. Грассмана почти неизвестна специалистам. В тени находятся его взгляды на природу математического знания и его отношение к философии; в полной мере не оценено его новаторство в *индуктивно-рекурсивном* построении дедуктивной теории; не обращают внимания на тот факт, что именно он – вместе со своим младшим братом Робертом – явился в XIX веке наиболее ярким представителем того направления в методологии науки, которое многие годы спустя было названо *генетическим*. Наконец, напрочь игнорируется то место, которое принадлежит ему в истории *символической логики*.

Еще менее повезло брату Германа Грассмана – *Зигмунду Лудольфу Роберту Грассману* (1815–1901). В работах по истории философии, науковедению и истории математики, в частности философских оснований математического знания, его труды не принимаются во внимание. О нем вспоминают, да и то мимоходом, лишь в связи с развитием *алгебры логики*, причем логические достижения Р. Грассмана вводятся обычно в контекст общего «булевского» направления, как оно развивалось в логике XIX века, хотя сам Р. Грассман решительно подчеркивал отличие своих – выработанных совместно с братом – установок в логической науке от подхода, реализованного в трудах Буля и таких его последователей, как Джевонс. Не нашли должной оценки усилия Р. Грассмана систематизировать и развить далее – в виде «учения о величинах» – ту философско-математическую концепцию, которая была представлена во Введении к «Учению о протяженностях» 1844 года его брата Германа, особенно в *общем учении о формах* последнего. Между тем разработанное Робертом Грассманом *учение о величинах* представляет значительный интерес с точки зрения истории *оснований математики:* как показывает его изучение, в нем содержались предвосхищения некоторых положений, которые составили необходимый и важный элемент *интуиционизма* и *конструктивизма* – этих направлений в философии математики и в логике, сложившихся лишь в XX столетии. Хотя детальное развертывание «учения о величинах» было осуществлено одним Робертом, по своему происхождению оно связано с философско-математическими идеями, самостоятельно выдвинутыми старшим из двух братьев – Германом, а общий замысел этого учения созрел в ходе их совместной работы.

Авторы этих строк в серии публикаций (1979–1997) постарались прояснить некоторые примечательные черты научного мышления этих двух оригинальных умов[1]. Эти публикации лежат в основе настоящей статьи, а также совместных с З.А. Кузичевой примечаний к публикуемым грассмановским текстам.

ГЕРМАН ГРАССМАН: КОНТУРЫ ЖИЗНИ И ДЕЯТЕЛЬНОСТИ

Братья Грассманы принадлежали к бюргерскому роду, в котором на протяжении поколений сохранялись семейные традиции. Согласно «Книге семейства Грассманов», составленной Робертом Грассманом[2], сведения о роде Грассманов восходят к XVI

[1] Первый из авторов настоящей статьи еще в томе I «Философской энциклопедии» (М., 1960) поместил небольшую справку о Р. Грассмане (как логике). В 1981 г. в Ленинградском государственном университете Г.Н. Малыхиной защищена диссертация на соискание ученой степени кандидата философских наук (научный руководитель – доктор философских наук И.Н. Бродский) на тему «Логические исследования Роберта Грассмана». Изучение философско-математического и логического наследия братьев Грассманов было в центре кандидатской диссертации Л.Г. Бирюковой – «Становление генетического метода в дедуктивном знании» (1986; научный руководитель – доктор философских наук В.А. Смирнов).

[2] *Grassmann R.* Grassmansches Familienbuch, aus alten Urkunden zusammengetragen. Stettin. Druck und Verlag von R. Grassmann. 1876, IV, 43 S. Эта книга осталась недоступной для авторов этих строк, но сведения о ней содержатся в фундаментальной научной биографии Германа Грассмана, составленной вскоре после смерти ученого Фридрихом Энгелем – издателем его «Собрания сочинений по математике и физике». *Grassmann H.* Gesammelte mathematische und physikalische Werke. Unter Mitwirkung J. Luroth, E. Studi, J. Grassmann, H. Grassmann der Jungere, G. Scheffers hrsg. von *F. Engel*. Bd. I., Thl. I: Die Ausdehnungslehre von 1844 und die Geometrische Analyse, 1894, 435 S.; Bd. I, Thl. 2: Die Ausdehnungslehre von 1862. 1896, 511 S.; Bd. II, Thl. 1: Die Abhandlungen zur Geometrie und Analysis, 1904, X, 452 S.; Bd. II, Thl. 2: Die Abhandlungen zur Mechanik and zur mathematischen Physik, 1902, VIII, 266 S.; Bd. III, Thl 1: Theorie der Ebbe und Flut. Prüfungsarbeit 1840 und Abhandlungen zur mathematischen Physik aus dem Nachlasse, 1911, V, 353 S.; Bd. III, Thl. 2: Grassmanns Leben, geschildert von *F. Engel*, nebst einem Verzeichnisse der von Grassmann veröffentlichten Schriften und einer Übersicht des handschriftlichen Nachlasses, 1911, XV. 400 S. Leipzig. Druck und Verlag B.G. Teubner (при дальнейших ссылках: *Grassmann H.*, Werke – с указанием тома и части). Биография Г. Грассмана занимает всю вторую часть тома III (1911 г.) этого издания (составляя 355 с.). Следует также назвать выпущенную сразу после смерти Г. Грассмана книгу Виктора Шлегеля «Герман Грассман, его жизнь и его труды» (*Schlegel V.* Hermann Grassmann. Sein Leben und seine Werke. Leipzig: F.A. Brockhaus, 1878, VIII, 82 S.), которая, согласно Ф. Энгелю, в своей биографической части почти полностью основана на очерке жизненного пути Г. Грассмана, составленном вскоре после его смерти братом Робертом; хотя Ф. Энгель использовал как работу Шлегеля, так и очерк Роберта, внося в необходимых случаях требуемые исправления и уточнения, тем не менее данное сочинение Шлегеля сохраняет свое значение в качестве источника сведений о Г. Грассмане. О дальнейших работах, освещающих творческий путь Г. Грассмана, будет сказано ниже.

столетию. В этом роду мы встречаем купцов, священников, бургомистров. Дед Германа и Роберта по отцовской линии окончил университет в Галле и был священником лютеранской церкви. Отец – Юстус Гюнтер Грассман – учился в том же университете; поначалу он тоже хотел посвятить себя церкви, но очень скоро перешел к педагогической деятельности и в конце концов стал профессором Штеттинской гимназии, где преподавал математику и физику. Он был автором работ по физике (в частности, заложил основы кристаллографии), технике (внес усовершенствование в конструкцию воздушного насоса) и «элементарной» математике. Его сын Герман значение математических работ отца видел для себя в том, что содержавшееся в них понимание операции умножения (Produktbegriff) дало ему толчок для разработки понятия «внешнего произведения» (ср. [Grassmann H., Werke, Bd. I, Thl. 1, S. 8; Thl. 2, S. 507ff]) – понятия, которое, как известно, органически вошло в современную математику, выступая в качестве основного понятия «внешней алгебры», называемой также алгеброй Грассмана[3].

Герман Гюнтер Грассман родился в Штеттине (Померания) 15 апреля 1809 г. (день рождения Эйлера). В семье он был третьим ребенком, но два родившихся до него умерли в раннем детстве. Затем в семье последовало еще девять детей и в их числе Роберт, который был на шесть лет младше своего брата. В 1827 г. Герман окончил Штеттинскую гимназию и в течение шести семестров учился в Берлинском университете (основан в 1810 г.). Осенью 1830 г. он вернулся в родной город и до конца следующего, 1831 года, самостоятельно готовился к сдаче государственного экзамена на звание учителя гимназии. В декабре 1831 г. Герман успешно сдал в Берлине письменные и устные испытания (Lehramtsprufung) по языкам, истории, математике, естествознанию и другим предметам – экзамен pro faculate docendi. Затем последовали два экзамена по теологии, а в 1839 г. он подготовился и в 1840 г. сдал второй государственный экзамен – на право преподавания в средней школе. Составной частью последнего было выполнение письменной работы по физико-математическим наукам, и тема, которую он получил, гласила: «Теория приливов и отливов». Как свидетельствует Ф. Энгель, имевший доступ к соответствующим документам, в заключении экзаменационной ко-

[3] Ср., например, характеристику «внешней алгебры» Г. Грассмана в кн.: Математика XIX века. Математическая логика. Алгебра. Теория чисел. Теория вероятностей / Под ред. А.Н. Колмогорова и А.П. Юшкевича. М.: Наука, 1978, и в статьях: *Купцов Л.П.* Внешнее произведение // Математическая энциклопедия. М., 1977. Т. 1. Ст. 731–732; *Онищик А.Л.* Внешняя алгебра // Там же. Ст. 732–733.

миссии – в ее составе были математик К.Л. Конрад (C.L. Conrad), который сформулировал задание, и крупный философ и филолог А. Тренделенбург – после описания успешных результатов устных и письменных испытаний, которым был подвергнут Г. Грассман, говорилось:

> Комиссия объявляет его (Германа Грассмана. – *Б.Б., Л.Б.*) совершенно и превосходно [vorzugsweise] пригодным к занятию любой преподавательской должности в гимназии или полной средней школе [hohere Burgerschule] по математике, физике, минералогии и химии[4].

С 1834 г. начинается преподавательская деятельность Г. Грассмана в средних учебных заведениях – сначала Берлина (менее полутора лет), затем Штеттина, в частности в 1843 г. он занял должность штатного преподавателя (ordentliche Lehrstelle) в Полной средней городской школе им. Фридриха-Вильгельма, а в 1852 г., после смерти отца, был назначен его преемником в Штеттинскую гимназию, и ему было присвоено звание профессора. Начиная с 1831 г. Герман усиленно осваивал различные области математики, физики и филологии – наук, которые на протяжении всей творческой жизни ученого составляли сферу его интересов.

Осенью 1843 г. Герман Грассман закончил первую часть сочинения «Наука об экстенсивных величинах, или Учение о протяженностях» – «Учение о линейных протяженностях», – которая в 1844 г. вышла из печати в издательстве Отто Виганда в Лейпциге. Этот труд не привлек внимания современных Г. Грассману математиков и философов, на него не появилось ни одной рецензии. Книга не была распродана, и в 1864 г. примерно 600 экземпляров было переработано издателем как макулатура, остаток же был, возможно, роздан бесплатно[5]. В 1846 г. за работу, представленную на конкурс, объявленный Обществом князя Яблоновского, Г. Грассман получил премию, и в следующем году работа была напечатана; но и она прошла мимо научного мира. В 1860 г. из-под пера Германа Грассмана вышла первая часть задуманного им «Учебника по математике для полных средних школ», называвшаяся «Арифметика». Подобно «Учению о протяженностях» 1844 года «Арифметика» Г. Грассмана не получила положительной оценки ни у ученых-математиков, ни у педагогов. Желая продвинуть свои идеи в научный мир, Г. Грассман решил вместо второго тома «Учения о протяженностях» издать труд 1844 года в расширенном и переработанном

---

[4] См.: *Grassmann H.* Werke. Bd. III. Teil. 2. S. 70.

[5] См.: *Grassmann H.* Werke. Bd. III. Thl. 2 (глава XXXIV текста Ф. Энгеля).

на «евклидовых» принципах виде, что и было им сделано в 1861/1862 годах[6].

Первым математическое – и *философско*-математическое – значение работ Г. Грассмана осознал, по-видимому, У.Р. Гамильтон; в ряде писем, относящихся к 1853 г., он сообщил о результатах немецкого ученого А. Де Моргану. В предисловии к своим «Лекциям о кватернионах»[7] Гамильтон воздал должное достижениям Г. Грассмана, однако эти высказывания выдающегося английского математика остались неизвестными Грассману. Из труда Гамильтона о вкладе Г. Грассмана узнал Г. Ганкель, который, познакомившись с «Учением о протяженностях», пришел к пониманию ценности этого учения для проводимой им систематизации теории комплексных чисел; в конце ноября 1866 г. Г. Грассман получил от Ганкеля письмо, в котором последний писал, что в работах Г .Грассмана (имелись в виду оба варианта «Учения о протяженностях») он с большой радостью обнаружил «понятие комплексных чисел – так я называю Ваши экстенсивные величины, – [которое] рассматривается с таких общих позиций и так основательно, как я могу только пожелать для того, чтобы уяснить себе данный вопрос»[8]. Но по-настоящему математический мир «признал» Г. Грассмана только после того, как на его работы обратили внимание такие математики, как Ф. Клейн и С. Ли. В декабре 1871 г. по инициативе Р. Клебша Гёттингенское научное общество избрало Г. Грассмана своим членом-корреспондентом.

Однако, как отметил еще Ф. Энгель, признание пришло слишком поздно. В течение десяти лет, истекших после выхода в свет

---

[6] *Grassmann H.* Die Ausdehnungslehre. Vollständig und in strenger Form bearbeitet. Berlin. Verlag von Th. Chr. Fr. Enslin (Adolph Enslin), 1862, XII. 388 S. Книга была напечатана в типографии Роберта Грассмана в 1861 г., а затем сдана на комиссию Энслину; как и в случае «Арифметики», на титульном листе стоял не год фактического выпуска книги в свет, а следующий год. Переработанное «Учение о протяженностях» имело еще меньший успех, чем первое, и на него также не появилось никаких отзывов.

[7] *Hamilton W.R.* Lectures on Quaternions: Containing a Systematic Statement of a New Mathematical Method; of With the Principles were Communicated in 1843 to the Royal Irish Academy; and Which Has Since Formed the Subject of Successive Courses of Lectures, Delivered in 1848 and Subsequent Years, in The Halis of Trinity College, Dublin; with Numerous Illustrative Diagramms, and with Some Geometrical and Physical Applications. Dublin: Hodges and Smith; London: Whittaker & Co.; Cambridge: Macmillan & Co., 1853 (на обороте титульного листа: Dublin: Printed at the University Press by M.H. Gill), 737 p.

[8] Цит. по «Жизнеописанию Грассмана», составленному Ф. Энгелем (*Grassmann H.* Werke. Bd. III. Thl 2. S. 270).

второго варианта «Учения о протяженностях», Г. Грассман почти полностью отошел от занятий точными науками. Он обратился к языкознанию и в 1873–1875 гг. в шести выпусках издал у Брокгауза в Лейпциге «Словарь "Ригведы"»[9]. В 1876 г. там же вышла первая часть, а в год смерти – вторая часть его перевода этого религиозного памятника древнеиндийской культуры[10].

Незадолго до смерти Г. Грассман по инициативе профессора психологии Иенского университета В. Прейера (W. Preyer), занимавшегося теорией восприятия и считавшего работы Г. Грассмана по математике и физике – на физических исследованиях автора «Учения о протяженностях» мы не имеем возможности задерживаться – весьма ценными, предпринял переиздание труда «Учения о протяженностях» 1844 г. Но Герман Грассман не дожил до выхода книги в свет: 26 сентября 1877 года его не стало. Он не успел завершить предисловия к переизданию, и по просьбе семьи оно было дописано В. Шлегелем. В 1878 г. новое издание «Учения о протяженностях» в его первом варианте вышло из печати.

В завершающей главе биографии Г. Грассмана Ф. Энгель подвел следующий итог жизненному пути своего выдающегося современника. История науки, писал он, знает немало людей, чьи замечательные достижения долго пребывали в забвении. Иногда их результаты находили признание лишь посмертно. Скольких из них такая судьба ожесточила или привела к отталкивающему самолюбованию, сколько из них не выдерживали напряжения и сдавали, утрачивая способность к творчеству! Очень немногие ученые могли в течение десятилетий переносить недооценку их результатов и пренебрежение их трудами, не давая волю горьким чувствам и не теряя работоспособности. Но Герман Грассманн был именно таким человеком. Он имел силы и мужество, будучи уже в зрелом возрасте, перейти в новую для себя область науки – в филологию, сумел в ней освоиться и плодотворно работать, добиваясь результатов, имеющих непреходящую ценность[11].

Судьба Г. Грассмана аналогична судьбе, которую несколькими десятилетиями спустя претерпел другой выдающийся немецкий

---

[9] *Grassmann H.* Wörterbuch zum Rig-Weda. Leipzig: F.A. Brockhaus, 1873, VIII S. und 1776 Sp. (выпуски 5 и 6 вышли в 1875 г., однако на титуле «Словаря», изданного отдельной книгой, значится 1873 г.).

[10] Rig-Veda. Übersetzt und mit kritischen und erläuternden Anmerkungen verseheen von *H. Grassmann*. In zwei Theilen. Thl. 1: Die Familien-Bücher des Rig-Veda (zweites bis achtes Buch), 1876, VIII, 586 S.; Thl. 2: Sammelbuch des Rig-Veda (erstes, neuntes, zehntes Buch), 1877, II, 524 S.; Leipzig: F.A. Brockhaus.

[11] См.: *Grassmann H.* Werke. Bd. III. Thl 2. Kap. XXXVI.

ученый, работавший в области оснований математики, – Готтлоб Фреге[12]. Как и работы Г. Грассмана, труды Фреге не получили признания среди математиков и логиков его времени. Оба ученых не имели учеников и не создали собственной научной школы; оба печатали свои книги на собственные средства, и книги эти не находили читателей. Но они мужественно переносили выпавшую на их долю судьбу: внутреннюю силу им давала одна и та же установка – стремление проникнуть в самые основы строгого знания; один представлял его в виде абстрактного «учения о формах» или «учения о величинах», другой – в виде логической «записи в понятиях», на которой, в конечном счете, должна покоиться если не вся математика, то во всяком случае ее арифметизируемая часть. Оба они, выработав свои взгляды на природу математики и ее методы, оказались не в состоянии идти в ногу с развитием научной мысли, и на склоне дней их мышление оказалось, так сказать, «закрытым для опыта» новых философско-математических и математико-логических идей и результатов. Фреге не принял гильбертовского подхода к основаниям математики. Г. Грассман если бы и попытался, то, вероятно, был бы не в состоянии выразить свои результаты в терминах сформировавшихся на иных путях теории n-мерных евклидовых пространств, линейной алгебры, теории групп и инвариантов.

Но, как справедливо заметил Ф. Клейн, положение, в котором находился Г. Грассман, имело и свои преимущества. Математик, работающий в рамках «академической науки», вырастает в атмосфере острой конкуренции со специалистами, ставящими одинаковые цели, – «подобно дереву в лесу, которое, чтобы иметь возможность выжить и отвоевать себе свою часть света и воздуха, должно устремляться ввысь, а не вширь. Но кто стоит одиноко, как Грассман, тот может свободно развиваться во все стороны, доводя свою сущность и свои дела до гармонического завершения и образуя из них единое целое»[13]. Не в этом ли причина, что люди науки масштаба Германа Грассмана, оказываясь в условиях подобной научной изоляции, создают часто новые области знания? Во всяком случае это сделали и Г. Грассман и Г. Фреге, да и Дж. Буль, тоже творивший в условиях «научной провинции».

---

[12] См. о нем: *Бирюков Б.В.* «Готтлоб Фреге: современный взгляд» и «В логическом мире Фреге» / Фреге Г. Логика и логическая семантика. Сб. трудов. М.: Аспект Пресс, 2000.

[13] *Клейн Ф.* Лекции о развитии математики в XIX столетии / Пер. с нем. Н.М. Нагорного, под ред. М.М. Постникова. М.: Наука, 1989. Т. 1. С. 196.

Продолжая сопоставление Г. Грассмана и Фреге, заметим, что ныне, в условиях «фрегевского ренессанса»[14], мы хорошо понимаем, в чем заключался вклад последнего в логическое обоснование математики и чем была вызвана недооценка его труда современниками; мы отчетливо видим, в чем состояла неизбежная для всякого мыслителя ограниченность взглядов Фреге, порожденная уровнем современного ему знания, и что из его наследства питает философскую и математико-логическую мысль и по сей день. Но «грассмановского ренессанса» – коль скоро речь идет о философии математики и методологии науки – мы не наблюдаем и поэтому аналогичные вопросы в отношении Г. Грассмана ждут своего ответа. Быть может, здесь сказывается историческая дистанция, разделяющая обоих ученых: 1809 – год рождения Г. Грассмана, 1848 – год рождения Г. Фреге, 1844 – год выхода основополагающего труда первого, 1879 – год публикации пионерской работы второго («Запись в понятиях»). Тридцать пять лет в середине и второй половине XIX века – не слишком ли много изменили они в науке и ее логико-философском анализе, чтобы на Г. Грассмана было уже трудно смотреть так, как мы смотрим сейчас на Г. Фреге: как на нашего «почти современника»?!

Тривиальный ответ на вопрос о причинах непонимания философами и математиками работ Г. Грассмана и Г. Фреге состоит в том, что оба они в науке опережали свое время. Но ответ этот в обоих случаях требует разного конкретного наполнения. Чтобы получить его в отношении Г. Грассмана, надлежит проанализировать особенности его пути в науке, выявить основные философские установки последнего – установки, взятые в их развитии.

СОБСТВЕННЫЙ ПУТЬ

Предисловие к книге 1860–1861 гг. открывается следующим решительным заявлением Германа Грассмана:

> Предлагаемая разработка арифметики, которая в своих существенных чертах представляет собой совместный труд – мой и моего брата Роберта, – претендует на то, чтобы явиться первой строгой научной разработкой данной дисциплины, более того – на то, что используемый в ней метод, несмотря

[14] Этот «ренессанс» выражается в лавинообразном нарастании литературы о Фреге и в постоянных обсуждениях «фрегевской темы» на международных конференциях по философии, истории и методологии науки.

> на то, что он сильно отличается от обычного, во всех своих существенных чертах есть не просто один из возможных, но *единственно возможный* для строго последовательного и соответствующего существу дела представления этой науки[15].

Еще ранее, в Предисловии к труду «Учение о протяженностях», вышедшему в 1844 г., автор выражал надежду, что в разработанном и представленном в книге «новом анализе» он нашел «единственно отвечающий существу дела метод приложения математики к природе ⟨...⟩. Поэтому у меня созрело решение сделать целью своей жизни разработку, развитие и применение этого анализа»[16]. А далее он решительно подчеркивает право «новой науки быть особой областью знания – право, которое заключается в том, что истина требует признания своей правоты...; ее сущность и бытие заключены в ней самой»[17]. Предисловие, в котором читатель находит эти слова, сохранено Г. Грассманом во втором издании. Более того, в написанном перед смертью (1877) предисловии к этому последнему, Г. Грассман продолжает настаивать на «фундаментальной важности, даже необходимости» своего учения, а причину того, что его труд не нашел отклика у его коллег, видит исключительно в «строго научном, основывающемся на исходных понятиях, способе изложения»[18]. Подобная же уверенность в правоте избранного пути звучит и в предисловии Германа Грассмана к варианту «Учения о протяженностях» 1861–1862 гг.

Были ли рациональные основания для такой уверенности? Базировалась ли на чем-нибудь реальном претензия Германа – а впоследствии и Роберта – Грассмана на то, что им удалось разработать «единственно строго научный» способ развертывания математики и логики? Прежде чем пытаться дать ответ на этот вопрос, выделим *три черты* научной биографии Германа Грассмана, определивших *особый путь* его в науке. Черты эти состоят в том, что Г. Грассман не получил систематического университетского математического образования; что в университете, помимо теологии и филологии, он приобрел основательную *философ-*

---

[15] *Grassmann H.* Arithmetik, 1860–1861, S.V; Werke. Bd. II. Thl 1. S. 205 (курсив наш. – *Б.Б.*).

[16] *Grassmann H.* Ausdehnungslehre 1844. S. VIII; Ausdehnungslehre 1878. S. V–VI; Werke. Bd. I. Thl 1. S. 9.

[17] *Grassmann H.* Ausdehnungslehre 1844. S. XVI; Ausdehnungslehre 1878. S. XIV; Werke. Bd. I. Thl 1. S. 16.

[18] *Grassmann H.* Ausdehnungslehre 1878. S. XV; Werke. Bd. I. Thl 1. S. 17.

скую подготовку и навсегда сохранил склонность к философии; и что он в течение всей жизни находился вне центров «академической» – университетской – науки. При всем том он с первых шагов своей научной работы проявил себя как человек, прокладывающий новые пути.

Рассмотрим подробнее эти черты, используя материалы жизнеописания Германа Грассмана, составленного Ф. Энгелем, и другие биографические источники.

Пункт *первый*. На школьной скамье – в гимназии, где преподавал его отец, – Герман хорошо учился по всем предметам[19]. В университете он посещал лекции по теологии, филологии, философии и психологии, но *не* по математике и физике; в течение многих лет он собирался посвятить себя священнической деятельности и, по свидетельству В. Шлегеля, лишь в 1842 г. окончательно отказался от духовной карьеры. Не слушая университетских курсов по точным наукам, Г. Грассман, естественно, не примкнул ни к какой математической или физико-математической школе. Согласно данным Энгеля, Герман, тем не менее, уже в университете сделал первые шаги в занятиях математикой; он учился сам и в последний период университетского обучения, вырабатывая для себя программу дальнейшей самостоятельной работы по различным предметам, на первое место поставил математику[20].

Вплотную математикой, физикой и «естественной историей» Герман занялся уже в Штеттине, осенью 1830 г.; готовясь к первому экзамену на звание преподавателя, который он сдал в декабре 1831 г., Г. Грассман самостоятельно изучил основные разделы математики, включая дифференциальное и интегральное исчисления. Дальнейшее его математическое «самообразование» оказалось связанным с работой над теорией приливов и отливов, заданной ему в рамках второго государственного экзамена. Анализируя факты, в частности биографический материал о брате, подготовленный Робертом, – материал, в котором Энгель обнаруживает неточности, – автор «Жизнеописания Грассмана» приходит к выводу, что Г. Грассман, возможно, лишь в 1839 г. углубился в трудные области «высшего анализа»; работа над заданной

---

[19] Хотя В. Шлегель и пишет, что Г. Грассман уже в школе выделялся своими успехами в математике и физике, это не подтверждает Ф. Энгель, который говорит, что в гимназии Герман Грассман не проявлял особого интереса ни к какой учебной дисциплине.

[20] См.: *Grassmann H.* Werke. Bd. III. Thl. 2. S. 29.

темой вынуждала его к этому, если только он не освоил эти области раньше.

Таким образом, в математике у Германа Грассмана не было учителей. Правда, имеется одно исключение. Этим исключением, как согласно указывают В. Шлегель и Ф. Энгель, был его отец. Юстус Грассман еще в 1817 г. выступил с работой, в которой отстаивал идею создания новой математической дисциплины – «геометрического учения о комбинациях», которую продолжал развивать в последующие годы; в своих работах он придавал большое значение обоснованию «элементарной» математики и считал важным философское осмысление математического знания[21]. Как считает Ф. Энгель, данные, которыми он располагал, позволяют заключить, что Герман еще студентом усвоил некоторые работы отца, в частности, статью «О понятии и объеме чистого учения о числах»[22], напечатанную в Программе Штеттинской гимназии в октябре 1827 г. (В. Шлегель называет эту статью Programm-Abhandlung), а также статью «О физической кристаллографии (Krystallonomie) и геометрическом учении о комбинациях» (1829)[23]. Этими статьями, а также тетрадями отца Герман пользовался, изучая математику (в частности, учение о комбинациях) в 1830–1831 гг. По-видимому, статья «О понятии и объеме чистого учения о числах» оказала на него заметное влияние; во всяком случае, Энгель придерживается мнения, что она «во многом заставляет вспомнить “Введение” к “Учению о протяженностях” 1844 года, написанное его сыном», в ней, в частности, подчеркивается важность выявления *«внутренней связи между операциями и конструкциями»* (слова Юстуса Г. Грассмана, приводимые Энгелем[24]). Заметим, что именно в упомянутом «Введении» изложена концепция «чистой мате-

---

[21] *Schlegel V.* Hermann Grassmann. Sein Leben... S. 5 ff.

[22] Über den Begriff und Umfang der reinen Zahlenlehre.

[23] *Grassmann H.* Werke. Bd. III. Thl. 2. S. 29, 4–6; ср. также: Bd II. Thl 2. S. 244 ff – «Примечания к статьям Г. Грассмана по математической физике». В связи с этим стоит отметить ту высокую оценку вклада Ю. Грассмана в кристаллографию, которую дал А.И. Вернадский (1903 г.) в предисловии «От автора» в труде «Основы кристаллографии» (ч. 1, вып. 1. М., 1903, с. III–IV). Говоря о важности «идеи о векториальной структуре вещества», русский ученый указал на то, что наиболее полное и глубокое изложение соответствующих идей он встретил «в совершенно и незаслуженно забытых работах Ю. Грассмана»; с развитием этих идей на основе современной ему науки А.И. Вернадский связывал дальнейший прогресс в «теории материи».

[24] *Grassmann H.* Werke. Bd. III. Thl 2. S. 5. Курсив наш. – *Б.Б., Л.Б.*

матики» как «учения о формах», а также идея генетического развертывания математических дисциплин – концепция и идея, выросшие впоследствии в специфически грассмановское (как Германа, так и Роберта) понимание оснований математики как науки.

Пункт *второй*. В Берлинском университете Г. Грассман получил в основном *гуманитарную* подготовку. Из профессоров, которых он слушал, его биографы выделяют Ф. Шлейермахера (Г. Грассман посещал его лекции по диалектике и психологии); прослушал он и читавшийся Г. Риттером (H. Ritter) лекционный курс истории философии. Лекции Ф. Шлейермахера (1768–1834) – известного философа и теолога, одного из инициаторов исторического и текстологического изучения книг Ветхого и Нового заветов – производили на Германа Грассмана особое впечатление. Как свидетельствует Ф. Энгель, Шлейермахер увлекал создателя «Учения о протяженностях» как тогда, когда он занимался преимущественно теологией, так и тогда, когда интересы Германа переместились в область филологии. По собственному признанию Г. Грассмана, лекции Шлейермахера (по диалектике и толкованию Евангелия от Матфея), в которых главное внимание обращалось не на позитивное решение проблем, а на их постановку, пробуждали активную работу мысли; именно они дали первый толчок столь развившемуся у него умению своими силами искать решение новых задач.

Г. Грассман и по окончании университета следил за работами своего учителя. После сдачи первого государственного экзамена в Берлинском университете он в 1840 г. вместе с Робертом изучал незадолго до этого появившуюся «Диалектику» Шлейермахера, а в 1841 г. оба занимались философским учением о языке. В период бурных событий 1847–1848 гг. – о том, в какой мере эти события затронули автора «Учения о протяженностях», мы скажем ниже, когда будем рассматривать жизнь и деятельность его брата Роберта, – Г. Грассман изучал вышедшую в 1845 г. книгу Шлейермахера «Учение о государстве».

Свой труд 1844 г. Г. Грассман предварил «Введением», в котором содержится рассмотрение вопросов философского характера, касающихся природы математики, взаимоотношения ее с философией, – рассмотрение, которое, по замыслу его автора, необходимо для того, чтобы уяснить место «новой науки» в системе знания. Это было сделано Г. Грассманом в полном сознании того, что «среди математиков, – как пишет он в “Предисловии” к этой книге, – все еще существует – и отчасти не без основания –

известная боязнь философских обсуждений математических и физических вопросов; и действительно, большинство исследований такого рода, как они ведутся Гегелем и его школой, отличаются неясностью и произвольностью, уничтожающими все их плоды»[25].

Из краткого жизнеописания старшего брата, сделанного Робертом вскоре после смерти Германа и использованного Ф. Энгелем, известно, однако, что Герман вместе с братом и друзьями в 1846 г. изучал гегелевскую философию. Авторы этих строк не располагают данными о том, изменил ли Г. Грассман после этого свое мнение о Гегеле. Однако известно двойственное отношение к Гегелю его брата, проявившееся в сочинениях последнего, изданных начиная с 1872 г. В одном из главных своих трудов – «Учении о науке», говоря об отыскании «противоположностей в единстве и единства в противоположностях», Роберт Грассман отдает должное методу Гегеля (хотя диалектическое учение Шлейермахера оценивает как более глубокое). Вместе с тем в своей «Логике» 1872 года, о которой мы будем говорить отдельно, он не раз пользуется случаем, чтобы подвергнуть критике гегелевские взгляды за их несоответствие требованиям формальной логики. Можно полагать, что взгляды Германа (прямо писавшего о своем участии в разработке основных положений той системы логики, которая в развитой форме была изложена Робертом) здесь совпадали со взглядами брата.

Но в целом вкус к философии и сознание важности философских рассмотрений для уяснения истоков математического познания сохранился у Г. Грассмана на всю жизнь. Так, признавая – в «Предисловии» ко второму варианту «Учения о протяженностях» – трудность, «которую, по мнению всех математиков, суждения которых время от времени до меня доходили, доставляет изучение упомянутого труда (1844 года. – *Б.Б.*), из-за его, как они считают, более философской, нежели математической формы»[26], – почему он и произвел его переработку, придав ему «евклидову» форму, – Г. Грассман, тем не менее, вполне определенно высказывается о предпочтительности философского облика первого варианта; в «Предисловии» к изданию 1878 г. об этом говорится совершенно недвусмысленно:

---

[25] *Grassmann H.* Ausdehnungslehre 1844. S. XV; Ausdehnungslehre 1878. S. XII; Werke. Bd. I. Thl 1. S. 15.

[26] *Grassmann H.* Die Ausdehnungslehre 1862. S. III; Werke. Thl 2. S. 3.

> В этом втором издании я оставил без изменения текст первого издания ⟨...⟩, так как представленное в нем изложение заключается в последовательном проведении одной-единственной основной идеи, а способ ее разработки я считаю полностью оправданным, и он, конечно, больше говорит философски образованному человеку, нежели более удобный для математиков способ изложения «Учения о протяженностях» 1862 года[27].

В труде 1844 года философски ориентированным было прежде всего «Введение», которое представлено в настоящей книге: заметим, что тенденция к включению математики в более широкий методолого-гносеологический контекст стала явственно проявляться лишь в конце XIX – начале XX века (вспомним Г. Кантора, Г. Фреге, А. Пуанкаре, Д. Гильберта и Э.Л. Брауэра с их обширными философскими и логическими интересами). Для науки эпохи Г. Грассмана это было достаточно непривычным.

Пункт *третий*. В течение всей своей творческой жизни Г. Грассман, этот, говоря словами Ф. Клейна, математик, отмеченный «печатью высшей оригинальности с ярко выраженными философскими интересами»[28], служил преподавателем в средних учебных заведениях Штеттина, где вел самые различные предметы. Так, в Школе им. Фридриха-Вильгельма он преподавал немецкий и латинский языки, естественную историю, религию, химию и минералогию (в этих условиях он и закончил свой главный труд – «Учение о линейных протяженностях»). Когда в 1852 г. Г. Грассман стал профессором Штеттинской гимназии, занятость его еще более возросла. Как пишет его биограф, с Иванова дня (24 июня) 1852 г. он стал преподавать математику и физику (в старших классах), имея по 18–20 часов учебных занятий в неделю.

Большая педагогическая нагрузка приводила к недостатку времени для научной работы. Кроме того, в Штеттине трудно было следить за текущей математической и философской литературой, так как многие издания не доходили до этого провинциального города. В Штеттине не было университета (да и полных средних школ, как особо подчеркивает В. Шлегель, до 1869 г. в нем было всего две), и вокруг Г. Грассмана не было людей, с которыми он мог бы делиться своими научными идеями. Рядом с ним был только брат Роберт.

В труде Ф. Энгеля «Жизнеописание Грассмана» мы находим выразительную характеристику той роли, которую играл Роберт

---

[27] *Grassmann H.* Die Ausdehnungslehre 1878. S. XVIII; Werke. Bd. I. Thl. 1. S. 20.
[28] *Клейн Ф.* Лекции о развитии математики... С. 196.

в научном развитии брата. Биограф подчеркивает никогда не ослабевавший интерес младшего брата к идеям Германа, те «побудительные импульсы, которые он давал своему брату в силу оригинальности своего мышления и благодаря остроте мысли, с которой он умел выискивать логические изъяны в дефинициях и слабые пункты в доказательствах»[29]. Однако по образу своего мышления Роберт стоял к Герману «слишком близко для того, чтобы стать для него тем, в ком Грассман более всего нуждался, – критиком-специалистом одного с ним уровня»[30].

Разумеется, Г. Грассман понимал отрицательные стороны своей отдаленности от научного мира и предпринимал попытки ее преодолеть. Для этого был один путь – получить, как тогда выражались, академический статус, т.е. стать профессором какого-либо университета, благодаря чему у него появилась бы возможность обсуждать свои идеи и результаты в кругах специалистов и создать собственную научную школу. Однако просьба о предоставлении места преподавателя математики или физики в одном из прусских университетов, направленная Г. Грассманом в Министерство культов Прусского королевства, была в 1848 г. отклонена из-за неблагоприятного заключения, которое Э. Куммер дал о его работах. Неудачей окончилась и вторая (в 1869 г.) попытка Г. Грассмана получить университетскую профессуру (в Грейфсвальде).

«ЧИСТОЕ УЧЕНИЕ О ФОРМАХ» И «ГЕНЕТИЧЕСКАЯ» УСТАНОВКА В МАТЕМАТИКЕ И ЛОГИКЕ

На титульном листе книги Г. Грассмана 1844 года значилось не только «Учение о линейных протяженностях», но и утверждание, что эта «новая ветвь математики» разработана с ориентацией на приложения к другим отраслям этой науки, а также к таким физическим дисциплинам, как статика, механика, теория магнетизма и кристаллография, название же «Наука об экстенсивных величинах, или Учение о протяженностях» (с добавлением – «часть первая – учение о линейных протяженностях») значилось на контртитуле книги. Напрасно стали бы мы искать в научной литературе того времени понятия об «интенсивных» и «экстенсивных» величинах, да и понятие «протяженности» в том смысле,

---

[29] *Grassmann H.* Werke. Bd. III. Thl. 2. S. 132–133.
[30] Ibid. S. 123.

который в него вкладывал Г. Грассман. Дело в том, что автор рассматриваемой теории поставил задачей не только создать новую отрасль математической (и логической) науки, но и перестроить ее основы, руководствуясь собственным представлением о предмете математики, согласно которому математика есть область знания, родственная философии.

Книга открывалась «Введением», раздел А которого назывался «Обоснование понятия чистой математики»; в этом разделе излагалась Грассманова концепция математики как «чистого учения о формах» в ее сопоставлении с философией и «реальными» науками. Общий смысл, который Герман Грассман вкладывал в свое понимание математики, можно истолковать как генетический подход, который в «учении о величинах» его брата получил определенное конструктивистское наполнение.

Математика трактуется Г. Грассманом наряду с философией как «формальная» наука; отличие наук «формальных» от наук «реальных» усматривается в том, что первые изучают не реальность, независимую от мышления, а то, что устанавливается (полагается, порождается, строится) самим мышлением; поэтому рассуждения в философии и доказательства в математике замыкаются в сфере чистых комбинаций мыслительных актов. Предметом философии выступает «всеобщее», а в математике – «особенное»; при этом то и другое полагается мышлением; «чистая математика есть... наука о бытии *особенного* как *возникающего* благодаря мышлению». «Бытие особенного» Г. Грассман называет *формой*, точнее *мыслительной формой* (формой мышления – Denkform) – формой, взятой в отвлечении от всякого конкретного содержания.

Эта философская терминология Г. Грассмана, невольно заставляющая современного читателя вспомнить диалектику Гегеля, не должна заслонять от нас того реального содержания, которое стояло за грассмановскими рассуждениями о «всеобщем» и «особенном». Если пользоваться языком исследователей оснований математики наших дней, пишущих об интуиционизме XX столетия, и самих интуиционистов[31], то можно сказать, что Г. Грассман понимал математику как *науку об умственных построениях* – построениях, находящихся в определенных отношениях к реальности; связи математики с прикладными областями, согласно его взгляду, осуществляются через науки, основанные на *исходном созерцании* (Grund-Anschauung) *пространства и вре-*

[31] *Гейтинг А.* Интуиционизм. Введение / Пер. с англ. Под редакцией и с комментариями А.А. Маркова. М.: Мир, 1965.

мени (а благодаря последним – и движения): через геометрию и механику. Здесь можно видеть влияние философии И. Канта, хотя сам Г. Грассман на кёнигсбергского философа и не ссылается. Впрочем, не исключено, что штеттинский мыслитель пришел к этим идеям самостоятельно. Последующее рассмотрение (в разделе В «Введения») способов умственного построения – «становления благодаря мышлению», как выражается Г. Грассман, – приводит его к понятиям *непрерывной и дискретной форм*; в последнем случае имеет место двойной акт: полагания (установления) чего-то мышлением и связывания (сочленения) установленного: для непрерывной формы (величины в узком смысле, как ее здесь называет Г. Грассман) полагание и сочленение сливаются. Применение к этим двум формам понятий об *одинаковом* (равном) и *различном* приводит к понятию о четырех типах форм (и к соответствующим ветвям «чистого учения о формах»).

Хотя читатель найдет соответствующие идеи Г. Грассмана в публикуемом ниже переводе его текста, мы все же приведем здесь его слова:

> А именно, сначала дискретная форма разделяется на число и комбинацию (соединение [Gebinde]). *Число* есть алгебраическая дискретная форма, т.е. объединение того, что полагаемо как одинаковое; *комбинация* есть комбинаторная дискретная форма, т.е. объединение того, что полагаемо как различное. Науки о дискретном, стало быть, это *учение о числах и учение о комбинациях* (учение о соединениях [Verbindungslehre]).
>
> Подобным же образом непрерывная форма, или величина, разделяется на алгебраически-непрерывную форму, или *интенсивную величину*, и комбинаторно-непрерывную форму, или *экстенсивную величину*. Стало быть, интенсивная величина возникает посредством созидания одинакового, а экстенсивная величина, или *протяженность*, – посредством созидания различного. Первая, в качестве переменной величины, составляет основу учения о функциях дифференциального и интегрального исчисления, вторая – основу учения о протяженностях.

Конечно, эти дистинкции не отличаются ясностью: данная классификация форм и ветвей математики и логики более четко была развита Робертом Грассманом; она будет освещена нами ниже. Здесь достаточно подчеркнуть *генетический* подход автора «Учения о линейных протяженностях»: в каждой из четырех «форм» мы, по Г. Грассману, имеем дело с некоторым *процессом порождения*. Непосредственно в этом еще нельзя усмотреть конструктивистской установки в современном смысле (так как у Г. Грассмана не было речи о каком-либо, как мы сказали бы теперь, эффективном, «машинообразном» способе порождения). Но был налицо исходный пункт, от которого двигались

Г. и Р. Грассманы в своей рекурсивно развертывавшейся арифметике и Роберт Грассман в своем «учении о величинах» и логической теории, в явном виде предвосхищавшими определенные черты упомянутой установки.

Всем четырем ветвям математики, согласно замыслу Г. Грассмана, должно быть предпослано «общее учение о формах». С очерка этого учения и начинаются переводы текстов штеттинского мыслителя. В труде 1844 гг. он *следует* за «Введением», непосредственно предваряя изложение «учения о линейных протяженностях». В этом разделе книги Г. Грассмана мы обнаруживаем основные идеи, систематически и детально разработанные впоследствии в «учении о величинах» Р. Грассмана.

«Общее учение о формах» было развито Г. Грассманом до его сотрудничества с братом. Совместная работа с Робертом привела их к детальной разработке данной концепции.

РОБЕРТ ГРАССМАН: УЧЕНЫЙ И ИЗДАТЕЛЬ, ОБЩЕСТВЕННЫЙ ДЕЯТЕЛЬ И ПОПУЛЯРИЗАТОР НАУКИ

Роберт Грассман сам рассказал о своем жизненном пути, образовании, службе в качестве преподавателя, о своей научно-литературной, политической и издательской деятельности. Эта автобиография содержится в обширном, переходящем со страницы на страницу подстрочном примечании в «Предисловии к "Системе знания"», помещенном в части I первого тома этого главного сочинения Р. Грассмана. Высказывания автобиографического характера, касающиеся научного развития, можно найти в авторских предисловиях также и к другим книгам Р. Грассмана. Добротным источником сведений о нем служит биография его старшего брата, в которой Ф. Энгель приводит интересные сведения о совместной научной и общественной деятельности братьев, выразительно характеризуя личность Роберта[32].

[32] Иных материалов о Р. Грассмане нам обнаружить не удалось. Нет его имени во многих справочных изданиях. Правда, в «Большом Брокгаузе» можно найти сведения о Р. Грассмане и выбранную библиографию его трудов (см., например, Brockhaus' Konversations-Lexikon. 14. Aufl. Bd. 8. Leipzig: F.A. Brockhaus, 1908, S. 209; der Große Brockhaus. Fünfzehnte, völlig neubearbeiete Auflage von Brockhaus' Konversation-Lexikon. F.A. Brockhaus/Leipzig. Bd. 7. 1930. S. 581. Правда, статья о Р. Грассмане в этой энциклопедии от издания к изданию сокращалась в объеме; а в издании 1969 г. она уже отсутствует.

Зигмунд Лудольф *Роберт Грассман* родился 8 марта 1815 г. в Штеттине и умер там же 14 августа 1901 г. Первые детские годы Роберт провел в семье отца, но с трехлетнего возраста (по причинам, о которых Р. Грассман не говорит) воспитывался в доме своего дяди – тайного советника, директора Штеттинской духовной семинарии Генриха Готхюльфа Грассмана. Среднее образование – с 1825 по 1834 г. – он, как и старший брат, получил в гимназии, которой руководил его отец, а академическое – с 1834 по 1838 г. – в университетах Бонна и Берлина. Здесь Р. Грассман изучал философию, естественные науки (в частности, физику) и протестантское богословие; в годы учения он предпринял большое путешествие по Западной Европе. В 1838 г. Роберт Грассман выдержал в Берлине государственный экзамен по теологии и возвратился в Штеттин. Начав преподавательскую деятельность, он вместе с тем принялся за изучение «высшей» математики. В 1838–1839 гг. он служил в саперных войсках и разработал электрический взрыватель для мин, который был принят на вооружение в прусской армии. В 1839 г. он был уволен с военной службы, сдав экзамен на звание офицера саперных войск. В следующем году Роберт выдержал в Грейсвальде второй экзамен и получил диплом *facultas docendi* с правом преподавания математики, физики, философии и теологии в двух старших классах, а остальных предметов (греческий, латинский и французский языки, химия, ботаника и зоология) – в средних классах гимназии. С 1841 по 1852 г. он служил преподавателем в средних школах Штеттина. В автобиографии Р. Грассман отмечает, что в 1846 г. он основал в Штеттине научное общество (Wissenschaftliches Verein), в котором в 1846–1848 гг. читал лекции на научные темы. Он пишет о себе:

> В это время автор усиленно занимался изучением наук. Еще будучи учеником старших классов гимназии, он от двух до трех часов ежедневно посвящал самостоятельным занятиям; у него сохранились шесть томов форматом в четвертую долю листа, содержащих материалы тогдашних занятий по математике и физике. Потом, когда он готовился к экзаменам (государственным, на право преподавания в гимназии. – *Б.Б., Л.Б.*), он сделал выписки из многочисленных трудов. Будучи преподавателем, он продолжил эту работу.

В ходе занятий лингвистикой и языками (Р. Грассман, в частности, штудировал Якоба Гримма) он подготовил руководство по немецкому языку и краткую латинскую грамматику; в результате занятий физикой он составил брошюру соответствующего содержания; занятия географией привели к составлению учебного пособия по этой дисциплине, а также географического атласа.

Однако основное внимание, по свидетельству Р. Грассмана, он уделял философии, изучая Аристотеля и Платона, Гегеля и Шлейермахера.

Оба брата в различных формах сотрудничали всю жизнь, о чем мы еще будем говорить. Здесь отметим лишь, что упомянутое руководство по родному языку – «Указание по начальному обучению немецкому языку», выпущенное Р. Грассманом в 1843 г. и переизданное (уже в расчете на продажу на книжном рынке) в 1848 г. (в 1876 г. последняя была выпущена четвертым изданием[33]), было написано совместно с Германом. Взаимодействие на научно-литературной почве продолжалось и впоследствии. Книга Г. Грассмана «Немецкие названия растений» (1870)[34], как отмечает в предисловии ее автор, явилась плодом многолетнего труда, в котором участвовал и Роберт Грассман.

О совместной работе братьев в области математики и логики мы будем говорить ниже, а сейчас скажем несколько слов об участии Германа и Роберта Грассманов в общественной жизни Германии конца 40 – начала 50-х годов. В период революционной ситуации 1847–1848 гг. и движения за воссоединение Германии братья выступали за объединение германского государства под властью Гогенцоллернов. В 1848 г. они начали издавать – в качестве редакторов – «Германский еженедельник по вопросам государства, церкви и народной жизни», который вскоре сменила ежедневная «Северогерманская газета»; в этих изданиях они выступали также в качестве авторов многих публиковавшихся в них статей. Газета печаталась в типографии, которая в том же году была основана братьями. Однако Г. Грассман постепенно отошел от политики и издательского дела, и Роберт стал единственным редактором газеты и владельцем типографии. Чтобы иметь время для политической и издательской деятельности, он оставил службу (в то время Р. Грассман был первым – по рангу – преподавателем Полной средней женской школы Штеттина). Постепенно типография, а вместе с ней издательство и книготорговля, организованные Робертом, стали довольно значительными. Со временем Р. Грассман стал в родном городе видной фигурой, возглавил городскую партию консервативного направления. Он выпускал в

---

[33] *Grassmann H.* Zeitfaden der deutschen Sprache, mit zahlreicher Uebungen versehen. 4. Akfl. für den öffentlichen Buchhandil. Stettin. Druck und Verlag von R. Grassmann, 1876, 78 S.

[34] *Grassmann H.* Deutche Pflanzennamen. Stettin, 1870. Druck von R. Grassmann, VII, 288 S.

Штеттине газеты, составлял и издавал школьные учебники по разным предметам (включая ветхо- и новозаветную историю). Все сочинения самого Роберта – а написал он их великое множество – выходили в его издательстве и печатались в его типографии. На всех них стоит: «Типография и издательство Р. Грассмана» (или только «Типография Р. Грассмана»).

Эта деятельность не могла, конечно, способствовать углублению Роберта Грассмана в науку, тем более что он нередко отвлекался в такие сферы, как переработка сборников религиозных песнопений (выполненная им по заказу Евангелической консистории Померании) или организация печатания древнееврейских талмудических книг (предназначенных для продажи за границей). И в этих-то условиях в голове Р. Грассмана возник неосуществимый силами одного человека замысел синтеза всего того, что представлялось входящим в современное ему знание – от математики и физики до философии и теологии. Оторванность от живого пульса научной жизни – то, от чего страдал его старший брат, – привела Роберта к самонадеянной попытке «строго научной», как он любил выражаться, перестройке всей «системы знания». Этот претенциозный замысел следует оценивать с учетом личности Р. Грассмана, которую Ф. Энгель характеризует следующим образом.

> Роберт от природы был одарен, наверное, такими же большими способностями, что и Герман, но не обладал его скромностью, как ни обаятельно любезен он мог быть, и, пожалуй, его основательностью. Характерная для Германа черта, состоявшая в том, что он все старался переделать по-своему, представить все в форме, которая отвечала бы его устремлениям, у Роберта была выражена еще сильнее, в до странности преувеличенной форме. Если Куммер уже о Германе говорил (в отзыве на работы Г. Грассмана, повлекшем отказ властей в просьбе последнего о предоставлении ему профессуры в университете. – *Б.Б., Л.Б.*), что у него имеется очень вредная манера проявлять оригинальность, изобретая новые слова, то что он сказал бы о Роберте! Будучи владельцем большой типографии, Роберт впоследствии мог сразу же печатать все, что выходило из-под его пера, и создал целую библиотеку; однако его труды, напичканные странными новыми словами, насыщенные как оригинальными, так и абсурдными идеями, вряд ли привлекали внимание[35].

Р. Грассману принадлежат книги по философии, логике, математике, физике, химии, биологии, геологии, географии, теории государства, правоведению, этике, эстетике, истории, теологии... Он выпускал труды научного характера, научно-популярные

---

[35] *Grassmann H.* Werke. Bd. III. Thl. 2. S. 132.

книги и пособия для средних учебных заведений разного уровня. Он писал работы на «темы дня» (таковы, например, его книги о Франко-Прусской войне 1870–1871 гг."[36] и о О. Бисмарке[37]), выпускал полемические антикатолические памфлеты.

Как явствует из автобиографии Р. Грассмана, своим научным дебютом он считал «Учение об атомах» (1862). Научные публикации, последовавшие за этой книгой, описываются им в следующих словах:

> В 1872 г. автор переиздал свою «Атомистику» в полностью переработанном виде[38]. Вскоре, в том же году, последовало первое издание «Учения о формах, или Математики», – учения, строившегося с помощью только формул 〈...〉. В 1873 г. последовала «История Земли, или Геология»[39], а в 1875 и 1876 гг. – «Учение о науке, или Философия» в четырех книгах. Последние должны были служить введением в «Систему знания»; в первой книге дается введение в философию, во второй – в естествознание, в третьей – в науки о государстве, в четвертой – в науки о Боге, и каждая книга содержит сжатый очерк отдельных наук. Этот труд в 1882 г. появился в новом издании под названием «Введение в систему знания»[40].

В 1881–1890 гг. Р. Грассман осуществил, наконец, замысел своей жизни – выпустил десятитомную «Систему знания» (отдельные тома он потом издавал в виде самостоятельных книг с измененными титульными листами). В 1890 г. он опубликовал объемистое сочинение «Логика и другие логические науки» (пе-

---

[36] *Grassmann R.* Der Krieg von 1870–1871 zwischen Frankreich und Deutschland. 2. Aufl., Stettin. Druck und Verlag von R. Grassmann, 1873. 300 S.

[37] *Grassmann H.* Fürst Bismarck Ein Lebensbild. Stettin, 1876. 333 S.

[38] Имеется в виду книга: *Grassmann R.* Die Lebenslehre oder die Biologie. Erstes Buch. Die Körperlehre oder die Atomislik. Stettin, 1872. 130 S.

[39] *Grassmann R.* Erdgeschichte oder Geologie. Stettin. 1873. 273 S. (контртитул: Die Weltwissenschaft oder Physik.Thl. 2). Эта книга представляла собой вторую часть «Учения о мире, или Физики»; первой частью была «Атомистика».

[40] *Grassmann R.* Vorwort zum Gebäude des Wissens. S. XXIV в книге: *Grassmann R.* Das Gebäude des Wissens. Bd. I: Die Wissenslehre oder die Philosophie. Tl. 1. Stettin, 1890. (контртитул); Die Wissenslehre oder die Philosophie. Tl. 1: Das Verstandeswissen oder das formale Wissen, umfassend die auf die Philosophie vorbereitenden Wissenschaften (титульный лист; на обложке книги: Das Gebäude des Wissens. Tl. 1, Hälfte 1: Philosophie, XXXI (Vorwort zum Gebäude des Wissens), IV, 120 S. (Die Geschichte der Philosophie...), XII, 216 S. (Die Sprachlehre, 50 S. (Das Formelbuch der Denklehre).

Выходные данные второй части имели вид: *Grassmann R.* Die Formenlehre oder Mathematik. Stettin. 1872 (титульный лист; на контртитульном листе значится: Die Wissenslehre oder Philosophie. Zweiter Ergänzungstheil. Die Formenlehre; с. 16 занимает новый титульный лист: Die Grösenlehre. Erstes Buch der Formenlehre oder Mathematik, 52 S.).

реизданное в 1900 г. под кратким названием «Логика»). Но все эти труды – исключая единственное сочинение: труд 1872 года «Учение о понятии, или Логика», составивший вторую книгу его «Учения о формах, или Математики», – так и не привлекли внимания.

Но заслуживают ли сочинения Роберта Грассмана столь решительного их игнорирования? Нет сомнения в том, что с точки зрения научной ценности творения автора «Системы знания» были крайне разнородны. Исследование, проведенное Г.И. Малыхиной[41], которая изучала онтологические, гносеологические, методологические и логические стороны грандиозной конструкции Р. Грассмана и работы авторов этих строк[42], говорят скорее в пользу отрицательного ответа на поставленный выше вопрос. Во всяком случае у Р. Грассмана были и такие методологические идеи, которые сейчас выглядят достаточно свежо.

Построение энциклопедической системы человеческих знаний, пишет Г.И. Малыхина, предполагает, согласно Р. Грассману, наличие развитого метода научного исследования. В трактовке Р. Грассмана научный метод образует триаду, сочетающую опытный источник знания, математические вычисления и критический философский анализ выдвигаемых положений, что предполагает синтез содержательного научного мышления и требований формальной строгости[43].

У Р. Грассмана были, по-видимому, и отдельные естественнонаучные «находки». В 1926 г. Э.О. Липман опубликовал заметку[44], в которой на основе изучения труда Р. Грассмана «Метафизика»[45], выпущенного в 1881 г. (в этом труде получили дальнейшее развитие положения, выдвинутые в упоминавшемся выше сочинении Р. Грассмана 1862 г.), пришел к заключению, что в этом

---

[41] *Малыхина Г.И.* Логические исследования Роберта Грассмана. Диссертация на соискание ученой степени кандидата философских наук. Л., 1981.

[42] Начиная с работы: *Бирюкова Л.Г.* «Учение о величинах» Роберта Грассмана: конструктивный характер и проблема отношения к естественному языку // Логический анализ естественных языков (материалы II Советско-финского коллоквиума по логике). М., 1979. С. 3–7.

[43] *Малыхина Г.И.* Логические исследования Роберта Грассмана. С. 9.

[44] *Von Lippmann E.O.* R. Grassmann als Verkünder "neuerer" physiko-chemischer Ideen // Zeitschrift für physikalischen Chemie. Stöchiometrie und Vernandschaftslehre. Bd. 119, Tl. 3 und 4. Leipzig, 1926. S. 275–276.

[45] *Grassmann R.* Die Weltwissenschaft oder die Physik. Thl. I: Die Lebenslehre oder die Biologie, Buch 1: Das Weltleben oder die Metaphysik. (Das Gebäude des Wissens. Bd. III. 1882). Stettin. 1881, XIII, XII, 350 S. (На обложке: Das Weltleben oder die Metaphysik, выходные данные те же).

труде его автор выступил провозвестником позднейшей атомно-молекулярной теории. Однако, будучи – так же как и его старший брат – глубоко религиозным человеком и поэтому рассматривая мир как божественную эманацию, Р. Грассман должен был согласовывать картину мира, как она рисовалась современной ему наукой, с теологией, и в этом согласовании он приходил к решениям, которые не могли принять ни атеисты, ни, пожалуй, многие богословы (например, в сочинении «История Царства Божия по данным строго научного исследования»[46] Р. Грассман «распределял» этапы космологической, геологической и органической эволюции по библейским «дням творения»).

НАУЧНОЕ СОТРУДНИЧЕСТВО БРАТЬЕВ ГРАССМАНОВ

Заключительные строки автобиографического примечания, помещенного на страницах «Предисловия к "Системе знания"», звучат как мольба непризнанного мыслителя. Имея в виду десять томов своего главного сочинения, Р. Грассман в труде 1890 года писал:

> Автор просит уважаемых читателей и современников прочесть и оценить эти труды. Он призывает ученых указать – там, где он заблуждается, – на его ошибки и опровергнуть его взгляды; он охотно примет во внимание каждое возражение; однако он просит господ ученых также откровенно признать те истины, которые открыты им и не могут быть опровергнуты.

Еще более трагично звучали слова, написанные Робертом Грассманом раньше, в 1881 г., в предисловии, помещенном в томе III «Системы знания». С горечью констатируя, что семью Грассманов в науке преследует своего рода злой рок – им отмечена не только научная судьба брата Германа, но и его отца, Ю. Грассмана, кристаллографическая теория которого была признана лишь посмертно, он просит «господ ученых» – философов, математиков, физиков, не ожидая смерти автора, прочитать его труд; «пусть они не замалчивают последний, а дадут ему оценку: ясную оценку. Автор ведь не юноша – он старец, предлагающий здесь плоды труда, на который ушла целая жизнь»[47].

---

[46] *Grassmann R.* Die Geschichte des Gottesreiches nach streng wissenschaftlichen Forschung. Bd. I. Stettin. Druck und Verlag von R. Grassmann, 1900. 886 S.

[47] *Grassmann R.* Vorwort zum Weltleben oder der Metaphysik. S. IX.

«Господа ученые» остались глухи к этому призыву. Но если научный мир почти полностью прошел мимо штеттинского «энциклопедиста», – исключение составляло лишь «Учение о понятиях» Р. Грассмана, обратившее на себя внимание тех, кто разрабатывал математическую логику (что в 1890 г. и не преминул отметить Р. Грассман, утверждая, что его «Логика» 1872 г. «нашла отклик у математиков Европы и Америки»[48]), – то этого нельзя сказать о его старшем брате. Сотрудничество Германа и Роберта Грассманов – это фактор, без учета которого трудно уяснить то ценное, что есть в их наследии, относящемся к логике и философии математики.

На с. 133 биографического труда о Г. Грассмане Ф. Энгель приводит следующее место из письма, которое 10 марта 1896 г. отправил ему Роберт, получивший от Энгеля обе части тома I «Собрания сочинений по математике и физике» Германа Грассмана:

> Мы, два брата, были связаны крепчайшей дружбой и много лет подряд ежедневно часами работали вместе, то в области языкознания, то – философии, то – математики и физики... Позже мы разделили работу, и каждый пошел своим путем; однако и в это время наше общение продолжалось.

Как эта совместная работа и общение развивались на философско-математической и логической почве? Помимо упоминавшихся выше источников, представление об этом можно получить из «Предисловия к "Учению о мышлении"» и «Предисловия к "Учению о величинах, основной части учения о мышлении"», входящих во вторую половину тома I «Системы знания», а также из Предисловия к «Логике» 1890 г.[49] Картина складывается следующая.

Сотрудничество братьев началось в конце 1846 г. и активно продолжалось в 1847 г., затем последовал восьмилетний перерыв, и совместная работа возобновилась в 1855–1856 годах. Исходным пунктом служили идеи Г. Грассмана, изложенные в труде 1844 года. Исследования 1847 года велись на основе отдельных ветвей «учения о формах» – арифметики, учения о протяженностях, а также комбинаторики; как пишет Р. Грассман, братья старались обобщить операции, имеющиеся в этих «ветвях», с тем, чтобы подвести под них общее основание (которым потом стало «учение о величинах»). Материальным свидетельством этой работы

---

[48] *Grassmann R.* Vorwort zum Gebaude des Wissens. S. XXIV.

[49] *Grassmann R.* Die Logik und die andern logischen Wissenschaften. Stettin, 1890.

являются, по-видимому, некоторые рукописи, фигурирующие в приводимом Ф. Энгелем[50] «Обзоре рукописного наследия Грассмана в областях математики и физики»[51]. Под рубрикой «Общие вопросы» там упомянуты шесть материалов, относящихся к «Общему учению о формах», причем относительно первых двух «разработок» (Bearbeitung) отмечено: «совместно с Робертом»; «третья разработка», имеющая заголовок «Всеобщее учение о формах», датирована 1846 годом, т.е. временем совместной работы братьев. Можно полагать, что и остальные материалы (например, фигурирующий под номером 1.4 материал «Соединения [Verknüpfungen]. Формы соединения трех и более величин») разрабатывались при участии Роберта.

Однако труд по разработке общей основы выделявшихся братьями основных «ветвей» математики тогда не дал результатов, которые удовлетворили бы Грассманов: как пишет Роберт, они не смогли прийти к формулировке законов, которые показались бы им плодотворными. Поэтому они отложили в сторону «учение о формах» и принялись за «учение о числах» и «учение о протяженностях»[52].

Здесь обращает на себя внимание тот факт, что последующее продвижение, в продолжение труда 1844 г., Германа Грассмана в «учении о протяженностях», завершившееся публикацией варианта 1862 г., производилось в ходе научного взаимодействия с Робертом. Р. Грассман пишет, что дальнейшая разработка этой ветви «учения о формах» «была осуществлена в 1847, 1855 и 1856 годах совместно моим братом и мною; вслед за этим мой брат разработал и издал в 1862 г. "Учение о протяженностях"».

В 1847 г. братья работали также над арифметикой, которую они строили на совершенно новых для того времени началах – об этом мы будем говорить подробно. Во второй период к работе над «учением о протяженностях» и арифметикой присоединилась разработка математической логики и комбинаторики. В «Предисловии к "Учению о мышлении"» Р. Грассман говорит о своем труде «Учение о формах, или Математика» (1872), что входящие в него «Логика» и «Учение о комбинациях» «содержат все предложения (теоремы. – *Б.Б., Л.Б.*), полученные моим братом и мной в 1855 и 1856 годах, к которым я потом, в 1871 году, добавил даль-

---

[50] *Grassmann H.* Werke. Bd. III. Thl. 2. S. 373 ff.

[51] Это наследие осталось недоступным для авторов этой статьи.

[52] *Grassmann R.* Die Grösenlehre, der Grundstamm der Denkenlehre. Stettin, Druck und Verlag von R. Grassmann, 1890. S. VI–VIII.

нейшие предложения»; ср. также прямое высказывание Г. Грассмана о том, что содержание «Логики» его брата, выпущенной в 1872 г., было совместно разработано ими обоими[53]. Вместе с тем Роберт Грассман был настолько в курсе той теории, которую создавал его брат под названием «учения о протяженностях» (и, как следует из его собственных слов, принимал участие в ее разработке), что дважды – при жизни брата, в 1872 г., и после его смерти, в 1891 году[54], излагал теорию «экстенсивных величин», причем последний вариант был переиздан в издательстве Р. Грассмана уже после его смерти – в 1904 г.

О формах сотрудничества братьев представление можно составить на основании свидетельств Роберта. Из краткого жизнеописания брата, сделанного Робертом вскоре после смерти Германа, отрывок из которого приводит Ф. Энгель, мы узнаем, что Герман осенью 1846 года

> приступил совместно с братом Робертом к строгому пересмотру математических понятий. Оба ставили задачу достичь наибольшей строгости, ничего не определять [erklaren] дважды, но и не оставлять не определенным либо не уясненным. Они применили при этом плодотворный метод, состоявший в том, что одну неделю сообщение делал один из братьев, другой же подвергал его критике, а на следующей неделе, наоборот, сообщение делал второй брат, а первый его критиковал. Таким способом они совместно проработали учение о комбинациях и учение о числах, учение о протяженностях, уравнения и ряды, а также логику и пришли к решению, что Герман должен самостоятельно разработать и опубликовать «Учение о числах» и «Учение о протяженностях», а Роберт – «Логику» и «Учение о комбинациях»[55].

Герман Грассман первым выполнил взятую на себя задачу. Как мы отмечали, он уже в 1860–1861 гг. выпустил «Арифметику», а в 1861–1862 гг. – второй вариант «Учения о протяженностях». Роберт же, занятый политической и издательской деятельностью, вернулся к научным занятиям лишь в 1870 г. Что же имел в виду Р. Грассман, говоря о «строго научном методе»?

---

[53] *Grassmann H.* Die Ausdehnungslehre 1844. S. XXII; Werke. Bd. II. Thl. 1. S. 23.

[54] *Grassmann R.* Die Ausdehnungslehre oder die Wissenschaft von den extensiven Grösen in strenger Formel-Entwicklung. Dritten Zweig der Formenlehre oder Mathematik. Stettin. Druck und Verlag vor R. Grassmann, 1891, IX, 132. Обращаем внимание на то, что эта публикация Р. Грассмана об «учении о протяженностях» больше по объему, нежели книжка 1872 г.: в последней было всего 26 с. Примечательно, что упомянутый труд Р. Грассмана 1891 года издания А.Н. Уайтхед приводит на втором месте (после книги Крафта, о которой мы уже говорили) в списке «важных и интересных работ», посвященных математической теории Г. Грассмана (см.: *Whitehead A.N.* A Treatise on Universal Algebra with Applications. Cambrige: At the University Press, 1898).

[55] *Grassmann R.* Grassmansches Familienbuch... S. 132.

Заметим, что о «строгой научности» своих сочинений, о применении им «строго научных доказательств», «строго научного метода», «строго научной формы» изложения Р. Грассман говорит почти во всех своих книгах, по многу раз повторяя эти слова как заклинания. В большинстве случаев эта «научность», противопоставляемая тому, что делали профессионалы-специалисты в своих областях, носила произвольный, а нередко фантастический характер. Однако в применении к математике и логике тезис о «строго научном методе» имел вполне конкретное – и, как мы увидим, достаточно рациональное – основание. В чем же оно состояло?

Вернемся к «генетическому», как мы его назвали, замыслу построения «чистого учения о формах», сформулированному во вводных разделах «Учения о линейных протяженностях» Г. Грассмана, и резюмируем его в двух пунктах; затем попытаемся проследить те выводы, которые можно было сделать из этого замысла. Во-первых, математика (как и философия) в работе 1844 года трактовалась как наука об умственных построениях, а это влекло за собой задачу четкого описания *способов мысленного конструирования*; философия понималась как наука о «всеобщем», математика – как наука об «особенном». «Особенное» при этом выступало как то, из чего строятся более сложные образования; а это необходимо приводило к постулированию полагаемых в ходе умственной деятельности исходных, наипростейших *элементов*, к которым, в конечном счете, должны сводиться любые логические и математические конструкции. Изучение наследия братьев показывает, что именно такими и были выводы, которые они сделали в 1847 г. Младший брат говорит об этом так:

> Уже тогда (в 1847 г. – *Б.Б., Л.Б.*) им удалось для обеих ветвей (т.е. для арифметики и учения о протяженностях. – *Б.Б., Л.Б.*) устранить ряд ошибок в доказательствах и изложить эти учения с полной строгостью. Математики обычно допускают, чтобы математические величины, например числа, возникали различным образом, не доказывая при этом, что результаты будут одинаковыми; например, число 7, согласно их подходу, может получиться из 6 + 1 и из 5 + 2. Братья поняли, что это неверно, что если стремиться к научной строгости, то каждую величину надлежит порождать единственным – причем самым простым – способом из непосредственно предшествующих величин путем последовательно устанавливаемых связей (как, например, 7 строится из 6 + 1) и что каждое строгое доказательство должно проводиться последовательно – таким способом, что если данное предложение верно для *a*, то оно должно быть верно и для *a* + 1. Это был самый значительный результат тогдашней совместной работы[56].

---

[56] *Grassmann R.* Die Grösenlehre... S. VI–VII.

На значение результатов совместной работы с братом, проведенной в 1847 г., Роберт указывает во многих своих трудах, отмечая, что именно тогда они совместно обосновали – «в строго научной форме» – для учения о формах, или математики (а именно для учения о числах, а также для учения о протяженностях) законы сложения и вычитания, умножения и деления, используя *поступательные* [fortleitende], или *индуктивные*, доказательства. Так вырисовывается смысл той концепции «единственно научной строгости» построения точной науки, которую выработали для себя Грассманы и которую решительно отстаивал Роберт. В этой концепции – причина, почему изложение «учения о протяженностях» 1844 года, несмотря на его «полуфилософский» характер, так и осталось для Германа предпочтительнее «евклидового» варианта 1862 г. У Грассманов была четкая конструктивистская, как мы можем сказать сейчас, концепция – конечно, на уровне, отвечавшем состоянию тогдашнего знания. В этом отношении они были белыми воронами в стане ученых своего времени. Математики, увлеченные волной новых открытий, не придавали большого значения философскому осмыслению основ своей науки, а если и задумывались над проблемами фундамента своей научной области, то подходили к вопросу с позиций «математического платонизма» – позиций, которые были чужды Грассманам. А специалисты-логики, даже те из них, которые математизировали свою науку, не придавали значения вопросу о *методе* построения логических учений. Философы же были еще глухи к математико-логической проблематике и методологии научного знания.

* * *

Оригинальность взглядов братьев Грассманов в философии математики и логике не подлежит сомнению. Так, ведущие идеи грассмановского построения арифметики носили (в своих основах, во всяком случае) *индуктивно-рекурсивный*, т.е. конструктивный, характер, что резко отличало их от построения теории чисел их современниками. Это обстоятельство наталкивает на мысль о конструктивности и «общего учения о формах (величинах)» как теории, которая, по замыслу ее создателя, должна предшествовать арифметике и «учению о протяженностях». Но в труде Г. Грассмана 1844 года конструктивность эта явно выражена *не была:* позицию его автора можно охарактеризовать как «генетическую» установку.

Понятие *генетической установки* – генетического метода, генетической точки зрения – обычно отождествляется с *интуиционистско-конструктивистской* позицией в философии математики и в логике. В качестве примера можно указать – в математической литературе – на известную монографию С.К. Клини 1952 г.[57], а в философской – на статью В.А. Смирнова[58]. В последней, правда, конструктивность понимается, пожалуй, в более широком плане, чем у Клини, а именно так, что распространяется на «математическое конструирование» в смысле так называемых *алгоритмов сводимости*, понятие о которых было рассмотрено С.А. Яновской в статье 1970 г.[59], где, в частности, проанализирована система постулатов «Начал» Евклида. Можно, однако, понимать «генетичность» математической и логической (вообще, дедуктивной) теории еще более широко – как такое ее построение, при котором мир рассматриваемых в ней объектов считается возникающим в результате применения некоторых *порождающих правил*, не обязательно имеющих финитный (эффективный) характер, т.е. таких, которые не требуют конструктивности ни тех сущностей, к которым они применяются, ни тех процессов, которые в них используют; по-видимому, в этом духе понимал генетический метод Д. Гильберт[60], когда связывал с ним такое развитие понятия числа, которое путем последовательных обобщений ведет от целых положительных чисел к числам действительным[61].

---

[57] *Клини С.К.* Введение в метаматематику / Перев. с англ. А.С. Есенина-Вольпина. Под ред. В.А. Успенского. М.: ИЛ, 1957. С. 31, 35.

[58] *Смирнов В.А.* Генетический метод построения научной теории // Философские вопросы современной формальной логики. М.: ИЛ, 1962. С. 263–284.

[59] *Яновская С.А.* О роли математической строгости в истории творческого развития математики и специально о «Геометрии» Декарта // Исследование логических систем. М.: Наука, 1970. С. 13–50.

[60] См. его статью 1900 года в русск. перев.: *Гильберт Д.* О понятии числа // Д. Гильберт. Основания геометрии / Перев. с нем. М.; Л.: Гостехтеоретиздат, 1948. С. 315–321.

[61] Впоследствии Гильберт разработал концепцию «финитизма» («финитного способа рассуждения»), предполагающего конструктивность в собственном смысле (см.: *Гильберт Д., Бернайс П.* Основания математики. Логические исчисления и формализация арифметики / Пер. с нем. М.: Наука, 1979. Гл. II). Не останавливаясь ближе на понятии конструктивности, мы отсылаем читателя за справками к статьям переводчика книги Гильберта и Бернайса Н.М. Нагорного («Конструктивный объект» и «Конструктивный процесс») и Н.Н. Непейводы («Конструктивное направление» в «Новой философской энциклопедии» (Т. 2. С. 293–295). Впрочем, необходимые разъяснения будут даны в Послесловии нашей книги.

Примером неэффективных правил метут служить те «принципы порождения», которые использовал Г. Кантор[62] при построении системы ординальных (порядковых) чисел. Взгляд на применявшийся им в этом случае метод как на разновидность генетического (в широком смысле) подхода в дедуктивном знании тем более оправдан, что система канторовских ординалов выступает в качестве основы активно используемого ныне в математической логике и математике метода трансфинитной индукции, представляющего собой (неконструктивное) обобщение принципа «обычной» полной математической индукции, которая играет фундаментальную роль в интуиционистско-конструктивистских концепциях.

Подход Г. Грассмана, как он был представлен в работе 1844 г., можно, по нашему мнению, считать генетическим главным образом на уровне «алгоритмов сводимости», т.е. алгоритмов, сводящих решение некоторой (массовой) задачи к «задачам, принятым за решенные». Если в «Началах» Евклида «принятыми за решенные» считались такие задачи, как проведение окружности любого радиуса или нахождение точки пересечения любых двух (непараллельных на плоскости) прямых линий (знаменитый пятый постулат), то в «учении о протяженностях» принятой за решенную признавалась, например, задача построения (в евклидовой плоскости) произвольной линии (кривой) посредством некоторого движения точки как «производящего элемента»[63].

«Генетическая установка», как она была представлена в «Учении о протяженностях» 1844 и 1878 годов, не была, разумеется «финитной». Это видно хотя бы из того, что Г. Грассман не конкретизировал – в «общем учении о формах», – что такое *форма* и как следует понимать совокупность «всех форм», которая подразумевалась в его рассуждениях. Однако проблема, как можно выразиться, «конструктивистской проработки» исходных разделов учения о формах (величинах), специфицирующей более общий генетический подход Г. Грассмана к основаниям математики, достаточно ясно осознавалась братьями. Во всяком случае, это можно утверждать относительно Роберта, который пришел к заключению о необходимости детальной разработки теории «форм» старшего брата в виде особого учения о величинах.

---

[62] См., например, его работу, опубликованную в 1883 г. как № 5 его труда «Über unendliche lineare Punktmannigfaltigkeiten», русск. перев.: *Кантор Г.* Основы общего учения о многообразиях. Математическо-философский опыт в учении о бесконечном // Новые идеи в математике. Сб. 6. Учение о множествах Георга Кантора. СПб.: Изд-во «Образование», 1914. С. 1–77.

[63] См.: *Grassmann H.* Die Ausdehnungslehre 1844. S. XXI–XXIX, 16–17.

«УЧЕНИЕ О ВЕЛИЧИНАХ» РОБЕРТА ГРАССМАНА: ИСТОКИ, СТАНОВЛЕНИЕ, ОБОСНОВАНИЕ, СТРУКТУРА. ОПОРА НА ИДЕИ ЛЕЙБНИЦА

Большая внематематическая деятельность Р. Грассмана в 60-х годах отнимала у него слишком много времени, чтобы он мог осуществить ту часть выработанной вместе с братом программы, которую взял на себя. По собственному признанию Р. Грассмана, к научной работе в области математики и логики он вернулся только в 1870 г. И уже через короткий срок – в 1872 г. – в его издательстве выходит труд, в котором замысел построения основ математического знания в терминах «форм» (величин в широком смысле), ограниченного набора бинарных операций, а также отношения равенства, лишь в общих чертах заложенный в работе старшего брата 1844 г., получил развернутую реализацию. Мы имеем в виду сочинение Роберта Грассмана под общим названием «Учение о формах, или Математика». Сочинение это состояло из пяти книг. Первая включала в себя – в основных разделах – изложение общей теории величин. Далее следовали книги: «Учение о понятиях, или Логика»; «Учение о соединениях, или Комбинаторика»; «Учение о числах, или Арифметика»; и, наконец, «Учение о внешнем, или Учение о протяженностях». Такой состав труда 1872 года отражал тогдашние представления братьев Грассманов о строении современного им точного знания: о наличии в нем пяти частей, из которых базисной признавалось «общее учение о величинах», а остальные четыре считались его ответвлениями. Для истории и методологии науки значимы все эти книги, однако для философии и логики интерес представляют первые две, перевод которых и предложен нами читателю. Хотя сам Р. Грассман в последующих сочинениях на эту тему и характеризовал изложение учения о величинах в труде 1872 г. как «очень несовершенное», – о том, в чем он видел это несовершенство, будет сказано ниже, – тем не менее именно этот труд, несмотря на его краткость, следует считать наиболее важной грассмановской публикацией по общей теории величин. Ибо хотя «учение о величинах» было впоследствии видоизменено и существенно расширено его автором, что нашло отражение в более подробном изложении во второй половине тома I «Системы знания» 1890 года, а также – в более кратком виде – в вышедшей в том же году грассмановской «Логике», тем не менее основной замысел (общей) теории величин, как он был выработан Р. Грассманом в 1870 г., оставался неизменным.

Как явствует из сказанного нами ранее, «учение о величинах» (включая его «ветви») можно считать попыткой развернутой конкретизации того замысла «генетического» построения математики и логики как «чистого учения о формах», который был кратко обрисован Г. Грассманом во «Введении» к его сочинению 1844 г.; это обстоятельство нашло выражение уже в заголовке книги Роберта Грассмана 1872 г. – «Учение о формах, или Математика» и в тексте ее «Введения»; однако, в отличие от книги брата 1844 года, Р. Грассман, начиная с «Введения в учение о величинах», почти не пользуется термином «форма», а говорит о величинах, т.е. использует понятие «величины в широком смысле», фигурировавшее в упомянутом труде Г. Грассмана в качестве синонима термина «форма».

Учение о величинах, или «наука о соединении величин», составляет, по Р. Грассману, исходную часть всей теории форм. Истоки соответствующей концепции, как и сам термин «учение о величинах», Р. Грассман считает восходящими к Лейбницу. Во «Введении в учение о величинах» он пишет:

> Учение о величинах, или общая часть учения о формах, является совсем молодой наукой. Идею о нем впервые выдвинул Лейбниц в одном письме к профессору Вагецию [Vagetius] из Гиссена в 1696 г. по Р.Х. В этом письме он уже называет эту науку *учением о величинах* (scientia de magnitudine) – название, которое надо сохранить, поскольку оно вполне отвечает сути дела, – и превозносит его за то, что оно содержит простые или, лучше сказать, однозначные понятия, предложения, умозаключения и приемы [Wege]. «Однозначные понятия, – говорит он (Лейбниц. – *Б.Б., Л.Б.*) в этом письме (Opera omnia, ed. Dutens. 1768, Tl. 3, S. 338), – суть уравнения и предложения относительно величин и малостей [Kleinern]. Умозаключения или соединения (связывания) суть сложение, умножение и т.п. Способ действия [Weg der Entwicklung] в конечном счете указывает, как можно получить доказательство некоторого предложения или решение некоторой задачи. Идея этой науки, если бы она была хорошо разработана каким-либо искусным человеком, представила бы нам общую часть [Zweig] учения о формах в качестве легкой и надежной ветви математики». Это слова Лейбница.

Р. Грассман, таким образом, выступает как один из тех мыслителей, которые в XIX в. приняли философско-математическую и логико-методологическую эстафету великого немецкого философа, взявшись за реализацию того, что ныне обычно именуют «программой Лейбница»[64]. «Лейбницевский мотив» настойчиво

---

[64] См.: *Кузичева З.А.* Логическая программа Лейбница и ее роль в истории логики и кибернетики // Вопросы кибернетики. Кибернетика и логическая формализация. Аспекты истории и методологии. М.: Научный совет по комплексной проблеме «Кибернетика» АН СССР, 1982. С. 3–36; *Субботин А.Л.* Логические

звучит в работах Р. Грассмана. Обращаясь во второй части тома I своего главного труда «Система науки», выпущенной в 1890 г., а именно в помещенном в нем втором предисловии – предисловии к «Учению о величинах», к истокам своей теории, он вновь приводит, причем в расширенном виде, ключевое место из этого важного письма. Вот цитируемый Лейбницев текст:

> Я привык называть учение о величинах эскизом математической логики, который другие называют логистикой. Ибо к этому учению относятся простые понятия, предложения, умозаключения и методы. Простые понятия суть величины, отношения между числами и составленные из них формулы, например, a^2, $a^{1/2}$ r^2, ra^2, $a^2 - b^2$. Предложения бывают предложениями о том, что больше, и о том, что меньше, равенствами, предложениями о сходстве или о равных отношениях. Ибо равенство $c^2 = a^2 - b^2$ есть предложение, так же как и пропорция $(a - b):c = c:(a - b)$. Умозаключения суть способы проведения вычислений: сложение, вычитание, умножение, деление, нахождение общего делителя, извлечение корня, перестановка, обращение, соединение, разделение отношений и т.д. Наконец, метод указывает, как следует производить доказательство данного предложения или решение данной задачи[65].

Цитируя письмо Лейбница в разных работах, Грассман допускает разночтения. Ознакомление с латинским первоисточником показывает, что в одном случае мысли Лейбница скорее пересказываются, чем приводятся точно, во втором же случае мы имеем дело (с не очень адекватным) переводом. Мы не станем заниматься вопросом об аутентичности грассмановской немецкой передачи слов Лейбница, а также тем, в чем на самом деле состоял лейбницевский проект математической логики как всеобщей теории величин, нашедший, как теперь хорошо известно, отражение далеко не в одном лишь его письме к Вагецию: нас интересует не Лейбниц, а Р. Грассман. Что существенно для последнего в этих Лейбницевых идеях? Демонстрация преемственности своих (и брата) установ-

---

труды Лейбница // Лейбниц Г.В. Сочинения: В 4 т. М.: Мысль, 1984. Т. 3. С. 41–53; ср. также раздел «Задача реализации логической программы Лейбница» в статье: *Бирюков Б.В., Туровцева А.Ю.* Логико-гносеологические взгляды Эрнста Шрёдера // Кибернетика и логика. Математико-логические аспекты становления идей кибернетики и развития вычислительной техники. М.: Наука, 1978. С. 153–252.

[65] *Grassmann R.* Die Grösenlehre. 1840. S. III–IV. Следует заметить, что Р. Грассман модернизирует лейбницевскую формальную запись. В тексте Лейбница первый ряд формул написан слитно, запятые отсутствуют; уравнение $c^2 = a^2 - b^2$ записано Лейбницем в виде cc aequ aa-bb; в пропорции, фигурирующей далее в тексте великого философа, в знаковой форме (разумеется, кроме букв *a*, *b* и *c*, играющих роль знаков величин) представлена только операция деления (:), все же остальное выражено словами.

вок в истолковании «строгого знания» и хода мысли его великого соотечественника, а также показ неполноты замысла Лейбница. Преемственность видится Р. Грассману – и здесь он, без сомнения, прав – в идее такой науки, которая образует отдел, общий для всех точных наук, а неполноту – в том, что Лейбниц ограничивал

> учение о величинах исключительно видами вычислений, которые мы (т.е. Р. Грассман. – *Б.Б., Л.Б.*) причисляем к учению о числах, или арифметике. Учение о величинах, согласно Лейбницу, должно быть только общим разделом учения о числах – разделом, устанавливающим для последнего общие законы связывания способом, сходным с тем, как им это делается во всех ветвях строгого знания в разработанном мною учении о величинах. Но вполне вероятно, что он (Лейбниц. – *Б.Б., Л.Б.*) пришел бы к более общей трактовке учения о величинах, если бы действительно разработал эту ветвь. Причисляет же он к видам вычислений учение о протяженностях, так же как логику, которую он собирался строить на основе *calculus philosophicus* или *calculus ratiocinator*, так же как и учение о соединениях, или учение о комбинациях, которое он называет *arithmetica binaria* или *arithm(etica) dyadica*. Поэтому для него было бы естественным рассматривать свое учение о величинах также как общую часть, лежащую в основе всех ветвей строгого мышления. Поскольку Лейбниц не продвинулся в разработке учения о величинах, то, конечно, дело у него ограничилось выдвижением идеи, которая – а иначе и быть не могло – была несколько туманна.

Вряд ли эта характеристика «программы Лейбница» вполне адекватна подлинному замыслу автора «Новых опытов о человеческом разуме»: лейбницевская идея *calculus ratiocinator* была не менее всеобъемлющей, чем грассмановская широкая интерпретация «учения о величинах». Но неразработанность замысла Лейбница составляет действительный исторический факт.

Не ясно, были ли известны Р. Грассману – в период создания труда 1872 г. – попытки реализации «программы Лейбница», предпринимавшиеся в XVIII – первой половине XIX в. рядом ученых, в частности И.Г. Ламбертом (последний в данной связи упоминается лишь в «Логике» 1890 г.); в работах 1872 г. нет следов знакомства их автора с трудами Дж. Буля и А. Де Моргана[66]. Во всяком случае следующий – после Лейбница – шаг в

---

[66] Об исследованиях Дж. Буля Роберт Грассман узнал, по-видимому, уже после публикации книг 1872 г. В работах по общей теории величин и логике 1890 года он уже пытается учесть булевские результаты и даже полемизирует с Булем (см. помещенный в данной книге грассмановский текст «Очерк истории логики»).

разработке идей общей теории величин Р. Грассман связывает с работой своего отца Юстуса Гюнтера Грассмана «О понятии и объеме чистого учения о числах»[67]. Эта «гимназическая программа» (оставшаяся недоступной авторам этих строк), по-видимому, примечательна не только тем общим воздействием, которое она оказала на братьев Грассманов, но, как можно полагать, и содержавшимися в ней конкретными положениями. Так, Р. Грассман указывает, что в этой работе развивался подход к общему понятию величины, как он, Р. Грассман, впоследствии трактовал это понятие в своем «учении о величинах»; что в ней производилось сравнение логики, учения о числах и учения о комбинациях, а также – и это особенно примечательно – содержалось противопоставление логических наук как «связывания по внутренним отношениям» наукам математическим как осуществляющим «связывание по внешним отношениям», – идея, нашедшая дальнейшее развитие в работе Г. Грассмана 1844 г. и в «разветвлениях» теории величин Р. Грассмана, о чем мы еще будем говорить.

Как отмечает Р. Грассман в упомянутой работе Ю.Г. Грассмана ставился также вопрос о возможности общего учения о величинах как исходной части всего формального знания – части, которая явилась бы основой как математики, так и логики. Однако ответ на него дается отрицательный. Переходя к труду 1844 года старшего брата, Р. Грассман подчеркивает проводившееся последним различение – во «Введении» (раздел А) – двух больших отделов теории «формального знания» (formell Wissenslehre): математики, или учения о формах, и диалектики, или логических наук; при этом «общее учение о формах», основы которого изложены в параграфах 1–12 работы 1844 года, трактуется еще, говорит Р. Грассман, как ветвь, общая только для математических наук. «Общее учение о формах моего брата, – пишет Р. Грассман, – стало быть, существенно отличается от учения о величинах (Р. Грассмана. – *Б.Б., Л.Б.*), поскольку последнее должно составлять общую базу как для математических, так и для логических наук».

Философски окрашенное сотрудничество братьев Грассманов в области математики (и логики), имевшее место в 1847 и 1855–1856 гг. и плодотворное во многих отношениях, не приве-

[67] *Grassmann G.J.* Ueber den Begriff und Umfang der reinen Zahlenlehre. Programm des Marienstiftsgymnasiums zu Stettin, 1827.

ло, однако, говорит Р. Грассман, к разработке оснований «строгого знания»; такую работу, по его словам, в 1870 г. осуществил он один[68]. Поначалу он, Роберт Грассман,

> намеревался разработать только логику и учение о соединениях, или учение о комбинациях ⟨...⟩; однако в ходе работы он убедился, что обе эти... ветви, как и обе математические ветви – учение о числах и учение о протяженностях с необходимостью предполагают некоторый общий раздел – учение о величинах, что этот последний можно разработать без труда и что если его развить, то другие четыре ветви приобретут большую краткость и простоту, причем открываются неожиданные параллели и связи.

Результатом этой работы и явились пять книг, опубликованных в 1872 г. Р. Грассманом под общим заголовком «Учение о формах, или Математика».

Выше упоминалось, что контртитульный лист первой из этих книг оставлял читателя в неведении относительно того, почему на нем был помещен подзаголовок «часть вторая, дополнительная», что имел в виду Р. Грассман под предполагавшейся «первой, основной» частью? Дело в том, что выпуская книги 1872 года, Р. Грассман, очевидно, намеревался ввести их содержание в общий контекст своих взглядов на «учение о науке», которое он называл философией (или отождествлял с таковой). Эти взгляды, как можно полагать, тогда интенсивно им разрабатывались, что привело к публикации в 1875–1876 гг. соответствующего труда, состоявшего из четырех частей (каждая из них имела самостоятельное название и, по-видимому, выходила отдельно)[69]. Структура этого труда согласуется с грассмановским подразделением «системы (здания) человеческого знания» на четыре отдела, подразделением, которому Р. Грассман придавал большое значение, следуя здесь, как он считал, «примеру древнего мастера человеческой науки»[70], Аристотеля. Первым из этих отделов было *учение о науке*, которое «образует основание, фундамент всего здания [науки]; оно учит

---

[68] Ср. сказанное по этому поводу Р. Грассманом в его Очерке истории логики (см. с. 345 наст. изд.).

[69] *Grassmann R.* Die Wissenschaftslehre oder Philosophie. Thl. 1: Die Denklehre. Stettin, 1875; Die Wissenschaftslehre oder Philosophie. Thl. 2. Die Wissenslehre. Stettin, 1875; Die Wissenschaftslehre oder Philosophie. Thl. 3: Die Erkenntnisslehre. Stettin, 1876; Die Wissenschaftslehre oder Philosophie. Thl. 4: Die Weisheitslehre. Stettin, 1876.

[70] *Grassmann R.* Die Wissenschaftslehre oder Philosophie, 1875. S. 14.

нас путям, какими человек достигает знания»[71]. Учение это, по Р. Грассману, в свою очередь, расчленяется на четыре части («ветви»), и первой из них является *учение о мышлении*, которое «рассматривает чувственные представления и их переработку с помощью языка, и учения о формах, или математики»[72]. Но и «учение о мышлении» состоит из определенных частей – их тоже четыре, – в которых изучаются: восприятия; память и воображение – процессы, благодаря которым образные представления перерабатываются в научные; язык (языки), изучение которого подводит к «переработке мысли в речь»; и, в заключение, формы мышления (Formdenken).Теория мыслительных форм – форм мышления (Formen des Denkens) завершает познание процессов образования понятий и мыслей.

В трудах 1875–1876 гг. теория мыслительных форм не получила развернутого изложения (ей было отведено всего 14 страниц). Для представления форм мышления здесь не использовался какой-либо формальный аппарат. Во введении ко второму разделу четвертой книги части первой труда 1875–1876 гг., – разделу, носящему название «Продумывание [Durchdenken] (систематическое мышление)», Р. Грассман говорит, что он «не решился ввести учение о формах, или математику, в текст этого труда, дабы не отпугнуть многих его читателей»[73], и предпочел отдельно изложить это учение в дополнительном томе; из сказанного вслед за этим явствует, что здесь имеется в виду труд 1872 года, хотя четкой ссылки на него не дается.

Каким же был общий ход мыслей Р. Грассмана при осуществлении его философско-математической и логико-методологической конструкции и, соответственно, какой была структура труда 1872 года, особенно первой его части, эту концепцию воплощавшего? Р. Грассман исходит, с одной стороны, из существования определенных законов, характеризующих операции (связи, сочленения, соотношения величин), а, с другой стороны, из наличия в мышлении самих этих операций и соотношений – операций и соотношений, которые, в зависимости от того, каковы они, могут либо подчиняться, либо не подчиняться этим законам. Это законы, относящиеся к равенству (Gleichheit) двух величин, а также законы, которые действуют в отношении

---

[71] Ibid.
[72] Ibid. S. 15.
[73] Ibid.

бинарных операций сложения, или «прибавления» (Fügung), и умножения, или «переплетения» (Webung). Все эти законы принадлежат *общей* части теории величин – ее «стволу» (Stamm), поскольку имеют силу во всех «разветвлениях» этой теории: в учении о понятиях, в арифметике, комбинаторике и «учении о внешнем» (Ausenlehre). Прежде всего это закон удаления скобок (Klammerauflosung), или «объединения» (Einigung), т.е., на современном языке, закон ассоциативности и закон «перестановки» (Vertauschung), т.е. коммутативности бинарной операции. При этом подчеркивается, что оба закона должны быть введены в рассмотрение поначалу в их общем виде, до рассмотрения каких-либо операций, обладающих либо не обладающих теми или иными возможными для них свойствами. Ибо, пишет Р. Грассман, «закон объединения» может действовать в отношении и такой связи, которая не подчиняется «закону перестановки» и «существует большое число вычислений, в которых действует только объединение, но не перестановка; стало быть, закон объединения, или скобочный закон (Klammergesetz), должен быть введен сам по себе, до того, как может зайти речь о перестановке»[74].

Поначалу может показаться, что «Учение о формах» 1872 г. не обещает чего-либо интересного: дело выглядит так, будто рассматриваются элементарные вопросы, касающиеся простейших арифметических или алгебраических операций. Однако внимательное ее изучение обнаруживает несостоятельность такого взгляда. Ниже, в отдельной статье, мы проанализируем реализованный в ней подход. Пока же остановимся на том, как Р. Грассман трактовал отношение своего «учения о величинах» к содержательному мышлению и естественному языку.

МЫШЛЕНИЕ, ЯЗЫК И ТЕОРИЯ ВЕЛИЧИН. РЕКУРСИВНО-ГЕНЕТИЧЕСКАЯ УСТАНОВКА

Развертыванию «учения о формах» и его базы – общей теории величин, как в работе 1872 г., так и в других трудах, где эта теория излагается, Р. Грассман предпосылает рассмотрение вопроса о соотношении «теории форм» и обычного – неформального – мышления и естественного, разговорного языка.

[74] *Grassmann R.* Die Formenlehre oder Mathematik, 1872. S. 18.

Исходным является взгляд на «учение о формах» как на задающее законы «строго научной» связи величин – законы, применение которых исключает смешение понятий и ошибочные умозаключения; основными при этом являются понятия *величины* как объекта, обладающего лишь одним (а не многими) значениями, и представление о *связи величин*, также обладающей одним, и только одним, значением. Величины – это Р. Грассман повторяет с утомительной настойчивостью – однозначны: ни одна из них не может быть равна и вместе с тем не равна некоторой другой величине; она либо равна, либо не равна ей; если одна величина равна другой, то не неравна ей, если же она является неравной другой, то она не является ей равной.

Однозначность – это то, что отличает величины и их связь от *выражений обычного языка*, которые многозначны и изменчивы по смыслу; от *понятий* повседневного мышления, разграничение которых нередко затруднительно и которые в ходе работы мышления могут менять свои значения; и от *вещей* внешнего мира, также подверженных изменениям. Поскольку многозначность и изменчивость характеризуют также и (грамматические) *предложения*, как результат связи слов языка, *мысли* (как то, что возникает из связи понятий) и *отношения* (между вещами) – «любые два человека понимают их по-разному, и именно благодаря этому создается многообразие различных взглядов»[75] – все они тоже не могут рассматриваться в качестве величин. Величины создаются самим «систематическим мышлением» и фиксируются с помощью определенных знаковых средств.

В чем же специфика соотношения грассмановских (однозначных) величин и средств естественного языка? Анализируя соответствующие взгляды Р. Грассмана, можно выделить *три пункта*: необходимость языка для *усвоения* «учения о формах»; использование языковых выражений для *представления* предложений и доказательств этого «учения»; и, наконец, *применение* «теории форм» к обычному языку (и мышлению). Рассмотрим эти пункты.

Прежде всего Р. Грассман подчеркивает, что построение теории величин не предполагает опоры на законы естественного языка. Отмеченные выше свойства языковых выражений и понятий содержательного мышления, не облеченных в строгие

[75] Ibid. S. 6.

«формы», делает эти выражения и понятия непригодными в качестве основы «теории форм». Однако совсем без применения (обычного) языка в учении о формах обойтись все же нельзя, так как теория форм (величин) для своего уяснения требует использования средств языка; эти средства нужны также для того, чтобы *договариваться* относительно знаков для величин и знаков их связей (соединений). Но договоренность эта, вместе с сопутствующим ей *пониманием* смысла знаков теории величин, относится, по мнению Р. Грассмана, только к *введению* в учение о формах, а не непосредственно к его *развертыванию*.

«Строгое учение о формах», которое нельзя развивать «по законам языка», тем не менее требует от человека, его усваивающего, владения языковыми средствами и достаточно развитой способности мышления; «последняя должна предварительно произрасти, должна развиться и созреть, прежде чем она сделает возможным разумение строгости во всей ее полноте»[76]. Для этого человек должен *овладеть языком*, научиться различать свойства и действия, постигать внешние и внутренние взаимозависимости вещей и действий; таково необходимое условие четкого различения и правильного употребления величин и их связей. Поэтому в процессе обучения теория языка (Sprachlehre – грамматика) должна предшествовать учению о формах; только после того, как понята структура языка, а в его использовании достигнута надлежащая уверенность, возможен переход к «теории форм» как к строгой науке (переход этот, считает Р. Грассман, осуществим в одном из старших классов средней школы)[77].

Итак, хотя «учение о формах (величинах)» не нуждается в предварительном задании законов языка, так как в своем развертывании не прибегает к языковым формам, для *овладения* этим учением язык необходим. В *этом* смысле учение о языке, по Р. Грассману, *предшествует* учению о величинах. Поэтому, когда в результате разработки своей концепции мышления и логики – в рамках задуманного им грандиозного построения «системы человеческого знания» – Р. Грассман опубликовал в 1875 г. свое «Учение о мышлении»[78], в этом сочинении изложение учения о языке *предваряло* учение о формах мышления;

[76] Ibid. S. 5.

[77] Ibid. S. 6.

[78] В качестве первой книги «Введения в систему науки» – такой подзаголовок он дал своему труду 1875–1876 гг. при его переиздании в 1882 г.: *Grassmann R.* Die Einleitung in das Gebäudes Wissens oder wissenschaftliche Propädeutik. 4 Thl. Stettin, 1882.

то же имело место и в самой «Системе науки»: учение о языке излагается в первой половине первого тома, а теория величин – во второй его половине.

Далее. Учение о формах, согласно Р. Грассману, должно развить всеобщие законы мышления: «надлежит, чтобы все, что есть или может стать предметом мышления, могло сделаться и предметом учения о формах, а также чтобы каждую связь [связывание, сочленение] в мышлении можно было понимать и как некоторую связь в учении о формах»[79]. Теория форм как «строгая наука» должна быть, таким образом, общезначимой и поэтому независимой от характера того или иного языка; поскольку обычные языки могут сильно отличаться один от другого, для теории форм необходимо введение новых знаковых средств: «для каждой величины и каждого соединения надо установить некоторый особый [eigens] знак, который ⟨...⟩ имел бы только одно значение и делал бы невозможным недоразумения»[80]. В силу этого развертывание учения о формах производится с помощью формул и уравнений (равенств), связывающих формулы: «доказательство, которое осуществляется только на словах и которое нельзя передать формулами, является в учении о формах ошибочным, вводящим в заблуждение»[81]. Однако каждая формула или равенство может быть выражена некоторым предложением (Sats) – теоремой (Lehrsatz) и облечено в слова.

> Но это высказанное словами предложение есть лишь перевод [на обычный язык] равенства, выражаемого формулами, и не может содержать ничего, кроме того, что было в равенстве и обозначено формулами. Это предложение просто сопровождает формулу и не может ни заменить последнюю, ни сделать ее излишней. Подобно предложению, доказательство тоже может быть представлено на словах; но слова эти опять-таки представляют собой только перевод на [обычный] язык тех преобразований, которые претерпевают формулы[82].

Делает ли это излишним словесное представление теорем и доказательств теории форм? Отнюдь нет.

> Всякое сообщение мыслей происходит на языке, так же как и всякое мышление; стало быть, если мы хотим передать другим учение о формах, обсудить значение какой-то формулы или же только подумать о ней, мы должны сделать это на [обычном] языке; с другой стороны, если учение

[79] Ibid.
[80] Ibid.
[81] Ibid. S. 11.
[82] Ibid. S. 10.

о формах надо применять к предметам мышления и языка, это возможно, только если данная формула переведена на язык. Перевод формул на язык нашего народа [in die Sprache unseres Volkes] есть поэтому важное упражнение, особенно для начинающих, и поэтому он должен производиться при каждом доказательстве[83].

Наконец, язык и выражаемое его средствами мышление служат *сферой применения* самого учения о формах. Дело в том, что, согласно концепции Р. Грассмана, теория форм (величин) вносит в языково-мыслительную деятельность ту точность, строгость, которая в ней самой – вне математики и логики – отсутствует. Внесение это достигается путем перевода на *естественный язык* формул и уравнений теории форм – перевода, придающего возникающим в его результате языковым выражениям ту четкость и определенность, которые без него были бы для языка недоступны. Ибо словесные *определения*, касающиеся величин и операций над ними, предложения, или *теоремы*, говорящие о величинах и уравнениях величин, *задачи* и их *решения*, а также словесные *доказательства* – все это после упомянутого перевода становится однозначным; поэтому «словесный перевод учения о формах представляет собой полезное и в высшей степени творческое занятие»[84].

Однако словесное представление «теории форм», начиная с ее базиса – общего учения о величинах, на естественном языке предполагает, по мнению Р. Грассмана, введение в язык (речь идет о немецком языке) массы необычных искусственно образованных выражений.

Новый подход к делу требует, если мы хотим быть научно строги, также и новых искусственных слов. Например, только в случае такого способа связывания, как умножение [Multiplication], – пишет Р. Грассман во Введении в «Учение о величинах» 1872 г., – мы познакомимся: в учении о величинах – с тремя его видами [Arten], в учении о понятиях и о числах – с одним в каждом из них, в учении о соединениях и в учении о внешнем – с четырьмя в каждом из них, а всего, стало быть, с тринадцатью видами. Было бы ненаучным обозначить все эти различные виды одним и тем же словом «умножение»; ⟨...⟩ стало быть, надо вводить новые названия[85].

Имея в виду задачу «продвижения науки в народ» – ведь Р. Грассман с самого начала своей педагогической, а потом интенсивной научно-литературной деятельности стремился активно выполнять просветительские функции, как он их понимал, –

[83] Ibid.

[84] *Grassmann R.* Die Formenlehre...

[85] *Grassmann R.* Die Grösenlehre. Erstes Buch der Formenlehre... S. 23.

создатель теории величин считает необходимым выработку немецких языковых форм для этих «искусственных выражений»; это, по его мнению, сделает их «общими для науки и народной школы»[86]. И Р. Грассман вступает на тернистый путь словотворческой деятельности. Он придумывает множество новых терминов – существительных и глаголов, пользуясь богатством немецких приставок, позволяющих в одном гнезде слов варьировать некий общий смысл. Как убедится читатель, проводимые терминологические разъяснения сопровождаются (в подстрочных примечаниях) этимологическими комментариями, основанными на данных сравнительного языкознания: Р. Грассман сопоставляет предлагаемые им немецкие выражения с лингвистическими формами санскрита, греческого и латыни, швабского и англо-саксонского языков, с древне- и нововерхненемецкими выражениями и т.д. Напомним, как в самом начале «Учения о формах» 1872 г. поясняется этимология – и через нее смысл – немецкого слова «форма»:

> Форма [Form] представляет собой заимствованное латинское слово forma, а последнее – заимствованное, путем замены букв, греческое morphe. Это слово происходит от исходного глагола [Urverb] mar – размягчаю [erweiche], в соответствии с чем marva, ags marva означает «мягкий», «податливый» и, таким образом, morphe – мягкое, телесная фигура, прекрасный облик, потом облик [Gestalt] вообще, форма вполне определенного, однозначного очертания[87].

Величины, полагаемые в качестве первоначальных, Р. Грассман называет *штифтами* – Stifte (от глагола *stiften* – устанавливать, упорядочивать, основывать), что он считает соответствующим латинскому *elementum* (отсюда другое наименование «штифтов» – элементы) и греческому *stoicheion*. Для связей величин вводится целый набор выражений, разительно отличающихся от общепринятых. Хорошее представление об этих терминологических новациях дает таблица видов соединений теории величин, помещенная на с. 24 труда 1872 г. – «Учения о формах»[88].

Излишне, пожалуй, говорить, что попытка Р. Грассмана переделать на псевдонародной основе терминологию современной ему науки была обречена на неудачу; она только отпугивала читателей, затрудняя понимание грассмановских идей.

---

[86] Ibid.

[87] *Grassmann R.* Die Formenlehre... S. 5.

[88] Ibid. S. 24.

Между тем идеи эти не были тривиальны, поскольку предвосхищали некоторые примечательные черты таких сложившихся много позже, в XX столетии, направлений в основаниях математики, как интуиционизм и конструктивизм.

Как известно, основоположник интуиционистской концепции в философии математики Л.Э.Я. Брауэр исходил из тезиса о, так сказать, отделенности математического знания от языка, на котором это знание выражается, будучи уверенным в том, что математика и логика не предполагают формулировки мыслительных закономерностей в качестве предварительного условия своего развития. Провозглашая в качестве истока математического знания то, что в философии называется *интеллектуальной интуицией*, – в форме интуитивно данного процесса мысленного порождения натуральных чисел, интуиции, на которой основываются умозаключения по схеме математической индукции и т.п. умственных актов, сводящихся к умозрительно-наглядному осуществлению «очередного шага построения», – он продолжал и развивал здесь ту «антилогицистскую» линию, которая в философии математики связана с именами Р. Декарта, И. Канта и А. Пуанкаре. Но, как оказывается, и Роберта Грассмана – тоже! Ибо в основе математики (и логики), согласно последнему, лежит, говоря интуиционистским языком, «интуиция величины».

В самом деле. Вдумаемся в те идеи, которые, согласно изложению Р. Грассмана, данному в 1890 г., были заложены им в «учении о величинах» 1872 года:

> Предпосылкой учения о величинах является один только человеческий дух с его способностью мышления, т.е. способностью мысленного полагания и связывания сколь угодно многих величин. При этом совершенно безразлично, что ум пожелает положить в качестве величины; он может положить что угодно, но при условии, чтобы каждая величина, которую он полагает, была однозначна... так, чтобы ее нельзя было спутать с другими величинами ⟨...⟩. Величины, которые полагает ум, не рассматривая их состоящими из других величин, мы называем простыми, или элементами. Каждая простая [величина] при этом может иметь сколь угодно много частей ⟨...⟩ любая вещь, любое представление и любое понятие, короче, любое, какое угодно нечто, все, что есть или может быть предметом мышления, может быть полагаемо в качестве простого. Однако ум может также полагать простую величину, *е, без всякого содержания*, только опираясь на то положение, что для данного мыслительного акта она должна быть не сложной, а простой, и в этом состоит строго научное понятие простого в учении о величинах. Тогда, если заданы различные простые [величины] $e_1, e_2, e_3, ..., e_n$, то они должны обозначаться и именоваться различно ⟨...⟩. В свою очередь связь величин может обозначить

любое, какое угодно соединение или связывание величин, какое только возможно для человеческого ума, коль скоро оно имеет одно, а не много значений. В учении о величинах дело идет совсем не о том, чтó собой представляет некоторое связывание; в нем интересуются только тем, какой закон должен действовать для данной связи[89].

Как и математика в понимании Л.Э.Я. Брауэра, учение о формах (величинах) Р. Грассмана не требует предварительной формулировки «законов мышления», отличных от тех, которые устанавливаются в теории величин в качестве общих для всех ветвей «строгого мышления»; учение о формах, читаем мы в самом начале цитированного выше труда 1872 года,

не нуждается в предположении других законов мышления; ибо в противном случае каждое нарушение этих последних законов делало бы ошибочным и ненаучным также и учение о формах; следовательно, оно ⟨...⟩ не может развертываться по законам и в формах языка. Одним словом, оно предполагает только способность людей к мышлению, только возможность строго научного мышления, зрелых, четко мыслящих людей[90].

Как же происходит развертывание учения о величинах? Оно совершается в ходе рекурсивно-генетического процесса, начинающегося с полагания штифтов, или элементов, и установления способов связи возникающих из них величин; процесс ведет к построению все более сложных форм (величин, формул), исследуемых на равенство.

Берется некоторая формула, для нее отыскивается некоторая равная ей, для последней снова отыскивается равная ей формула, и так до тех пор, пока не будет найдена формула, относительно которой мы хотим доказать, что она равна исходной. Процесс, таким образом, состоит только в полагании величин, их связывании и в преобразовании этих связей в связи или формулы, которые имеют другой вид, но равны [исходным][91].

Итак, все величины в «учении о величинах» считаются – благодаря «способности мышления», обусловливающей все виды связывания, «возможные для человеческого ума», – *построенными в нем самом* и в нем же *однозначно определенными*. Именно потому, что ничего другого, кроме этой, как можно выразиться, *генетически-однозначной определенности*, от величин (понимаемых в самом широком смысле) не требуется, их

---

89 *Grassmann R.* Die grösenlehre, der Grundsfamm der Denklehre. Stettin, 1890. S. IX–X.

90 *Grassmann R.* Die Formenlehre... S. 5.

91 Ibid.

теория, т.е. законы, которые относительно них могут быть установлены, оказывается, согласно концепции Р. Грассмана, применимой к любым процессам мышления.

Трактуя теорию величин – эту общую часть всех «ветвей» математики и логики – как *последовательное развертывание умственных конструкций*, порождающее объекты, рассматриваемые, как теперь говорят, с *точностью до различения и отождествления*, в отвлечении от всякого конкретного содержания, и фиксируемые с помощью четко опознаваемых знаков, Р. Грассман выступил в качестве предтечи позднейших *финитизма* и *конструктивизма*.

РАЗВИТИЕ ГРАССМАНОВСКОЙ ЛОГИЧЕСКОЙ КОНЦЕПЦИИ

При формализации логической стороны мышления ныне используется многообразный спектр алгебраических структур и логико-математических исчислений. В их числе – теоретико-групповые представления и алгебро-логические построения: вспомним, хотя бы, концепцию Жана Пиаже, истолковывавшего логический аспект интеллектуальной деятельности в терминах «группировок»[92]. Прослеживая исторический генезис подобных воззрений, мы с неизбежностью приходим к достижениям братьев Грассманов, в работах которых обнаруживается аксиоматика фундаментальных алгебраических и логических структур – от теории групп (Герман Грассман, 1844) до теории решеток и булевой алгебры (Роберт Грассман, 1872, 1890, 1900). Логические достижения этих мыслителей, как уже отмечалось, в методологическом плане характеризуются выраженной генетической и определенной финитистской ориентацией, которая нами была названа *протоконструктивистской установкой*[93]. Воззрения Грассманов предвосхищали брауэровский интуиционизм.

---

[92] *Бирюков Б.В.* Системная сложность интеллекта и теоретико-групповой подход (опыт обобщения модели логики интеллекта Ж. Пиаже) // Общая теория систем и интеграция знаний. Материалы симпозиума. М., 1976.

[93] *Бирюков Б.В., Бирюкова Л.Г.* «Учение о формах (величинах)» Германа и Роберта Грассманов как предвосхищение конструктивного направления в математике. I. // Вопросы кибернетики: Кибернетика и логическая формализация. Аспекты истории и методологии. М., 1982; *Бирюкова Л.Г.* «Учение о формах (величинах)» Германа и Роберта Грассманов как предвосхищение конструктивного направления в математике. II. // Вопросы кибернетики: Кибернетика и математическая логика в историко-методологическом аспекте. М., 1984.

Напомним: возникновение конструктивистских концепций в *дедуктивной логике* ныне прочно – и по праву – связывается с именем Брауэра. Этот голландский математик и философ, основоположник «неоинтуиционизма», решительно порвал с многовековой философско-логико-математической традицией, отвергнув логическое в мышлении как основу математического. Брауэр положил начало традиции, отличной от логической классики, – развил воззрение, согласно которому логика следует *за* математикой и имеет отношение не столько к мышлению, сколько к языку как способу фиксации результатов умственного конструирования (построения) – конструирования, которое он считал непосредственным предметом математики. Классическая логика, по Брауэру, пригодна только для *изложения* результатов умственного конструирования, относящегося к *конечным* совокупностям; она не приложима к совокупностям бесконечным – *бесконечным потенциально* (никакой иной бесконечности, кроме потенциальной, он не признавал). В работе «Интуиционистская теория множеств» Брауэр следующим образом объяснял происхождение «веры» в закон исключенного третьего. Исторически сложившаяся, классическая логика (признающая закон исключенного третьего) возникла путем отвлечения от свойств конечных множеств; в последующем этой логике было «приписано существование, не зависящее от математики, и в конце концов на основании этой мнимой априорности она была незаконно применена к математике бесконечных множеств»[94].

В нашу задачу не входит рассмотрение интуиционистской концепции логического, получившей первое явное представление в формализмах В.И. Гливенко и А. Гейтинга[95], которые были разработаны лишь в конце 30-х годов XX в. Для нас существенно отметить следующее.

Интуиционистская (и конструктивная) логика, поскольку она надстраивается над интуиционистской (конструктивной)

---

[94] *Brouwer L.E.J.* Intuitionistische Mengenlehre // Jahresberichte der Deutschen Mathematiker-Vereinigung. Bd. 28. 1919.

[95] Публикации первого, вышедшие по-французски в Трудах Бельгийской академии наук, теперь имеются в русском переводе: *Гливенко В.* О логике Брауэра; *Он же.* О некоторых аспектах логики Брауэра // Труды научно-исследовательского семинара Логического центра Института философии РАН. 1997. М., 1998. С. 15–23. Статья Гейтинга: *Heyting A.* Die formalen Regeln der intuitionistischen logic // Sitzungsberichte der Preussischen Akademie der Wissenschaften. Physikalisch-mathematische Klasse. Jg. 1930. B. Kl II.

математикой, развертывается – как и последняя – с помощью индуктивно-рекурсивных процедур, покоящихся в конечном счете либо на интуиции целого положительного числа (интуиционизм), либо на абстракции конструктивного объекта и конструктивного процесса (конструктивизм). Для конечной предметной области (областей) подобное построение логики не требует пересмотра принципов классической логики, как это и подразумевалось Брауэром; в этом случае, конечно, «проходит» и гильбертовский финитизм, причем в его самом узком смысле. Интуиционистская (конструктивная) логика, далее, предполагает определенную интуиционистскую или конструктивистскую семантику как совокупность способов истолкования смысла суждений, в частности математических.

Все эти положения в той или иной мере были предвосхищены в логической теории, разработанной Германом и Робертом Грассманами, теории, которая, как мы знаем, впервые излагалась последним в работе 1872 г. Логика строилась Р. Грассманом индуктивно-рекурсивно; объемы понятий – а в соответствии с немецкой философской традицией логика понималась как «учение о понятиях» – предполагались конечными; подразумевавшаяся при этом семантика заключалась в понимании объемов понятий как конечных «сумм» элементов. Разработанная братьями в качестве одной из ветвей «общей теории форм» или «учения о величинах» в своей основе в 1855–56 гг., она была изложена Робертом лишь спустя 16 лет в небольшой книжке. В 1890 г. им было выпущено несравненно более подробное изложение логики.

Логика 1890 г. получила типографское воплощение в двух вариантах: в качестве составной части многотомного труда «Система знания» и в форме отдельной большой книги, переизданной в 1900 г. Хотя основы грассмановской математико-логической теории при этом не менялись – что и оправдывает перевод более краткой работы 1872 г., предложенной вниманию читателя, – в труде 1890 г. были восполнены все лакуны, имевшиеся в прежнем кратком изложении логики.

Внешне логика, как она изложена в работах Р. Грассмана (в частности, в работе 1872 г.), выглядит аналогично логике традиционной, подразделяясь на три части: 1. «Образование понятий», 2. «Образование суждений» и 3. «Образование умозаключений»; но в этой «традиционности» были заключены совсем не традиционные представления. В части I грассмановской логической теории строится *булева алгебра*, причем так, что сначала выводятся все законы, определяющие *дистрибутивную решетку*, и лишь после этого производится ее сужение до булевой алгебры. Это напоминает современные алгебро-логические построения, но отличается от подхода современных Р. Грассману представителей алгебры логики (Ст. Джевонс, Э. Шрёдер): они вводили дополнения (т.е. отрицания понятий) на раннем этапе логического формализма и тем закрывали путь к построению (а значит, к изучению) решеток безотносительно к булевой алгебре.

Р. Грассман как логик интересен совсем не теми сторонами своего творчества, какие мы ценим, скажем, у Дж. Буля и Э. Шрёдера. Он интересен именно тем, что развивал такой подход к логике, который был в его время явным исключением. Вместо обычного аксиоматического (или близкого к таковому) задания набора постулатов, из которых извлекались дальнейшие равенства и неравенства «логической алгебры», он базировал логику в конечном счете на рекурсивных определениях и доказательствах по индукции (не применяя даже доказательств от противного) – он «надстраивал» ее над «теорией величин». На этом пути Р. Грассман обосновывал то, что другие представители алгебры логики принимали аксиоматически. Данный подход был собственным изобретением братьев Грассманов – изобретением, не имевшим аналогов в предшествующих алгебро-логических исследованиях XIX в.

Рассматривая протоконструктивистскую установку Г. и Р. Грассманов с учетом их подхода к логике, их стремление последовательно проводить свою концепцию «строгого знания», мы приходим к выводу: их логические построения были единственными в своем роде не только в XIX столетии. Математики XX века долго не помышляли о том, чтобы строить логику специально для конечных множеств, хотя подобная идея была бы естественной после выдвижения Л.Э.Я. Брауэром в 1907 г. идеи о существенном различии логик конечного и бесконечного.

Только А.А. Марков, насколько нам известно, по сути дела возродил подход Р. Грассмана, когда в своих лекциях по математической логике, читанных в Московском университете (60–70 гг.), желая продемонстрировать механизм классической логики предикатов и вместе с тем не нарушать принципов конструктивизма, вводил конечную область определения предметных переменных[96]. Это влекло за собой конечность множеств как объемов понятий (если воспользоваться терминологией Р. Грассмана и всей современной ему математической логики). В этом – одна из существенных линий, связывающих Роберта (и Германа) Грассмана с «неклассической» логикой наших дней.

Б.В. Бирюков, Л.Г. Бирюкова

---

[96] *Марков А.А.* Элементы математической логики. М., 1984.

Часть первая

Герман Грассман

УЧЕНИЕ О ФОРМАХ И ФИЛОСОФИЯ МАТЕМАТИКИ

Избранное

ОЧЕРК ОБЩЕГО УЧЕНИЯ О ФОРМАХ

§ 1. Понятие равенства

Под общим учением о формах мы понимаем ряд таких истин, которые относятся ко всем отраслям математики без исключения, а посему имеем в виду только общие понятия равенства [одинаковости] и различия, связывания и разъединения. Общее учение о формах, поэтому, следовало бы предпослать всем специальным отраслям математики[1].Но этого общего учения как такового еще нет, а мы не можем пренебречь им, не запутываясь в ненужных подробностях, поэтому нам не остается ничего другого, как развить его здесь в той мере, в какой это требуется для нашей науки.

Прежде всего, необходимо установить понятия равенства и различия.

Равное с необходимостью появляется как различное, а различное – как равное, только в ином аспекте[2], – именно в этом и проявляется их двойственность, поэтому при поверхностном взгляде может показаться, что необходимы разные отношения равенства и различия[1*]. Так, например, при сравнении двух ограниченных линий можно было бы говорить о равенстве направления или длины, либо направления и длины, либо направления и положения и т.д., а для других сравниваемых вещей надо было бы в свою очередь вводить иные отношения равенства. Но уже то, что эти отношения меняются в зависимости от изменения сравниваемых вещей, доказывает, что эти отношения касаются не самого понятия равенства, а только предметов, к которым применяется одно и то же отношение равенства. В самом деле, например, о двух отрезках одинаковой длины мы не можем сказать, что они сами по себе равны, а можем только сказать, что одинакова их длина, и в таком случае именно длины [отрезков] находятся в подлинном отношении равенства. Тем самым мы сохраняем для по-

---

[1] См.: Наука об экстенсивных величинах... Введение, № 8.
[2] Там же, № 5.

нятия равенства его простоту и можем определить его[2*], установив, что *равно то, о чем всегда может быть высказано одно и то же, или более обще: то, что взаимозаменяемо в каждом суждении*[3].

Очевидно, что этим одновременно сказано: если две формы равны некоторой третьей форме, то они равны между собой, и что формы, порожденные из равных форм одним и тем же способом, снова равны между собой.

§ 2. Понятие связи

Вторая противоположность, которую мы здесь должны рассмотреть, это противоположность связывания (связи) и разъединения[3*]. Если две величины или формы (последнее название, по нашему мнению, предпочтительнее, как более общее, см. Введ., № 3) связаны между собой, то форма, которая образуется в результате, называется связью, а формы, которые связаны между собой, – ее членами. Для того чтобы различать эти члены, один из них будем называть предшествующим, а другой – последующим членом.

В качестве общего знака связи мы выбираем знак $\frown$; если при этом a и b – члены этой связи, а именно a – предшествующий, а b – последующий ее члены, то связь мы обозначаем посредством $(a \frown b)$; скобка[4*] означает здесь, что члены связи следует воспринимать не по отдельности, а как единое понятие[4]. Результат соединения может быть в свою очередь связан с другими формами, и таким образом получается связь, состоящая из нескольких членов, которые, однако, вначале всегда выступают только как соединяемые попарно. Для удобства мы будем использовать общепринятые сокращения, то есть опускать некоторые скобки, например, вместо выражения $((a \frown b) \frown c)$ писать $a \frown b \frown c$.

---

[3] Это следует понимать не как философское определение понятия равенства, а только как разъяснение этого слова, чтобы оно не воспринималось как нечто иное. Философское определение этого понятия должно, наоборот, подчеркивать противоположность одинакового и различного в их текучести и жесткой обособленности, но для этого потребовался бы изрядный аппарат определения понятий, который здесь неуместен.

[4] То, каким способом достигается это единство и что в каждом конкретном случае понимается под связью, зависит от природы рассматриваемой связи.

§ 3. Совместимость[5*] членов связи

Конкретный вид связи определяется тем, что́ фиксируется в качестве ее результата, то есть тем, при каких условиях и в каких пределах результат остается тем же самым.

Единственные изменения, которые можно производить, не меняя сами связываемые формы, – это изменение расстановки скобок и перестановка членов. Предположим сначала такую связь, что для нее в случае трех членов расстановка скобок безразлична, то есть не приводит к различным результатам, так что $a \cap (b \cap c) = a \cap b \cap c$; отсюда[6*] следует, прежде всего, что в каждой многочленной связи такого рода можно опускать скобки, не меняя результата, поскольку каждая скобка, в силу установленного выше определения, заключает в себе сначала двучленное выражение, которое в свою очередь соединяется в качестве члена с некоторой другой формой. Так возникает, коротко говоря, соединение трех форм, относительно которого было предположено, что в нем можно удалить скобки, не меняя результата их связывания; но поскольку любая форма может быть заменена равной ей, то и общий результат не меняется, если удалить упомянутые скобки[7*]. Итак,

Если связь такова, что допускает удаление скобок в случае трех членов, то это возможно при любом числе членов;

или, поскольку в двух выражениях, которые отличаются только расстановкой скобок, последние, в соответствии с только что доказанным, могут быть удалены, то эти выражения оказываются равными, поскольку каждое из них равно одному и тому же бесскобочному выражению. Тогда доказанное выше предложение получает более общую форму:

Если связь такова, что способ расстановки скобок безразличен для трех членов, тогда то же самое верно для любого числа членов.

§ 4. Перестановка (связываемых) членов. Понятие простой связи

С другой стороны, если для некоторого соединения была бы установлена только перестановочность двух ее членов, то в таком случае нельзя было бы получить никаких следствий. Если же понятие перестановочности добавить к тому, что установлено в предшествующем параграфе, то отсюда, показав, что любые два члена можно поменять местами, получим, что и для многочленного выражения порядок его членов безразличен.

В самом деле, согласно предложению, доказанному выше (§ 3), два члена, подлежащие перестановке, можно заключить в скобки, не изменяя общего результата. Затем их можно поменять местами, что не изменит связи, полученной после введения скобок (ибо мы только что предположили возможность перестановки членов двучленной связи), поэтому не изменится исходное выражение (поскольку любую форму можно заменить равной ей); наконец, можно расставить скобки так, как они стояли вначале. Тем самым доказана перестановочность любых двух рядом стоящих членов. Итак, соединяя этот вывод с выводом предыдущего параграфа, получаем:

Если связь такова, что для трех ее членов порядок расстановки скобок безразличен, а любые два допускают перестановку, то при любом числе членов расстановка скобок и порядок членов безразличны для результата.

Такую связь, для которой имеют место приведенные выше определения, мы будем называть для краткости *простой*. Определяемая ниже связь такова, что при ее применении нельзя не учитывать природу связываемых форм, и мы переходим поэтому к разъединению полученных связей, или к аналитическому способу.

§ 5. Синтетическая и аналитическая связь

Аналитическая процедура состоит в том, что по результату связи и одному из ее членов отыскивается другой. Поэтому для произвольной связи требуется два вида аналитической процедуры, в зависимости от того, какой член связи отыскивается – предшествующий или последующий. Процедуры обоих видов дают один и тот же результат только тогда, когда оба члена исходной связи обладают свойством перестановочности. Аналитическую процедуру тоже ведь можно рассматривать как связь, поэтому мы различаем исходную связь, или *синтетическую*, и связь разъединяющую [разрешающую, auflosende], или *аналитическую*[8*].

В дальнейшем будем предполагать, что связь (синтетическая в смысле предшествующего параграфа) является простой, и сохраним для нее знак $\frown$. Для соответствующей аналитической связи, поскольку в нашем случае оба ее вида совпадают, выбираем перевернутый знак $\smile$. При этом исходная синтетическая связь, к которой применяется аналитическая связь, будет выступать в качестве предшествующего члена.

Итак, $a \cup b$ обозначает здесь такую форму, которая, будучи синтетически связана с b, дает a, так что всегда имеет место $a \cup b \cap b = a$[9*]. В этой формуле одновременно содержится утверждение, что $a \cup b \cup c$ означает форму, связав которую синтетически сначала с c, затем с b, получим a. Это в соответствии с параграфом 4 означает также форму, которая, будучи синтетически связана с теми же значениями, взятыми в обратном порядке, или же с формой $b \cap c$, дает a[10*], то есть

$$a \cup b \cup c = a \cup c \cup b$$
$$= a \cup (b \cap c);$$

поскольку это рассуждение справедливо для любого числа членов, то получается, что порядок членов, перед которыми стоят аналитические знаки, безразличен и [что] такого рода члены можно заключить в скобки, заменив на противоположные знаки между членами, заключаемыми в скобки[11*]. Отсюда следует далее, что

$$a \cup (b \cup c) = a \cup b \cap c.$$

В самом деле, по определению аналитической связи, имеем

$$a \cup (b \cup c) = a \cup (b \cup c) \cup c \cap c;$$

выражение справа, в силу только что доказанного закона, равно

$$a \cup (b \cup c \cap c) \cap c,$$

и, наконец, это выражение, в соответствии с определением аналитической связи, равно

$$a \cup b \cap c,$$

а это означает, что исходное выражение равно этому последнему[12*].

Если выразить этот результат словесно и присоединить его к полученным ранее выводам, то мы будем иметь следующее предложение:

Если синтетическая связь является простой, то для результата безразлично, в каком порядке связывать, и как связывать – синтетически или аналитически. Далее, скобки, стоящие после синтетического знака, можно ставить или удалять только в том случае, если они заключают в себе синтетический член. Но после аналитического знака скобка при всех обстоятельствах может вводиться или удаляться только после замены внутри скобки знаков перед ее членами на противоположные, то есть замены аналитических знаков синтетическими, и наоборот[13*].

Таков самый общий вывод, который можно получить, исходя из принятых допущений. Но из них не следует, что могут быть удалены скобки, включающие аналитический знак, перед которыми стоит синтетический знак[14*]. Для этого, напротив, надо ввести новую предпосылку.

§ 6. Однозначность анализа. Сложение и вычитание

Новое предположение, которое мы присоединяем к прежним допущениям, состоит в том, что результат аналитического соединения должен быть однозначным, или, иначе говоря, если один из членов синтетической связи остается неизменным, а другой изменяется, то и результат непременно изменяется. Отсюда следует, прежде всего, что

$$a \cap b \cup b = a,$$

так как $a \cap b \cup b$ означает форму, которая, будучи аналитически связана с b, дает $a \cap b$. Пусть теперь a одна из таких форм; она единственна, в силу единственности результата, поэтому справедливость приведенного выше равенства доказана[15*]. Отсюда, в свою очередь, вытекает, что

$$a \cap (b \cup c) = a \cap b \cup c.$$

Для того чтобы правую часть этого выражения свести к левой, в правую часть вместо b подставим форму $((b \cup c) \cap c)$, получим

$$a \cap b \cup c = a \cap ((b \cup c) \cap c) \cup c;$$

на основании § 4, правая часть равна

$$a \cap (b \cup c) \cap c \cup c,$$

а это, в соответствии с только что доказанным предложением, равно

$$a \cap (b \cup c),$$

и, таким образом, правая часть исходного выражения равна левой части. Поскольку такого рода рассуждения можно повторять, если в скобках встречается несколько членов, мы получаем предложение:

Если синтетическая связь является простой, а соответствующая ей аналитическая – однозначной, то скобки после синтетического знака можно как угодно вводить и удалять. В таком

случае (если упомянутая однозначность имеет место всегда) мы называем синтетическую связь сложением, а соответствующую ей аналитическую – вычитанием.

Что касается порядка членов, то

$$a \cap b \cup c = a \cup c \cap b^{16*},$$

поскольку

$$a \cap b \cup c = b \cap a \cup c = b \cap (a \cup c) = a \cup c \cap b;$$

таким образом, в предположении однозначности аналитического результата, мы доказали перестановочность двух членов, перед одним из которых стоит синтетический, а перед другим – аналитический знак. Предложения данного параграфа справедливы только в этом предположении, в то время как предложения предшествующего параграфа могут быть справедливы и в том случае, если результат аналитического соединения является многозначным[5,6].

§ 7. Нейтральная и аналитическая форма

Посредством аналитической процедуры можно получить как нейтральную [неопределенную, indifferente], так и аналитическую форму.

Первая получается путем аналитической связи двух равных форм, то есть $a \cup a$ является *нейтральной* формой, причем не зависящей от значения формы a. В самом деле, $a \cup a = b \cup b$, так

---

[5] Многочисленные примеры такой многозначности, как будет показано в дальнейшем, доставляет не только учение о протяженности, арифметика тоже предоставляет их, поэтому и для нее важно установленное различие. Например, простыми связями оказываются сложение и умножение; но в то время как вычитание однозначно всегда, деление однозначно лишь при условии, что нуль не выступает в качестве делителя. Поэтому для деления всегда имеют силу только предложения предшествующего параграфа, в то время как предложения данного параграфа верны только при ограничении, что нуль не оказывается делителем. Несоблюдение этого условия должно вызывать наихудшие противоречия и путаницу, что отчасти и происходит.

[6] Предпринятая мною позднее попытка установить законы связи многозначных величин привела меня к убеждению, что для возможности применения к многозначным величинам какого-либо закона связи их всегда нужно сначала преобразовать в однозначные. Я выразил это убеждение в примечаниях к № 348 и № 477 моего «Учения о протяженностях» 1862 года, одновременно показав в первом из них, как можно преобразовывать многозначные величины в однозначные. В основе моей «Арифметики» (Штеттин, 1860, Типография и издательство Р. Грассмана) также лежит это убеждение (1877).

как $b \cup b$ представляет собой такую форму, которая, будучи синтетически связана с b, дает b; такой же формой является $a \cup a$, поскольку $b \frown (a \cup a) = b \frown a \cup a = b$. Результат аналитической связи предполагался однозначным, поэтому форма $a \cup a$ необходимо равна $b \cup b$. Итак, поскольку при принятых нами допущениях нейтральная форма всегда имеет единственное значение, то этой форме возможно присвоить особый знак. Для обозначения этой формы мы принимаем знак ∞, а форму $(\infty \cup a)$ обозначаем посредством знака $(\cup a)$ и называем *чисто аналитической* формой. Если синтетический знак – сложение, то форму $(\cup a)$ называем *отрицательной* формой. Очевидно, что каждая из форм $(a \frown \infty)$ и $(a \cup \infty)$ равна a.Форма $\frown (\cup a)$ равна $\cup a$, а форма $\cup (\cup a)$ равна форме $\frown a$. Это легко доказать, используя вместо данных форм только что введенные развернутые их выражения[7]. Аналитическую форму для сложения будем называть, в частности, отрицательной формой, а нейтральную форму, в случае сложения и вычитания, – *нулем*[17*].

§ 8. Сложение и вычитание однородных форм

До сих пор мы понимали сложение чисто формально, определяя его как подчиняющееся известным законам связи. Это формальное понятие всегда остается единственным общим понятием (сложения). Однако в конкретных разделах математики к понятию сложения приходят не таким способом. В этих разделах, наоборот, из способа порождения самих величин возникает специфический способ их связи, который затем представляется в качестве сложения в указанном общем смысле, потому что к нему оказываются применимыми соответствующие формальные законы.

Рассмотрим теперь две величины (формы), которые возникают в результате повторения одного и того же процесса порожде-

[7] Например, в случае сложения и вычитания в арифметике после того, как доказаны соответствующие законы для положительных чисел, бессмысленно пытаться доказывать их специально для отрицательных чисел. Ибо, определяя отрицательное число как такое, что оно, будучи сложено с a, дает нуль, понимают под сложением (а оно первоначально установлено только для положительных чисел) либо тот способ связи, для которого указаны основные законы, действительные для общего понятия сложения, либо какой-то другой. В первом случае доказательство излишне, так как дальнейшие законы для отрицательных чисел тогда уже доказаны. Во втором случае доказательство невозможно, если только не ставится задача иного определения сложения этих чисел. Именно последнее имеет место в случае дробей, в отличие от целых чисел.

ния. Ясно, что эти величины можно связать друг с другом так, чтобы они составляли единое целое, мысленно соединяя содержание обеих, то есть части, из которых они состоят. Ясно, что это целое будет мыслиться тогда порождаемым в том же смысле, что и обе данные величины. Теперь легко показать, что эта связь является сложением, то есть что она простая, и ее анализ однозначен. Прежде всего, я могу произвольно соединять и переставлять, поскольку части, которые при этом имеются в виду, остаются теми же самыми, и их последовательное расположение ничего не может изменить, так как все они равны (как одинаково порожденные). Но и анализ их однозначен, ибо если бы это было не так, то при синтетическом соединении, в то время как один из членов и результат оставались бы теми же самыми, другой член мог бы принимать различные значения; тогда одно из этих значений было бы больше, чем другое[18*]. Тогда к последнему можно было бы присоединить еще части, но эти же части оказались бы присоединенными и к результату, следовательно, результат стал бы другим, что противоречит предположению. Итак, поскольку соответствующая аналитическая связь однозначна, синтетическую связь можно рассматривать как сложение, а соответствующую аналитическую связь – как вычитание, поэтому для этих связей имеют силу законы, установленные в параграфах 3–7. В этих параграфах показано, что законы, которым подчиняются указанные связи, сохраняют свою силу и тогда, когда рассматриваются отрицательные величины. Сравнивая отрицательные и положительные величины, мы можем сказать, что они порождены в *противоположном* смысле; величины же, порожденные как в прямом, так и в противоположном смысле, мы можем объединить общим названием *однородных* величин, и, таким образом, нами определено общее реальное понятие сложения и вычитания однородных величин.

§ 9. Связи различных ступеней. Умножение

До сих пор мы рассматривали только *один* вид синтетической связи, как сам по себе, так и в отношении его к соответствующей аналитической связи. Перейдем теперь к изложению отношения между двумя различными видами синтетической связи. В итоге один вид связи должен быть определен через другой[19*]. Это определение зависит от того, каким образом без изменения совместного результата может быть преобразовано выражение, содержащее оба вида связи.

Самый простой способ, при котором в некотором выражении могут использоваться оба вида связи, состоит в том, что результат одной из связей подчиняется другой связи. Поэтому, если $\cap$ и $\Cap$ – знаки указанных связей, то отношение между связями зависит от преобразований, допустимых над выражением $(a \cap b) \Cap c$. Если вторая связь применима к обоим членам первой, то самое простое преобразование данного выражения состоит в том, чтобы сначала каждый член, задействованный в первой связи, подчинить второй связи, а полученные результаты в качестве ее членов – первой связи. Если это преобразование может быть осуществлено без изменения общего результата, то есть если

$$(a \cap b) \Cap c = (a \Cap c) \cap (b \Cap c),$$

то мы называем вторую связь *связью более высокой ступени*, чем первая.

В частности, если члены второй связи зависят от первой связи таким образом, что удовлетворяют приведенному выше определению, и первая связь является простой, а соответствующая ей аналитическая – однозначной, то вторую связь мы называем *умножением*, в то время как за первой связью сохраняем ранее принятое название – *сложение*. Здесь перед нами вообще тот случай, когда с самого начала, то есть когда не дано никакой связи, первая связь может быть определена вместе с присоединенной к ней связью более высокой ступени. Поэтому-то мы и рассматриваем сложение как соединение первой ступени, а умножение – второй ступени[8].

Впредь мы, вместо общих знаков для связей такого рода, выбираем общепринятые знаки, а в случае умножения просто опускаем знак связи.

§ 10. Общие законы умножения

Взаимосвязь умножения и сложения мы определили, положив, что

$$(a + b)c = ac + bc,$$
$$c(a + b) = ca + cb;$$

тем самым мы установили понятие умножения. Повторным применением этих законов мы тотчас получаем более общее предло-

[8] В качестве третьей ступени можно было бы рассматривать возведение в степень, однако краткость изложения заставляет нас оставить этот вопрос в стороне. Впрочем, ясно, что определения связей здесь совершенно формальные, и только в конкретных науках они могут быть воплощены посредством реальных дефиниций.

жение, согласно которому, если оба сомножителя разделены на слагаемые, то каждое из слагаемых одного из сомножителей можно перемножить с каждым слагаемым другого и сложить полученные произведения. Отсюда получается закон относительно взаимосвязи умножения и вычитания, а именно

$$(a - b)c = ac - bc.$$

Для того чтобы свести правую часть этого равенства к левой, мы подставим в левую часть вместо b равное ему выражение $(a - b) + b$, и получим

$$ac - bc = ((a - b) + b)c - bc.$$

Выражение справа, в соответствии с только что установленным законом, равно

$$(a - b)c + bc - bc,$$

последнее, согласно § 6, равно

$$(a - b)c,$$

следовательно, в исходном выражении левая и правая части равны между собой. Таким же путем получается соответствующий закон для случая, когда разностью является второй сомножитель. Повторным применением полученных законов мы получаем более общее предложение:

Если каждый из сомножителей произведения разделен на части посредством знака сложения или вычитания, то без изменения общего результата каждый член одного из сомножителей можно перемножить с каждым членом другого и полученные произведения соединить знаком сложения или знаком вычитания, в зависимости от того, одинаковы или различны знаки, стоявшие перед соответствующими сомножителями.

§ 11. Законы деления

В случае деления закон разложения делимого на части справедлив независимо от того, однозначен или многозначен[9] результат деления, а именно:

$$\frac{a \mp b}{c} = \frac{a}{c} \mp \frac{b}{c}.$$

Здесь следует заметить еще, что в общем случае не предполага-

[9] Ср. примечание к с. 65 и №№ 377–379 «Учения о протяженности» 1862 года (1877).

ется перестановочность сомножителей при умножении, поэтому в общем случае следует различать и два вида деления, в зависимости от того, какой сомножитель произведения требуется найти, предшествующий или последующий. Но поскольку оба сомножителя в произведении равноправны относительно сложения и вычитания, это верно и относительно обоих видов деления, и если приведенный выше закон доказан для одного вида деления, то тем самым он доказан для другого вида.

Пусть требуется найти предшествующий сомножитель. Так, если, например,

$\frac{a}{.c} = x$[10], то пусть $xc = a$.

В соответствии с этим выражение

$$\frac{a+b}{.c}$$

означает такую форму, которая, будучи в качестве предшествующего члена помножена на форму c, дает $a + b$. Каждую форму я могу сначала разъединить на две части, затем взять любую из них. Пусть искомая форма, равнозначная форме $\frac{a+b}{.c}$, равна $\frac{a}{.c} + x$. Эту форму в качестве предшествующего члена умножим на c, получим, в соответствии с предшествующим параграфом, $a + xc$.

Но форма $\frac{a+b}{.c}$, таким же образом умноженная на форму c, дает $a + b$, следовательно,

$$a + xc = a + b,$$

то есть

$$xc = b, \quad x = \frac{b}{.c}.$$

Но искомая форма по предположению равна $\frac{a}{.c} + x$, поэтому она равна форме

$$\frac{a}{.c} + \frac{b}{.c}.$$

Закон для разности получается аналогично.

---

[10] Точка в делителе указывает место искомого сомножителя.

§ 12. Реальное понятие умножения

Законы, представленные в предшествующих параграфах, выражают общее отношение умножения и деления к сложению и вычитанию. Однако законы умножения, установленные в арифметике и выражающие свойства перестановочности и совместимости (Vereinbarkeit) сомножителей, не вытекают из указанного общего свойства и потому не определяются общим понятием умножения. Наоборот, мы встретимся в нашей науке со способами умножения, при которых не выполняется, по крайней мере, перестановочность умножения, но оказываются полностью применимыми все установленные выше предложения.

Таким образом, общее понятие умножения мы определили формально. Если указана природа связываемых величин, то этому формальному понятию должно соответствовать реальное понятие, выражающее способ порождения произведения из сомножителей. Отношение к сложению дает нам общее определение этого способа порождения. А именно, если рассматривать один из сомножителей как сумму его частей (в соответствии с § 8), то на основании общего закона, связывающего сложение и умножение, вместо того чтобы применять к сумме способ порождения произведения, следует применить его к слагаемым и сложить полученные произведения. Иными словами, поскольку эти произведения можно представлять себе порожденными в одном и том же смысле, их можно соединять как части в некоторое целое. Это значит, что способ мультипликативного порождения должен быть таким, чтобы части сомножителей входили в них одинаковым образом. А именно: если некоторая часть одного из них, будучи связана посредством умножения с какой-нибудь частью другого, порождает некоторую величину, то при мультипликативном соединении каждая часть одного из сомножителей с каждой частью другого должна порождать ту же самую величину, при условии, что эти части совпадают с теми, которые были приняты изначально. Отсюда сразу вытекает: если способ порождения обладает указанным свойством, то соответствующий ему способ соединения находится в мультипликативном отношении к сложению однородных величин, поэтому для него имеют силу все законы данного отношения.

Такой способ соединения величин мы будем называть *умножением* и тогда, когда для него доказано лишь мультипликативное отношение к сложению однородных величин, или, другими словами, когда установлена одинаковость вхождения в связь всех частей подлежащих соединению членов.

Установленных нами общих законов соединения, в сущности, достаточно для изложения нашей науки, к чему мы и переходим.

Часть первая

ПРОТЯЖЕННЫЕ ВЕЛИЧИНЫ

Глава первая

СЛОЖЕНИЕ И ВЫЧИТАНИЕ ПРОСТЫХ ПРОТЯЖЕННОСТЕЙ ПЕРВОЙ СТУПЕНИ, ИЛИ ОТРЕЗКОВ

А. ТЕОРЕТИЧЕСКОЕ ПОСТРОЕНИЕ

§§ 13, 14. Протяженное образование, отрезок и система первой ступени[20*]

§ 13

Чисто научный путь изложения учения о протяженности должен бы состоять в том, что способом, который мы попытались показать во введении, исходя из понятий, лежащих в основе этой науки, детально развертывается все ее содержание. Но только для того чтобы не утомлять читателя нагромождением абстракций и одновременно, указывая на знакомые вещи, дать возможность с большей свободой и самостоятельностью обращаться с материалом, при определении новых понятий я всюду исхожу из геометрии, основу которой составляет наша наука. Однако, полагая в основу выведения истин, составляющих содержание данной науки, некоторое абстрактное понятие, я никогда не опираюсь ни на какую истину, доказанную в геометрии, поэтому получаю науку, которая по своему содержанию носит совершенно чистый и независимый от геометрии характер[11].

Чтобы получить протяженную величину, я начну с порождения линии. В этом случае имеется порождающая [производящая] точка[21*], которая занимает различные положения в некоторой непрерывной последовательности; а совокупность тех точек, в которые переходит порождающая точка при таком изменении, образует линию. Точки некоторой линии, таким образом, выступают по сути как различные и как таковые обо-

---

[11] Во введении (№ 16) я показал, что при изложении любой науки и особенно науки математической проникают друг в друга два способа ее развертывания, один из которых доставляет ее предмет, т.е. всю совокупность истин, образующих собственное содержание этой науки, в то время как другой должен служить делу овладения читателем ее предметом. В данном случае первый способ развертывания [нашей науки] у меня таков, что он остается полностью независимым от геометрии, в случае же второго, в соответствии с моими целями, я позволяю себе большую свободу.

значаются (различными буквами); но поскольку различному всегда присуще одинаковое [равное] (хотя и в некотором неопределенном смысле), постольку и здесь различные точки также выступают как разные положения одной и той же порождающей точки. Равным образом в нашей науке мы придем к протяженности, если вместо пространственных отношений примем соответствующие абстрактные [понятийные – begriffliche] отношения[22*].

Прежде всего, вместо точки, т.е. особого места, мы возьмем *элемент*, понимаемый просто как такое особенное, которое отлично от других особенных. При этом элементу в нашей абстрактной науке мы не приписываем никакого другого содержания; поэтому здесь не может быть речи ни о том, что́ собой представляет это особенное, – ибо оно есть просто особенное, без всякого реального содержания, – ни о том, в каком отношении одно из них отлично от другого. Ибо различное определяется здесь просто как различное, без какого-либо реального содержания, относительно которого оно является различным. Такое понятие элемента в нашей науке совпадает с понятием элемента в учении о комбинациях, и поэтому совпадают и обозначения элементов (с помощью различных букв)[12]. На различные элементы можно одновременно смотреть как на различные состояния порождающего их элемента, и это абстрактное различие состояний есть то, что соответствует различию местоположений.

Переход порождающего элемента из одного состояния в другое мы называем *изменением* элемента; и, стало быть, это абстрактное изменение порождающего элемента соответствует изменению места точки в геометрии. Так же, как в геометрии путем поступательного движения некоторой точки сначала возникает линия, пространственные же образования[23*] более высоких ступеней могут возникать лишь после того, как полученное образование [das Gebilde] снова приводится в движение, так и в нашей науке протяженное образование первой ступени возникает путем непрерывного изменения порождающего элемента. Объединяя результаты предшествующих рассуждений, мы можем сформулировать следующую дефиницию:

---

[12] Различие состоит только в том способе, каким в обеих науках из элементов получаются формы; а именно в учении о комбинациях это происходит просто путем простого соединения, то есть дискретно, здесь же – путем непрерывного порождения.

Под протяженным образованием первой ступени мы понимаем совокупность элементов, в которые переходит порождающий элемент при непрерывном изменении;
в частности, порождающий элемент в его исходном состоянии мы называем начальным элементом, а в его завершающем состоянии – конечным [последним] элементом.

Из этого понятия немедленно следует, что с каждым протяженным образованием связано некоторое ему противоположное, взятое в обратном порядке возникновения. Или, более определенно: если путем некоторого изменения из a получается b, то противоположное изменение состоит в том, что из b получается a. Протяженное же образование, противоположное некоторому другому протяженному образованию, – это такое образование, которое получается путем противоположного изменения, т.е. изменения, совершающегося в обратном порядке. Отсюда немедленно следует, что свойство противоположности взаимнообратно.

§ 14

Протяженное образование является простым, если изменения, претерпеваемые производящим элементом, всегда полагаются одинаковыми, т.е. если в результате некоторого изменения из элемента a возникает другой элемент – b и оба они принадлежат указанному протяженному образованию, а затем с помощью того же изменения из b порождается элемент c того же самого протяженного образования. Причем, эта одинаковость изменений должна иметь место и тогда, когда a и b рассматриваются как элементы, непосредственно примыкающие друг к другу [граничащие друг с другом], т.е. это равенство должно распространяться на весь процесс данного непрерывного порождения. Подобное изменение – изменение, посредством которого из элемента некоей непрерывной формы порождается непосредственно примыкающий к нему элемент, – можно назвать основным изменением, в этом случае мы будем говорить: «*простое протяженное образование* – это такое протяженное образование, которое возникает при непрерывном продолжении одного и того же основного изменения».

Мы можем положить равными образования, порожденные одинаковыми изменениями в том же смысле, в каком полагаются одинаковыми (равными) изменения. А именно то, что порождено равными изменениями и одним и тем же способом, должно быть признано одинаковым, в этом смысле мы называем простое протяженное образование первой ступени *протяженной величиной* или протяженным образованием первой ступени[24*], или отрезком[13]. Таким образом, простое протяженное образование становится протяженной величиной, если отвлечься от тех элементов, которые оно содержит, и оставить лишь способ их порождения; и – в отличие от двух протяженных образований, которые можно признать равными только тогда, когда они содержат одни и те же элементы, – две протяженные величины равны уже тогда, когда они, не обладая одинаковыми элементами, порождены одинаковым образом (то есть путем одинаковых изменений). И, наконец, совокупность всех элементов, которые могут быть порождены путем одного и того же основного изменения – или основного изменения, ему противоположного, – мы будем называть *системой*[14] (или областью) *первой ступени*[25*]. Таким образом, отрезки, принадлежащие одной и той же системе первой ступени, порождены либо одним и тем же основным изменением, либо изменением, противоположным ему.

Прежде чем перейти к соединению отрезков, проиллюстрируем на материале геометрии те понятия, которые были введены в предшествующих параграфах. Равенство способов изменения представлено в геометрии одинаковостью направления, поэтому в качестве системы первой ступени в ней выступает бесконечная прямая линия, а в качестве простого протяжения первой ступени – ограниченная прямая линия. То, что в нашей науке названо однородным, в геометрии выступает как параллельное. Параллельность также проявляется двояко – как параллельность в одном и том же и как параллельность в противоположном смысле [направлении][15]. Название «отрезок» мы можем (в соответствующем смысле) сохранить и в геометрии, понимая под равными отрезками такие ограниченные линии, которые имеют одинаковые направления и равные длины. ⟨ ... ⟩

---

[13] Абстрактный смысл этого названия – первоначально конкретного, – пожалуй, не нуждается в обосновании, так как все наименования абстрактных объектов поначалу имели конкретный смысл.

[14] Поскольку выражение «система» употребляется в самом различном смысле, в настоящее время я предпочитаю выражение «область» (1877).

[15] Это различение настолько важно для геометрии, что во многих случаях оно могло бы служить упрощению геометрических предложений и доказательств, если зафиксировать это различие с помощью простой терминологии, для чего я предложил бы выражения равнонаправленный [gleichlaufig] и противоположно направленный [gegenlaufig].

§ 16. Системы высших ступеней

Теперь, для того чтобы достигнуть соединения разнородных отрезков, предположим, что имеются два разнородных основных изменения, и пусть элемент первого основного изменения (или изменения, ему противоположного) произвольным образом продолжает свое изменение, а затем этот, измененный таким способом элемент пусть также придет в произвольное движение, совершая второе основное изменение; так я получаю возможность из одного и того же элемента порождать бесконечное множество новых элементов. Совокупность элементов, порожденных таким способом, я называю системой *второй ступени*. Затем я предполагаю, что имеется некоторое третье изменение, в результате которого начальный элемент не приводится ни к какому элементу упомянутой второй ступени, почему я и обозначаю его как изменение, *независимое* от двух первых изменений. Пусть произвольный элемент второй ступени произвольно продолжает это третье изменение (или ему противоположное), тогда совокупность порожденных таким способом элементов образует систему третьей ступени; а поскольку этот способ порождения по своей сути никак не ограничен, я могу на этом пути придти к системам сколь угодно высоких ступеней.

При этом важно иметь в виду, что все уже порожденные таким способом элементы нельзя рассматривать как заданные каким-либо иным способом[16] – их надо считать изначально порожденными, и поскольку они порождены с помощью различных изменений, все они оказываются – в соответствии с нашей трактовкой – отличными друг от друга. С другой стороны, ясно, что коль скоро элементы построены, они становятся уже данными, и вопрос об их различии или тождестве можно решать не иначе, как возвращаясь к первоначальному способу их порождения.

Теперь, прежде чем перейти к нашей задаче, т.е. к соединениям различных способов изменения, я хочу обратиться за помощью к геометрической наглядности. Так как ясно, что система второй ступени соответствует плоскости, а плоскость мыслится порожденной, когда все точки некоей прямой линии приводятся в движение в некотором новом направлении, которого в ней не было (или в направлении противоположном), причем именно тогда вся совокупность порожденных таким образом точек образует

[16] Подобно тому, как в учении о пространстве все точки рассматриваются как заданные исходным пространством.

бесконечную плоскость, поэтому плоскость оказывается совокупностью параллелей, и все они пересекают некоторую данную прямую. Но эти параллели не пересекаются между собой и не встречаются второй раз с заданной прямой, поэтому все полученные таким способом точки различны, и, следовательно, наша аналогия оказывается полной. Таким же путем можно прийти ко всему бесконечному пространству как системе третьей ступени, если точки, лежащие на плоскости, привести в дальнейшее движение – в новом направлении (или направлении ему противоположном), не лежащем на данной плоскости. Но дальше геометрия идти не может, в то время как абстрактная наука не знает границ.

НАУКА ОБ ЭКСТЕНСИВНЫХ ВЕЛИЧИНАХ, ИЛИ УЧЕНИЕ О ЛИНЕЙНЫХ ПРОТЯЖЕННОСТЯХ. ВВЕДЕНИЕ

А. ВЫВОД ПОНЯТИЯ ЧИСТОЙ МАТЕМАТИКИ

1. Самое главное разделение всех наук – это деление их на реальные и формальные[1*]; первые отображают бытие, независимое от мышления и ему противостоящее, истину же свою видят в согласованности мышления и бытия; вторые, напротив, имеют своим предметом то, что установлено самим мышлением, а истину свою видят в согласованности мыслительных процессов между собой[2*].

Мышление возможно только по отношению к бытию, которое мышлению противостоит и им отображается. Но в случае реальных наук бытие является самостоятельным, существующим в себе, вне мышления; в случае же формальных наук, напротив, бытие есть то, что устанавливается мышлением, и что вторичным актом мышления противопоставляется себе самому. Если истина вообще зависит от согласованности мышления и бытия, то в формальных науках, в частности, она зависит от согласованности вторичного акта мышления с тем бытием, которое установлено в результате первичного акта мышления, т.е. оно состоит в согласованности обоих актов мышления. В формальных науках, поэтому, доказательство не выходит за пределы самого мышления, не направлено на другие сферы, а замыкается в чистых комбинациях различных мыслительных актов[3*]. Поэтому-то формальные науки, в отличие от наук реальных, должны исходить не из аксиом, их основу должны составлять определения[1].

2. Формальные науки рассматривают либо общие законы мышления, либо *особенное*, установленное мышлением; одна из этих наук есть диалектика (логика)[2], другая – чистая математика.

---

[1] Если в формальных науках, таких, например, как арифметика, аксиомы, тем не менее, вводятся, то это следует воспринимать как дурную манеру, которую можно объяснить лишь тем, что подобный способ изложения принят в геометрии. Ниже я еще вернусь к этому вопросу, чтобы обсудить его более подробно. Здесь же достаточно указать на необходимость отсутствия аксиом в формальных науках[4*].

[2] В логике обнаруживается некоторая чисто математическая сторона, которую можно назвать формальной логикой; ее содержание было разработано совместно моим братом Робертом и мною; в своеобразной форме оно изложено первым во второй книге его «Учения о формах», Штеттин, 1872 (1877)[5*].

Таким образом, противоположность между всеобщим и особенным (частным) обусловливает разделение формальных наук на диалектику и математику. Первая есть философская наука, так как она вскрывает единство во всем мышлении; математика же, напротив, имеет прямо противоположную направленность, так как она в качестве особенного рассматривает все мыслимое как отдельное, каждый отдельно мыслимый объект[6*].

3. Чистая математика, в силу сказанного, есть наука о бытии *особенного* как о бытии, *созданном* мышлением. Бытие в этом смысле мы будем называть мыслительной формой [die Dankform], или просто *формой*. Поэтому чистая математика есть *учение о формах*.

Название «учение о величинах» не подходит для всей математики, так как к одной существенной ее ветви – учению о комбинациях – оно не применимо, а к арифметике применимо лишь в несобственном смысле[3]. Напротив, выражение «форма» представляется слишком широким, а название «мыслительная форма» – более уместным. Однако форма, в ее точном значении, в отвлечении от всякого реального содержания, является не чем иным, как мыслительной формой, тем самым выражение «форма» соответствует сути дела[8*].

Прежде чем перейти к подразделению учения о формах, надо изъять одну ветвь, которая до сих пор причислялась к нему неоправданно, а именно – геометрию. Уже из введенных выше понятий можно усмотреть, что геометрия, точно так же, как и механика, восходит к реальному бытию; таковым для геометрии является пространство. Ясно, что понятие пространства никак не может быть порождено мышлением, но всегда противостоит ему как нечто данное. Если кто-нибудь захотел бы утверждать противоположное, то должен был бы взять на себя задачу вывести необходимость трех измерений пространства из чистых законов мышления – задачу, невозможность решения которой обнаруживается немедленно.

Если же кто-либо, признавая это, захотел бы, тем не менее, из любви к названию «математика», распространить это название и на геометрию, то мы могли бы доставить ему это удовольствие, выдвинув со своей стороны условие, чтобы он не использовал наше название «учение о формах» или любое, ему равнозначное. Однако мы должны сразу указать на то, что первое название, поскольку оно слишком специфично, со временем обязательно было бы отброшено как излишнее.

Положение геометрии относительно учения о формах зависит от отношения наглядного представления (созерцания) пространства к чистому мышлению. Хотя мы и говорим, что это созерцание противостоит мышлению как нечто, данное самостоятельно, этим мы еще не утверждаем, что созерцание пространства возникает лишь из рассмотрения находящихся в пространстве вещей; нет, оно представляет собой основное наглядное пред-

[3] В арифметике понятие величины представлено понятием числа, немецкий язык очень хорошо отличает увеличение и уменьшение, относящееся к числу, от увеличения и уменьшения, относящегося к величине[7*].

ставление, которое дано нам вместе с нашими, открытыми для чувственного мира, органами чувств и которое присуще нам столь же изначально, сколь душе изначально присуще тело. Таким же образом обстоит дело и со временем, и с движением, основанном на созерцании времени и пространства[9*], почему и чистое учение о движении – форометрия[10*] – может быть причислено к математическим наукам с тем же правом, что и геометрия. Из созерцания движения, в силу противоположности причины и действия, проистекает понятие движущейся силы, так что геометрия, форометрия и механика оказываются приложениями учения о формах к исходному созерцанию чувственного мира.

В. ВЫВОД ПОНЯТИЯ «УЧЕНИЕ О ПРОТЯЖЕННОСТИ»

4. Все становящееся посредством мышления (ср. № 3) становится двояким способом – либо однократным актом порождения, либо двукратно – актами полагания и связывания. Возникшее первым способом есть *непрерывная форма*, или *величина* в узком смысле, а возникшее вторым способом есть *дискретная*, или *составная форма*.

Совсем простое понятие становления дает непрерывную форму. В случае дискретной формы то, что полагаемо до связывания – хотя полагание и производится мышлением – для акта связывания выступает как данное, а способ, каким из заданного возникает дискретная форма, является просто соединением в мысли. Понятие непрерывного становления легче всего постигнуть, если для начала истолковать его по аналогии с более привычным дискретным способом возникновения. В самом деле, в случае непрерывного порождения всякий раз возникшее сохраняется, а вновь возникающее – в момент своего возникновения – мыслится сливающимся с тем, что до этого было сохранено. Поэтому оказывается, что и для непрерывной формы, в соответствии с *понятием* [становления], можно различить двойной акт – полагания и связывания, или соединения, объединяющихся здесь в единый акт и тем самым сливающихся в нерасторжимое единство. Ибо из двух членов соединения (если по аналогии на миг сохранить это выражение) один есть уже ставшее, а другой – возникающее в самый момент соединения, т.е. то, становление чего не завершено до связывания. Стало быть, оба акта – акт полагания и акт связывания – всецело проникают друг в друга, так что связывание возможно до полагания, а полагание – до связывания. Или, возвращаясь к способу выражения, соответствующему непрерывному, скажем: то, что вновь возникает, возникает именно и только уже ставшим и поэтому является моментом самого становления, каковое в дальнейшем своем протекании выступает как развитие.

Противоположность дискретного и непрерывного (как и все подлинные противоположности) текуча, так что дискретное можно рассматривать как непрерывное, а непрерывное, наоборот, как дискретное. Дискретное рассматривается как непрерывное, если то, что связывается, в свою очередь, понимается как ставшее, а акт соединения – как момент становления. Непрерывное же рассматривается как дискретное, если отдельные моменты становления понимаются только как акты связывания, а соединяемое таким способом – как данное для соединения.

5[11*]. Каждое особенное (№ 3) становится таковым благодаря наличию *различного*, посредством которого оно оказывается соподчиненным некоторому другому особенному, а также благодаря наличию *одинакового*, или равного, посредством которого оно – вместе с другим особенным – оказывается подчиненным одному и тому же всеобщему. То, что возникает из одинакового, мы можем назвать *алгебраической* формой, а то, что возникает из различного – *комбинаторной* формой.

Противоположность одинакового (равного) и различного точно так же текуча. Одинаковое различно уже постольку, поскольку одно и другое, равное ему, некоторым образом разделены (без этой раздельности то и другое было бы лишь одним и тем же, стало быть, не равным); различное же одинаково, поскольку одно и другое связано посредством применяющегося к ним действия, поэтому одно и другое есть нечто связываемое. Но именно поэтому оба члена никоим образом не смешиваются друг с другом, так что к ним можно было бы прикладывать некую мерку, позволяющую определить, сколько в обоих представлениях одинакового, а сколько различного. Если даже одинаковому (равному) некоторым образом присуще различие, и наоборот, то все же каждый раз лишь одно из них составляет объект рассмотрения, в то время как другое выступает только в качестве предполагаемого основания первого.

Под алгебраической формой здесь следует понимать не только число, но и то, что соответствует числу в области непрерывного, а под комбинаторной формой – не только комбинацию, но и то, что ей соответствует в непрерывном.

6. Из перекрещивания этих двух противоположностей, первая из которых относится к способу порождения, а вторая – к порождаемым элементам, возникают четыре вида форм и соответствующих им ветвей учения о формах. А именно сначала дискретная форма разделяется на число и комбинацию (связку [пучок], das Gebinde). *Число* есть алгебраическая дискретная форма, т.е. объединение того, что полагаемо одинаковым; *комбинация* же есть комбинаторная дискретная форма, т.е. объединение того, что полагаемо различным. Науки о дискретном, следовательно, – это *учение о числах* и *учение о комбинациях* (комбинаторика, учение о соединениях).

Вряд ли нуждается в доказательстве, что тем самым полностью исчерпано и точно очерчено понятие числа, равно как и понятие комбинации. А поскольку противоположности, благодаря которым возникли эти определения, являются простейшими, данными непосредственно вместе с понятием математической формы, то тем самым вполне оправдан вывод, о котором шла речь выше[4]. Замечу еще только, что эта противоположность

[4] Понятия числа и комбинации еще семнадцать лет тому назад вполне сходным образом были развиты моим отцом в статье о понятии чистого учения о числах, которая была напечатана в программе Штеттинской гимназии в 1827 году, но осталась неизвестной более широкой публике[12*].

двух форм явственно выражается различием обозначений их элементов; ибо то, что связывается с числом, обозначается одним и тем же знаком, а то, что связывается с комбинацией, – различными и, вообще говоря, совершенно произвольными знаками (буквами). А что в соответствии с этим любое множество вещей (особенностей)[13*] может рассматриваться в качестве числа с таким же успехом, как и в качестве комбинации, – об этом едва ли стоит говорить.

7. Подобным же образом непрерывная форма, или величина, подразделяется на алгебраически-непрерывную форму, или *интенсивную величину*, и на комбинаторно непрерывную форму, или *экстенсивную величину*. То есть интенсивная величина возникает путем порождения одинакового (равного), а экстенсивная величина, или *протяженность*, путем порождения различного. Первая, в качестве переменной величины, составляет основу учения о функциях, дифференциального и интегрального исчислений, вторая – основу учения о протяженности.

Так как из этих двух ветвей имеют обыкновение первую подчинять учению о числах как более высокой ветви, вторая же выступает в качестве неизвестной еще ветви, то это рассуждение, трудное [для восприятия] из-за понятия непрерывной текучести, нуждается в более подробном разъяснении.

Как в случае числа на первый план выступает соединение, а в случае комбинации – разъединение (мыслимого соединенным), так и в случае интенсивной величины соединение элементов, которые, в соответствии с их определением, являются раздельными, образует интенсивную величину, по существу, только благодаря их одинаковости, раздельные же элементы, объединяющиеся друг с другом, коль скоро они образуют экстенсивную величину, порождают ее именно благодаря их разъединенности. Таким образом, интенсивная величина – это, так сказать, число, ставшее текучим, а экстенсивная величина – это ставшая текучей комбинация. Последняя, по существу, есть порождение элементов друг из друга и закрепление их как возникших друг за другом. Производящий элемент в этом случае выступает как изменяющийся, как пронизывающий их различные положения, а совокупность таких различных положений и образует область протяженной величины. В случае интенсивной величины, наоборот, процесс порождения последней создает непрерывный ряд равных между собой положений, количество которых как раз и составляет интенсивную величину[14*]. В качестве примера экстенсивной величины более всего подходит ограниченная линия (отрезок), элементы которой, в сущности, порождаются один из другого, и именно этим образуют линию как протяженность. Примером же интенсивной величины может служить, скажем, какая-либо точка, наделенная определенной силой [Kraft][15*], ибо элементы в этом случае не отменяются, а только усиливаются, следовательно, образуют определенную степень этого усиления.

И здесь установленное выше различение вполне обнаруживается в обозначениях, а именно в случае интенсивной величины, составляющей предмет учения о функциях, элементы не отличаются друг от друга особыми знаками, а там, где появляются особые знаки, ими обозначается переменная величина как таковая. Наоборот, в случае протяженной величины или ее конкретного представления – линии – различные элементы обозначаются разными знаками (буквами), совсем так, как в учении о комбинациях. Ясно также, что всякую реальную величину можно воспринимать двояко – и как интенсивную, и как экстенсивную. А именно линию можно рассматривать как интенсивную величину, если отвлечься от того, каким образом один из другого возникают ее элементы, и принимать во внимание только количество этих элементов; аналогично точку, обладающую силой, можно мыслить как экстенсивную величину, представляя себе силу в виде некоторой линии.

Из четырех ветвей математики дискретное исторически развито раньше, чем непрерывное (так как дискретное ближе анализирующему рассудку), алгебраическое – раньше, чем комбинаторное (так как одинаковое постигается легче, нежели различное). Поэтому первым появилось учение о числах; учение о комбинациях и дифференциальное исчисление возникли одновременно, а учение о протяженности в его абстрактной форме появилось позже всех других ветвей, но, с другой стороны, его конкретный (хотя и ограниченный) образ – учение о пространстве, был в наличии уже в самые давние времена[16*].

8. Разъединению учения о формах на четыре ветви следует предпослать общую часть, которая трактует общие законы установления связей, т.е. законы, одинаково применимые ко всем ветвям, и эту часть мы будем называть общим учением о формах[17*].

Эту общую часть – учение о формах – важно предпослать всему целому не только потому, что с ее введением устраняются повторения одних и тех же рассуждений во всех четырех ветвях (и даже в различных разделах одной и той же ветви), что значительно сокращает изложение, но и потому, что в этом случае однородное по своей сути оказывается взаимосвязанным и выступает как основа целого.

С. ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ПОНЯТИЯ «УЧЕНИЕ О ПРОТЯЖЕННОСТИ»

9. Непрерывное становление, разложенное на составляющие его моменты, выступает как непрерывное возникновение с сохранением уже ставшего. В случае протяженной формы то, что всякий раз возникает, полагается в качестве различного; если при этом в каждый момент возникающее не фиксируется, то мы приходим к понятию *непрерывного изменения*. То, что претерпевает это изменение, мы называем производящим элементом, а производящий элемент в каком-либо из его состояний, которые он принимает в процессе изменения, – элементом непрерывной формы. В соответствии с этим протяженная форма есть, стало быть, совокупность всех элементов, в которые переходит производящий элемент при непрерывном изменении[18*].

Понятие непрерывного изменения элемента может появиться лишь в случае протяженной величины; в случае интенсивной величины, если бы отбрасывалось то, что каждый раз появляется как ставшее, то оно стало бы лишь непрерывным приближением к становлению как нечто совершенно пустое.

В учении о пространстве в качестве элемента выступает точка, в качестве непрерывного изменения – изменение места, или движение, в качестве различных состояний – различные положения точки в пространстве.

10. Различное должно развиваться по некоторому закону, если результат должен быть определенным. В случае простой формы этот закон должен быть одним и тем же для всех моментов становления. Стало быть, *простая* протяженная форма есть форма, которая возникает благодаря изменению производящего элемента, происходящему по одному и тому же закону. Совокупность всех элементов, производимых по одному и тому же закону, мы будем называть *системой*, или *областью*.

Если бы различие состояний не было подчинено фиксированному закону, оно стало бы полностью неопределенным, поскольку любая данность допускает бесконечное разнообразие изменений. Однако в чистом учении о формах этот закон определяется не с помощью какого-либо содержания; благодаря чисто абстрактной идее закономерного определенным оказывается понятие протяженности, а благодаря идее одинаковости закона для всех моментов изменения – понятие *простой* протяженности. В соответствии с этим простая протяженность обладает таким свойством: если из некоторого элемента a протяженности посредством некоторого акта изменения возникает другой элемент b этой же протяженности, то из b посредством того же акта изменения возникает ее третий элемент c.

В учении о пространстве одинаковость направления есть закон, охватывающий отдельные изменения; отрезок в учении о пространстве соответствует, следовательно, простой протяженности, а бесконечная прямая линия – всей системе[19*].

11. Если применить два разных закона изменения, то совокупность элементов, производимых двумя этими законами, образует систему второй ступени. Законы изменения, по которым элементы этой системы могут проистекать друг из друга, зависят от обоих упомянутых законов; если к ним добавить еще и третий независимый закон, то получится система третьей ступени, и т.д.

Пусть в качестве примера здесь снова служит учение о пространстве. В этом учении в случае двух различных направлений из одного элемента образуются все элементы некоторой плоскости; это происходит таким образом, что производящий элемент сколь угодно далеко продвигается в обоих направлениях, а совокупность производимых таким способом точек (элементов) соединяется в одно целое. Плоскость, следовательно, есть система второй ступени; в ней содержится бесконечно много направлений, которые зависят от двух исходных. Если присоединить третье независимое направление, то тем самым будет получено все бесконечное пространство (как система третьей ступени); но далее, за пределы трех независимых направлений (законов изменения), в учении о пространстве идти нельзя, в то время как в чистом учении о протяженности число [исходных] направлений может быть увеличено до бесконечности.

12. Различие законов для их более точного определения требует в свою очередь различия способов их порождения, благодаря которым одна система переходит в другую. Этот переход различных систем друг в друга образует, поэтому, вторую естественную ступень в области учения о протяженности, ступень, которой завершается область элементарного представления этой науки[20*].

Этому переходу систем друг в друга в учении о пространстве соответствует поворот, а с ним связаны величина углов, абсолютная длина, вертикальное положение и т.д., – все то, что будет изложено лишь во второй части учения о протяженности.

D. СПОСОБ ИЗЛОЖЕНИЯ

13. Своеобразие философского метода состоит в том, что он развертывается в противоположностях и таким путем от всеобщего совершается переход к особенному; наоборот, математический метод состоит в том, что самые простые понятия развиваются до более сложных, а путем соединения особенного получаются новые и более общие понятия.

Итак, в то время как в первом случае преобладает рассмотрение целого и развитие состоит именно в постепенном разветвлении и подразделении этого целого, во втором – господствует сцепление друг с другом особенного, и каждая замкнутая в себе развивающаяся последовательность, в свою очередь, оказывается лишь звеном в следующем сцеплении. И это различие в методах определяется самими их названиями, ибо в философии исходным является именно единство идеи, особенное же оказывается выводимым; в математике же, напротив. Исходным является особенное, а идея есть заключительное, она есть то, к чему стремятся; именно этим обусловлен противоположный характер их развертывания.

14. Поскольку как математика, так и философия являются науками в самом строгом смысле, то их методы должны иметь нечто общее, а именно то, что придает им научный характер. Мы приписываем изложению научность тогда, когда читатель, с одной стороны, приводится изложением к необходимости принятия каждой отдельной истины, а с другой стороны, всегда находится в положении, когда он в каждом месте рассуждения в состоянии предвидеть направление дальнейшего движения вперед[21*].

Необходимость первого требования, а именно научности, признает каждый. Что же касается второго требования, то это все еще такой пункт, на который большинство математиков не обращают должного внимания. Часто встречаются доказательства, в которых, – если предварительно не приведена [формулировка] теоремы, – вначале совершенно не видно, куда это доказательство должно привести, и в которых вы, двигаясь некоторое время вслепую и наугад, не успеваете и глазом моргнуть, как вдруг оказываетесь при доказываемой истине. Такое доказательство с точки зрения строгости, возможно, и не оставляет желать лучшего, тем не менее, оно не является научным, – оно не удовлетворяет второму требованию – обозримости. Тот, кто следует за таким доказательством, не достигает свободного овладения истиной, а остается – если только позже самостоятельно не составит себе общего представления [о доказательстве] – в полной зависимости от того специфического способа, каким данная истина была найдена. И это чувство несвободы, которое в подобном случае возникает, по крайней мере, во время восприятия [материала], является в высшей степени удручающим для всякого, кто привык мыслить свободно и самостоятельно, а все воспринимаемое усваивать самостоятельно и живо. Если же читатель в любом месте рассуждения находится в положении человека, который видит, куда он идет, то он владеет предметом и уже не связан конкретной формой изложения, и усвоение становится подлинным сотворчеством.

15. На каждом этапе изложения характер его продолжения существенно зависит от руководящей идеи, которая является либо не чем иным, как некоторой аналогией с уже знакомой и известной отраслью знания, либо же – и это наилучший случай – представляет собой прямое предвосхищение искомой истины.

Аналогия, апеллирующая к родственной области, есть только вспомогательное средство, – если только дело не идет о том, чтобы всесторонне раскрыть взаимоотношение с родственной ветвью и таким образом установить далеко идущую аналогию с этой ветвью[5]. Предчувствие кажется чуждым области чистой науки, особенно математической. Однако совсем без него невозможно открытие новых истин; к открытию нельзя придти путем слепого комбинирования известных результатов. Что и как надлежит комбинировать – это должно определяться руководящей идеей, идея же эта, в свою очередь, – до того, как она будет реализована самой наукой, – может выступать лишь в форме предчувствия. Поэтому такое предчувствие для научной области есть нечто незаменимое. А именно предчувствие, если оно верно, – это схватывание всего процесса рассуждения, ведущего к новой истине, – схватывание, которое еще не расчленяет рассуждение на части [моменты], поэтому вначале выступает как смутная догадка. Выделение этих моментов включает в себя одновременно и открытие истины и критическую оценку соответствующей догадки[22*].

---

[5] В рассматриваемой здесь науке этот случай имеет место применительно к геометрии, почему я по большей части и предпочел путь аналогии.

16. Поэтому научное изложение есть по своей сути взаимодействие двух взаимопроникающих процессов рассуждения, один из которых последовательно ведет от истины к истине и образует подлинное содержание, а другой управляет самим методом и определяет форму.

В математике издавна сложился обычай – и образец здесь дал сам Евклид – явно выражать только один из процессов рассуждения – тот, который составляет содержание в собственном смысле, предоставляя читателю вычитывать другой между строк. Однако сколь совершенными ни были бы организация и изложение первого из процессов, тому, кто только начинает постигать науку, одного этого процесса недостаточно для того, чтобы он в любом месте рассуждения мог составить представление о целом и быть в состоянии самостоятельно и свободно продвигаться вперед. Наоборот, для этого необходимо, чтобы читатель был по возможности поставлен в положение того, кто открывает истину, находясь в самых благоприятных условиях. Но тот, кто совершает открытие истины, делает это, постоянно имея в виду общий ход рассуждения; в нем совершается особый мыслительный процесс, касающийся того пути, по которому надлежит двигаться, и той идеи, которая лежит в основе целого. Этот мыслительный процесс составляет подлинное ядро и душу его деятельности, в то время как последовательное развертывание истин представляет собой только воплощение этой идеи.

Требовать от читателя, чтобы он, не руководствуясь такого рода мыслительным процессом, тем не менее самостоятельно прошел весь путь открытия, означает ставить его выше того, кто открыл данную истину, и таким образом переворачивать отношение между ним и автором, в результате чего само авторское сочинение оказывается излишним. Поэтому-то математики, более близкие к нашему времени, и особенно французы, начали соединять оба названных процесса. Притягательная сила, которую благодаря этому приобрели их труды, состоит в том, что читатель чувствует себя свободно, он не втискивается в формы, которыми не владеет и которым он поэтому вынужден рабски следовать.

То, что в математике эти процессы расходятся резче всего, обусловлено особенностями ее метода (№ 13); поскольку последний заключается в сопряжении особенного, а единство идеи для нее не находится на первом месте. Поэтому второй из двух названных процессов по своему характеру полностью противоположен первому и их взаимопроникновение оказывается более трудным, чем в какой-либо другой науке. Из-за этой трудности, однако, вовсе не нужно, как это часто бывает у немецких математиков, отказываться от этой процедуры и отбрасывать ее.

В предполагаемом труде я поэтому и вступил на описанный выше путь, который в случае новой науки мне кажется тем более необходимым, что благодаря ему будет пролит свет на заключенную в ней идею.

ПРЕДИСЛОВИЯ К СОЧИНЕНИЯМ ОБ УЧЕНИИ О ФОРМАХ И ПРОТЯЖЕННОСТЯХ

ПРЕДИСЛОВИЕ К СОЧИНЕНИЮ 1844 ГОДА[1*]

Если труд, который я предлагаю вниманию публики, я определяю как разработку новой математической дисциплины, то оправдание этого утверждения должно заключаться в самом этом труде. Освободив тем самым себя от дальнейших объяснений, сразу перейду к описанию того пути, на котором я шаг за шагом пришел к излагаемым ниже результатам, дабы обрисовать, насколько это возможно, общие контуры новой дисциплины.

Первый толчок мне дало рассмотрение отрицательной величины в геометрии; я привык смотреть на отрезки AB и BA как на величины противоположные; но отсюда получалось, что, если точки A, B, C лежат на одной прямой, то всегда должно быть верно, что $AB + BC = AC$, независимо от того, одинаково направлены отрезки AB и BC, или же они имеют противоположные направления, то есть C лежит между A и B. В последнем же случае [отрезки] AB и BC рассматривались не просто как длины, но с каждым из них было связано свое направление, в силу чего они и были противоположны друг другу. Это вынуждало различать суммы длин [отрезков] и суммы таких отрезков, с которыми, кроме длины, связано и их направление. Отсюда вытекало требование того, чтобы понятие суммы было применимо не только к тому случаю, когда данные отрезки имеют противоположное направление, но и к любому другому случаю. Этого проще всего добиться, полагая, что закон $AB + BC = AC$ сохраняет силу и для точек A, B, C, не лежащих на одной прямой.

Таков был первый шаг к некоторому анализу, приведшему впоследствии к новой ветви математики, которая здесь представлена. Я и не подозревал тогда, какая плодотворная и богатая область открылась передо мною; напротив, результат этот поначалу не казался мне заслуживающим внимания – до тех пор, пока я не связал его с одной родственной идеей.

А именно, вникая в понятие произведения, как его рассматривал мой отец[1], я обнаружил, что не только в случае прямоугольника можно рассматривать произведение двух прилегающих друг к другу его сторон, – так же можно смотреть и на параллелограмм, правда, если считать его не просто произведением длин [сторон], но двух направленных отрезков. И когда понятие о такого рода произведении я связал с ранее установленным понятием суммы отрезков, все пришло в полное согласие; а именно, если сумму двух отрезков – сумму в упомянутом выше понимании – перемножить (в смысле только что установленного умножения) с третьим отрезком, который лежит на той же плоскости, оказалось, что такой же результат получается – да он и должен получаться, – если эти части [слагаемые] умножить по отдельности на тот же самый отрезок, а полученные произведения сложить, учтя их положительный или отрицательный знак.

Вот эта-то согласованность и натолкнула меня на мысль, что здесь открывается совершенно новая область анализа, которая может привести к важным результатам. Долгое время, однако, я не возвращался к этой идее: погрузился в свои профессиональные дела; кроме того, меня поначалу обескуражил тот странный результат, что хотя для произведения нового вида сохраняли свою силу все прочие законы привычного умножения, в частности касающиеся его отношения к сложению, оказалось, что сомножители можно менять местами лишь при том условии, что одновременно меняются на противоположные их знаки (знак + заменяется на знак –, и наоборот).

Изучение теории приливов и отливов, которой я потом занялся, побудило меня обратиться к «Аналитической механике» Лагранжа[2*], и это вернуло меня к идее нового анализа. Все выкладки Лагранжа, коль скоро применить к ним принципы моего анализа, упрощаются настолько, что вычисления зачастую становятся более чем в десять раз короче.

Все это воодушевило меня и я решил применить новый анализ к трудной теории приливов и отливов[3*]. Для этого надо было развить много новых понятий и облечь их в одежды нового анализа; в частности, понятие поворота привело меня к анализу углов, тригонометрических функций и т.д.[2] И я радовался тому, что благодаря созданному таким образом и разработанному далее анализу

[1] *Grassmann J.G.* Raumlehre. Theil II. S. 194; *Ibid.* Trigonometrie. S. 10 [Berlin bei G. Reimer, 1824 und 1835].

[2] Об этом более подробно см. ниже.

очень сложные и несимметричные формулы, лежащие в основе этой теории[3], не только превращаются в высшей степени простые и симметричные формулы, но и способ обращения с ними идет рука об руку с соответствующим понятием.

В самом деле, я мог с легкостью облекать в слова любую формулу, которая получалась в ходе рассуждений, и выражать с ее помощью конкретный закон – но не только это: каждый переход от одной формулы к другой непосредственно оказывался символическим выражением параллельно идущего понятийного доказательства – доказательства с помощью понятий. Обычно используется метод произвольного введения координат, не отвечающих существу дела и полностью затемняющих соответствующую идею[5*]; в результате вычисление превращается в механическое преобразование формул, ничего не говорящих уму и потому убивающих мысль. В отличие от этого в новом анализе идея не затуманена ничем чуждым ей и всегда просвечивает сквозь формулы, поэтому каждое их преобразование дает уму возможность постигать дальнейшее ее развитие.

Этот успех вселил в меня надежду, что в новом анализе я нашел единственно адекватный метод приложения математики к познанию природы – метод, руководствуясь которым можно также заниматься вопросами геометрии, когда усилия направлены на получение богатых обобщающих результатов[4]. Поэтому у меня созрело решение сделать целью своей жизни разработку, изложение и применение этого анализа. Посвятив этому вопросу все свое свободное время, я постепенно натолкнулся на пробелы, которые остались при прежней несистематической его разработке. В частности, выяснилось, что при принятом мною подходе и его модификациях – как я изложил его в своем труде – сумму нескольких точек можно рассматривать как центр тяжести, произведение двух точек – как соединяющий их отрезок, произведение трех точек – как расположенную между ними площадь (плоскость) [Flächenraum], а произведение четырех точек – как определяемое ими тело [Körperraum] (пирамиду).

Трактовка центра тяжести как суммы побудила меня сопоставить [полученные результаты] с барицентрическим исчислением Мёбиуса[6*], труд которого я знал только по названию; к немалой

---

[3] Ср.: *La Place*. Mecanique celeste, livre IV[4*].

[4] Действительно, вскоре выяснилось, что благодаря этому анализу в геометрии полностью стирается различие между аналитическим и синтетическим подходами.

своей радости я нашел там такое же понятие суммирования точек, как и то, к которому меня привел ход моих размышлений; это был первый и, как показало последующее развитие, единственный пункт соприкосновения нового анализа с другим, уже известным. Но поскольку в труде Мёбиуса совсем не встречается понятие произведения точек – понятие, с которого только и начинается развертывание нового анализа, так как оно соотносится с понятием суммы, – постольку для решения своей задачи с этой стороны я не мог ожидать дальнейших импульсов.

Когда я приступил к систематической разработке результатов, полученных на описанном пути, – разработке, к которой я не мог привлечь ни одно предложение, доказанное в какой-либо другой ветви математики, – выяснилось, что открытый мною анализ не относится, как мне поначалу казалось, лишь к области геометрии, и я скоро увидел, что здесь у меня возникает новая область науки, для которой сама геометрия представляет собой только сферу ее приложения.

Мне давно уже было ясно, что геометрию нельзя рассматривать как ветвь математики в том же смысле, в каком ее ветвями являются арифметика и учение о комбинациях; что, в отличие от них геометрия относится к тому, что укоренено в природе (а именно, к пространству) и что поэтому должна существовать такая ветвь математики, в которой чисто абстрактным способом строятся законы, подобные тем, которые в геометрии относятся к пространству[7*]. Благодаря новому анализу и открывается возможность построения такой чисто абстрактной ветви математики; более того, этот анализ, поскольку он не предполагает ни одного предложения, доказанного до этого иным способом, и развивается чисто абстрактно, как раз и оказывается самой этой наукой.

Существенное преимущество [новой науки] – с точки зрения формы, – заключалось в том, что теперь совершенно утратили свое значение все основные законы, выражающие пространственные представления, в силу чего и исходные положения [новой науки] стали такими же непосредственными, как и основные законы арифметики, а по своему содержанию более не ограниченными тремя измерениями. Благодаря этому они проявились во всей их непосредственности и всеобщности, предстали в существенной их взаимосвязи, а многие закономерности, которых либо вообще нет в случае трех измерений, либо же они присутствуют там в скрытом виде, при такого рода обобщенном взгляде выступили на свет с полной ясностью.

Впрочем, ход исследования, если ввести надлежащие определения – их можно найти в данном труде, – показал, что точку пересечения двух линий, линию пересечения двух плоскостей и точку пересечения трех плоскостей можно рассматривать как произведение соответствующих линий или плоскостей[5], а это приводит к очень простой и общей теории кривых[6].

Затем я перешел к разработке и обоснованию материала, предназначенного для второй части данного труда[8*]; в ней я изложу все, что предполагает понятие поворота или угла. Поскольку же эта завершающая весь данный труд вторая часть должна выйти из печати позже, мне кажется необходимым очертить целое, несколько точнее обрисовав соответствующие результаты. Для этого я сначала приведу выводы, которые были получены еще до систематической разработки [вопроса]. А именно я показал, почему произведение двух отрезков можно рассматривать как параллелограмм; как вообще [в этом анализе] учитывается направление отрезков; и как благодаря этому сомножители произведения можно менять местами, принимая при этом во внимание, что произведение двух равнонаправленных отрезков очевидным образом равняется нулю. В пользу этого понятия, как я показал, свидетельствует другое понятие, которое тоже касается направленных отрезков.

А именно, если один из отрезков ортогонально проектируется на другой, то арифметическое произведение этой проекции и отрезка, на который производится проектирование, выступает в точности как произведение исходных отрезков при условии, что имеет место мультипликативное отношение умножения к сложению. Однако это последнее произведение было совершенно другого рода, чем первое, поскольку сомножители последнего можно было произвольно менять местами, без изменения знаков, а произведение двух взаимно перпендикулярых [ортогональных] отрезков есть нуль. Я назвал первое произведение внешним а второе – внутренним, поскольку первое имеет место, когда направления отрезков расходятся, а второе – только когда они сближаются, то есть частично покрывают один другой[9*]. Понятие внутреннего произведения, которое представлялось мне необходимым [еще] при проработке «Аналитической механики», вместе с тем приводит к понятию абсолютной длины[7].

---

[5] Ср. гл. 3 первой части данного труда.

[6] Ср. ту же главу.

[7] Это понятие предполагает поворот и поэтому относится ко второй части [данного труда].

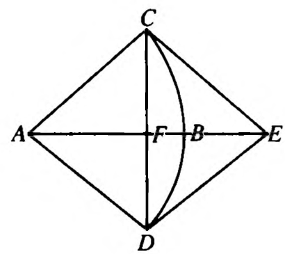


Рис. 1.

Как раз на этом пути, уже при работе над теорией приливов и отливов, у меня получились геометрические экспоненциальные величины; именно, если a – отрезок (имеющий фиксированное направление), а α – угол (на фиксированной плоскости поворота), то по чисто внутренним основаниям (изложение которых завело бы меня слишком далеко) получается, что $a.e^{\alpha}$, где e можно рассматривать как основание натуральной системы логарифмов, означает отрезок, возникающий из a в результате поворота на угол α; это значит, что $a.e^{\alpha}$ есть отрезок a, который повернут на угол α. Если, далее, $\cos\alpha$, где α есть угол в геометрическом смысле, представляет собой то же, что и $\cos\overline{\alpha}$, где $\overline{\alpha}$ – относящаяся к данному углу дуга, определенная соответствующим радиусом; тогда из упомянутого понятия экспоненциальной величины следует, что[8]

$$\cos\alpha = \frac{e^{\alpha} + e^{-\alpha}}{2}.$$

Равным образом, если $\sin\alpha$ представляет величину, перемноженную с отрезком, то поворачиваемая сторона угла α меняет свое направление на 90° и одновременно подобным же образом ее абсолютная длина изменяется так же, как и $\sin\overline{\alpha}$; таким образом,

$$\sin\alpha = \frac{e^{\alpha} - e^{-\alpha}}{2},$$

что приводит к уравнению

$$\cos\alpha + \sin\alpha = e^{\alpha};$$

все [эти] равенства отличаются бросающейся в глаза аналогией с известными мнимыми выражениями.

До сих пор это были понятия, полученные ранее. Когда же я решил их обобщить, то сначала соответствующим образом подверг расширению понятие внутреннего произведения; это было

---

[8] Действительно, пусть AB (см. рис.) есть исходный отрезок; если его повернуть на угол α так, что он займет положение AC, и на угол $-\alpha$ так, что он займет положение AD, и построить параллелограмм $ACDE$, то AE окажется суммой отрезков $AC + AD$, а AF, или половина этой суммы, составит косинус угла α.

сделано так же, как я показал выше, когда рассматривал отношение внешнего произведения к пересечению линий и плоскостей; потом я перешел сначала к понятию частного разнонаправленных отрезков и стал понимать под $\frac{a}{b}$, где a и b являются разнонаправленными отрезками равной длины, такую величину, которая каждый отрезок на одной и той же плоскости поворачивает на угол ba (в направлении от b к a), так что и в самом деле, как и должно было быть, $\frac{a}{b}b = a$; а отсюда непосредственно возникает и соответствующее понятие для случая, когда a и b имеют разную длину. Первоначальное же простое понятие тогда становится источником ряда интересных соотношений.

Прежде всего сразу получается некий новый вид умножения, соответствующий делению, – такой вид умножения, который отличается от всех прежних тем, что если один из его сомножителей равен нулю, то в нуль обращается и их произведение, и при этом сомножители сохраняют свойство перестановочности; короче говоря, такое умножение по всем своим законам остается аналогичным привычному арифметическому умножению. Понятие о таком умножении легко получается, когда я последовательно перемножаю некий отрезок и различные частные; тогда частное может заменять упомянутые сомножители, последовательно умножавшиеся [на данный отрезок]. Поскольку же согласно принятой дефиниции, если ab означает угол между двумя отрезками одинаковой длины, то

$$e^{ab} = \frac{b}{a},$$

и мы получаем

$$\log\frac{b}{a} = ab.$$

Далее, если угол ab есть m-тая часть от [угла] ac, то

$$\left(\frac{b}{a}\right)^m = \frac{c}{a},$$

так что если отрезок m раз подвергнуть последовательно повороту $\frac{b}{a}$, то его общий поворот составит $\frac{c}{a}$. Таким образом, если угол *ab* составляет половину угла *ac*, то

$$\left(\frac{b}{a}\right)^2=\frac{c}{a} \text{ и, стало быть, } \frac{b}{a}=\sqrt{\frac{c}{a}}.$$

В частности, если $\frac{b}{a}$ есть поворот, равный прямому углу, и, значит, $\frac{c}{a}$ есть поворот, равный двум прямым углам, то, поскольку $c=-a$ и, стало быть, $\frac{c}{a}=-1$, получается, что $\frac{b}{a}=\sqrt{-1}$; это означает, что $\sqrt{-1}$, умноженный на отрезок, изменяет его направление на 90° в некоторую, всегда определенную, сторону.

Это красивое истолкование мнимой величины становится еще совершеннее благодаря тому, что e^{α} и $e^{(\alpha)\sqrt{-1}}$ имеют одно и то же значение, если α есть данный угол, а (α) означает связанную с ним дугу, разделенную данным радиусом; действительно, тогда

$$\cos x=\frac{e^{x\sqrt{-1}}+e^{-x\sqrt{-1}}}{2},$$

как это и должно быть; аналогично

$$\sqrt{-1}\sin x=\frac{e^{x\sqrt{-1}}-e^{-x\sqrt{-1}}}{2};$$

эти формулы имеют чисто геометрический смысл, означая, что $e^{x\sqrt{-1}}$ есть поворот на угол, дуга которого, измеряемая с помощью данного радиуса, равна x[10*].

После этого все мнимые выражения приобретают чисто геометрический смысл, и их можно представить с помощью геометрических конструкций. Вместе с тем угол определяется как логарифм частного $\frac{b}{a}$, а потому при одинаковом положении сторон угла [получает определение] и бесконечное множество его значений. Выяснилось также и обратное: как благодаря найденному значению мнимой величины можно вывести законы [нового] анализа для плоскости; но, в отличие от этого, с помощью мнимой величины уже невозможно вывести законы для пространства. Вообще, рассмотрение углов в пространстве сталкивается с трудностями, для преодоления которых у меня не было достаточного времени.

Таковы, примерно, вопросы, которые я собираюсь рассмотреть во второй и последней части [своего труда], – во всяком случае в той мере, в какой они мною сейчас разработаны; тогда мой труд будет завершен. Я не могу сказать, когда эта вторая часть увидит свет, так как деятельность, которую требует моя нынешняя должность, не оставляет мне времени, нужного для ее спокойной разработки[11*]. Однако и первая часть этого труда представляет собой самостоятельное, завершенное целое, и я счел, что лучше опубликовать эту часть вместе с соответствующими приложениями, чем выпустить обе части вместе, но отдельно от приложений.

Когда дело идет о некоторой новой науке, стоит сразу же показать ее применение и ее отношение к родственным предметам; это совершенно необходимо для того, чтобы ее положение и значение были правильно поняты. Этой же цели должно служить и Введение. По своей сути оно скорее философского характера, и если я особо выделяю его из общей структуры данного труда, то делаю это для того, чтобы с самого начала не отпугнуть математиков его философской формой.

Дело в том, что среди математиков все еще господствует – и отчасти не без оснований – известная боязнь философского обсуждения предметов математики и физики; и действительно, большинство изысканий этого рода, особенно те, которые ведутся Гегелем и его школой, страдают неясностью и произвольностью [толкований], уничтожающими все их плоды[12*]. Несмотря на это я счел, что само дело обязывает меня указать место новой науки в системе знаний[13*], и поэтому предпослал – в расчете удовлетворить обоим требованиям – Введение, которое можно пропустить без существенного ущерба для понимания целого. Я также заметил, что из приложений пропустить можно именно те, которые касаются явлений природы (физика, кристаллография); это не нарушает общего хода рассуждений.

Для новой науки – и анализа, который она предполагает, – ее приложения к физике я считаю особенно важными, даже обязательными. Тот же анализ в его конкретной форме, то есть тогда, когда он перенесен в геометрию, оказался бы прекрасным предметом преподавания, доступным для элементарного изложения; и когда-нибудь, если представится случай, я надеюсь это показать; но в данном труде, по самому его замыслу, для этого нет места. При элементарном изложении статики, когда ее результаты оказываются наглядными и общими (и допускающими графическое представление), нужно обязательно прибегать к понятиям суммы и произведения отрезков и излагать относящиеся к этому основные законы. Я уверен: тот, кто раз это сделает, никогда потом не откажется от использования соответствующих понятий.

Я надеюсь, что меня не упрекнут в самонадеянности за то, что я признаю правомерность этой новой науки и ни в коей мере не собираюсь преуменьшать ее притязаний в области [по]знания. Ибо истина требует признания своей правоты; она не есть дело того, кто ее понял и принял, но в ней самой заключены ее сущность и ее бытие, и умалять права истины из-за ложной скромности – значит предавать ее. Однако сказанное тем более обязывает меня просить о снисходительном отношении ко всему тому, что является научным в моем труде. Ибо несмотря на все старания, касающиеся формы [изложения], я сознаю ее большое несовершенство.

Я многократно и различными способами подвергал переработке целое: то придавал ему евклидову форму, излагая [материал] в виде определений [Erklarungen] и теорем, стремясь к наибольшей строгости, то излагал его в связной форме, придающей целому наибольшую обозримость, предпосылая евклидовой форме связное изложение. И каждый раз я убеждался, что после очередной переработки многое приобретает более строгую и более обозримую форму. Однако несмотря на это, я не могу надеяться на полное удовлетворение достигнутым, и сознавая ту простую истину, что мое изложение всегда останется неполным, я решил выпустить свой труд в той форме, которая в настоящее время кажется мне наилучшей.

Я рассчитываю на снисходительное отношение особенно потому, что в силу служебных обязанностей мне удавалось выкроить очень мало времени для работы над своим трудом, да и то урывками; кроме того, моя служба не давала мне возможности выступать с публикациями об этой новой научной области или о родственных вопросах, что явилось бы для меня глотком свежего воздуха, который вдохнул бы живительные силы во все мое дело, если таковому суждено стать членом живого организма знания. Но даже если бы моя профессиональная деятельность и предполагала подобные научные публикации как собственную цель, соответствующую моим чаяниям и устремлениям, даже тогда, думается мне, я не имел бы права откладывать разработку этой науки, тем более, что разработка первой части [моего труда] сама по себе, как я смею надеяться, может проложить к ней путь.

ПРЕДИСЛОВИЕ К ИЗДАНИЮ 1877–1878 ГОДОВ

Труд, второе издание которого я публикую, привлек на протяжении двадцати трех лет, истекших с его первого издания, лишь незначительное и случайное внимание.

Это отсутствие успеха я не могу отнести на счет самой рассматриваемой [мною] науки; ибо я полностью осознаю ее фундаментальную важность, даже необходимость; причину же этого я нахожу лишь в строго научном, основанном на исходных понятиях, способе изложения. Ибо подобное изложение требует не просто случайного получения тех или иных результатов, но погружения в идеи, которые лежат в их основе, – требует постижения в целом всей основанной на них конструкции, отдельные части которой могут быть полностью поняты лишь в рамках целого. В условиях громадного прогресса математики в новое время, возникновения все новых областей математических исследований, развитие которых требовало напряженнейшей работы, в атмосфере прорыва к новым, весьма привлекательным результатам, математики не нашли времени, чтобы спокойно разобраться в этом целостном сооружении[14*].

Мои надежды занять университетскую кафедру и благодаря этому привлечь молодые силы к [моей] науке и побудить их к дальнейшей работе над ней не оправдались[15*]. Правда, события не заставили себя ждать: в последующие годы разные математики, идя другими путями, получили отдельные результаты, которые уже содержались в моем «Учении о протяженностях» 1844 года, но почти никто не упомянул мой труд. Более того, стало ясно, что он почти для всех остался неизвестным, так как в противном случае [их] результаты должны были бы получиться – благодаря их внутренней взаимосвязи – гораздо более простыми и многообещающими.

При таком положении вещей никто не станет обвинять ни издателя – за то, что он в свое время пустил в макулатуру часть экземпляров этого труда, ни меня – за то, что я не опубликовал обещанной второй части своей работы, построенной на той же основе, а вместо этого выпустил в 1862 г. все учение о протяженностях, построенное на новой основе, доведя его до конца[1]; я надеялся, что для математиков оно более подходит. Но и этот труд

[1] Die Ausdehnungslehre vollständig und in strenger Form bearbeitet. Berlin, 1862 (Enslin).

поначалу привлек столь же мало внимания, что и первый. Лишь начиная с 1867 г. дело стало меняться.

Первым, откликнувшимся на мой труд, был Герман Ганкель, который в своей «Теории комплексных числовых систем» (Лейпциг, 1867) подчеркнул фундаментальное значение моего учения о протяженностях (с. 16, 112, 119–140). Еще более решительным был поступок Клебша, который незадолго до своей смерти в подстрочных примечаниях к своей статье «Памяти Юлиуса Плюккера» (Гёттинген, 1872), на с. 8 и 28 в восторженных выражениях оценил важность моего «Учения о протяженностях» 1844 года, сказав – во втором из указанных мест: «В известном смысле координаты прямой линии, как и вообще значительная часть основных представлений новой алгебры, содержатся уже в Грассмановом “Учении о протяженностях” 1844 года; более подробное изложение соответствующих соотношений завело бы нас, однако, слишком далеко»[16*]. Благожелательное и благотворное внимание Клебша к работам других, что так выделяло этого выдающегося математика среди его современников, позволяет утверждать: если бы не смерть, неожиданно вырвавшая его из науки в расцвете сил, то он со временем нашел бы место, где изложить свои соображения об этих соотношениях, и в присущей ему манере обогатил бы далеко идущими идеями также и учение о протяженностях.

Но уже за три года до этого (1869) идеи, которые были обозначены Клебшем, начал излагать Виктор Шлегель. В своем сочинении «Система учения о пространстве согласно принципам Грассманова учения о протяженностях и как введение в последнее», вышедшем в издательстве Тойбнера (первая часть – 1872, а вторая – 1875)[17*], его автор с большой ясностью и в значительной мере самостоятельно показал, как, используя метод, вполне соответствующий существу дела, можно раскрыть то значение, которое учение о протяженностях имеет для новейших геометрии и алгебры. Особо следует подчеркнуть, что эта работа Шлегеля явилась первым трудом, в котором научные идеи учения о протяженностях были осмысленны и изложены в их внутренней взаимосвязи.

Само собой разумеется, что в учении о протяженностях как еще молодой науке содержались многообразные ростки, способные к дальнейшему развитию и требующие такового, и я сам после длительного перерыва вернулся к ним начиная с 1872 г. Мои прежние работы в этой области отражены в моем «Учении о протяженностях» 1862 года[18*], и поэтому я укажу здесь только новые работы. Во-первых, это две статьи в *Göttinger Nachrichten* (1872) – «О теории кривых третьего порядка» (с. 505) и «О взаимосвязанных полюсах и их представлении с помощью произведений» (с. 567); далее статьи в *Mathematische Annalen* – о новой алгебре и учении о протяженностях (том VII, с. 538), о механике с точки зрения учения о протяженностях (том XII, с. 222), о положении, которое занимают кватернионы Гамильтона в учении о протяженностях (том XII, с. 375). Наконец, из-под моего пера вышла статья, предназначенная для журнала Борхардта[19*]; в ней я попытался новым и более простым способом обосновать превосходные работы Рея о поверхностях, опираясь на дальнейшее развитие идей, которые были изложены в моем «Учении о протяженностях» 1862 года (№ 392) и согласно которым функции трактуются как экстенсивные величины.

В этом втором издании я оставил без изменения текст первого издания (естественно, я не говорю об отдельных опечатках), так как в представленном в нем изложении последовательно проводится одна-единственная основная идея, а способ ее разработки я считаю полностью оправданным, и он, конечно, больше говорит философски образованному читателю, чем более удобный для математиков способ изложения в «Учении о протяженностях» 1862 года. Зато я прибавил – там, где мне это казалось целесообразным, – новые подстрочные примечания, которые я снабдил пометой: 1877.

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ, ОСНОВАННЫЙ НА ОТКРЫТОЙ ЛЕЙБНИЦЕМ ГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ ХАРАКТЕРИСТИКЕ[1*]

Если своеобразная сила опережающего свое время гения проявляется уже в том, что он воспринимает и может развивать идеи, которые выдвигает его время, и он оказывается представителем своего времени, то эта сила еще отчетливее выступает в таких идеях, которые опережают время и словно бы указывают пути развития на столетия вперед.

Идеи первого рода часто одновременно высказываются выдающимися умами, если их эпоха созрела для этого (как это было, например, с дифференциальным и интегральным исчислениями, которые одновременно открыли Ньютон[2*] и Лейбниц[3*]). Но идеи второго рода оказываются достоянием отдельной личности, сокровеннейшей лаборатории его гения, в которую в состоянии проникнуть лишь немногие посвященные, способные как бы прозреть плоды, которые принесет в будущем развитие этих идей. В то время как идеи первого рода находят живейший отклик и получают дальнейшее развитие, поскольку они сами представляют наивысшее достижение своего времени, идеи второго рода по большей части не оказывают воздействия на свое время, так как понять их могут только немногие, а полностью постигнуть, возможно, – никто. Часто лишь через столетия, после того как развитие достигло нужного уровня, обнаруживается, что творческая сила гения порождала идеи, обещающие богатый урожай.

Величественная идея Лейбница, уяснение и дальнейшее развитие которой составляет предмет настоящей работы, а именно идея некоторого подлинно геометрического анализа[4*], принадлежит к идеям-образцам, идеям-пророчествам, поэтому можно не сомневаться ни секунды, что она должна разделить судьбу второго рода упомянутых идей. В силу неблагоприятного стечения обстоятельств идея эта оставалась скрытой и после того, как она могла оказать мощное воздействие, ибо еще до того как Ойленброк [Uylenbrock] извлек из забвения эту идею Лейбница, с разных сторон прокладывались пути к разработке родственного анализа[5*].

Несмотря на это, представляется важной задача пробуждения долго дремавшего ростка и воссоздания анализа, родственного тому, облик которого заключен в идее, высказанной Лейбницем. Эта идея в течение более чем столетней безвестности была исключена из процесса развития, тем не менее теперь, когда она стала известной, она ни в коей мере не устарела, она попрежнему содержит в себе полный жизненных сил росток, которому нельзя более отказывать в праве быть поставленным в связь с историческим развитием. Ибо, во-первых, тот идеал геометрического анализа, который рисовался Лейбницу в качестве цели будущего развития, нельзя ни в коей мере считать полностью достигнутым, – он все еще недостаточно учитывается математиками. А во-вторых, тот своеобразный вид, который Лейбниц придал данной идее благодаря своему способу обозначения, – правда, скорее, на примерах, – не был представлен у современных математиков в аналогичной форме. Напротив, все последующие математики, в соответствии с успехами своего времени, исходили из иных, – хотя часто намного более плодотворных, – точек зрения.

Сам Лейбниц отчетливо различает, с одной стороны, свои мысли относительно чисто геометрического анализа, формирование и завершение которого рисуется ему в виде отдаленной цели, значение которого он вместе с тем полностью осознает, а с другой стороны – свою попытку создания некоторой новой характеристики. Эту новую характеристику Лейбниц связывал с тем, чтобы сделать более вероятной реализацию мыслей о геометрическом анализе, и, если обстоятельства не позволят ему сделать это самому, то оставить потомкам памятник, который может дать в будущем толчок для осуществления его идеи – идеи геометрического анализа. Эти две идеи надо все время четко разделять, если мы хотим правильно оценить заслуги Лейбница в разработке геометрического анализа.

Легко убедиться, что характеристика, создать которую пытался Лейбниц, ни в малейшей степени не соответствует тем задачам, которые он возлагал на геометрический анализ. Она бесконечно далека от выдвинутой им же самим цели, ее можно рассматривать лишь как черновой, – хотя и заслуживающий высокой оценки, – набросок того пути, по которому следует идти, чтобы приблизиться к упомянутой цели. Нельзя утверждать, что Лейбниц располагал еще и другими способами обозначения, которые стояли ближе к достижению этой цели, ибо тогда достижимость последней стала бы более убедительной, и, значит, эти способы обозначения были бы им прямо приведены вместо других, либо, по крайней мере, как-то намечены, чего, однако, нет и следа. Таким образом, мы получили бы совершенно искаженное и неверное суждение относительно вклада Лейбница в данную область, если бы строго не придерживались взгляда, что те преимущества, которые он приписывает геометрическому анализу, ни в коем случае нельзя связывать с предпринятыми им попытками его осуществления.

Но если дело обстоит именно так, то откуда эти чрезвычайные славословия, касающиеся дела, облик которого был ему неизвестен? Откуда эти полные убежденности восхваления его значимости, это граничащее с невероятностью перечисление плодов, которые оно должно было бы принести родственным областям знания?

Мы можем ответить на эти вопросы, лишь указав: в том-то и состоит величие высоко одаренного ума, что он в состоянии предугадать важность некоторой мысли вплоть до самых отдаленных ее последствий, в то время как менее сильные умы, принимая второстепенное за важное, бездумно проходят мимо поистине великого. Именно выдающийся талант Лейбница – предвосхищать последовательности рассуждений, не расчленяя их на части, не производя их анализа, с пророческой силой строить их в своем воображении и на этой основе постигать важность вытекающих из них следствий – именно он, этот талант, привел его к грандиозным открытиям почти во всех областях знания. В данной работе я надеюсь показать, что, – если не говорить об отдельных преувеличениях, которые по большей части всегда касаются не существа дела, а способа выражения, – Лейбниц видел вещи в верном свете, и что анализ, который я строю, по крайней мере, в своей основе, дает все то, что Лейбниц считал целью геометрического анализа. Более того, выясняется даже, что существенные преимущества этого анализа были им перечислены с известной полнотой. Тем самым будет раскрыто научное значение его идеи геометрического анализа.

Для того чтобы выявить научное значение его своеобразной характеристики и на этой основе в ином свете показать его научные заслуги в данной области, при обосновании и развертывании нового анализа я избираю такой путь: я исхожу из [геометрической] характеристики Лейбница. Я показываю, как из этого зародыша, при последовательном проведении и дальнейшем развитии, при надлежащем исключении всего чуждого и обогащении идеями геометрического родства, проистекает анализ, который я склонен рассматривать как осуществление, хотя только относительное, идеи геометрического анализа Лейбница. О том, что это не тот путь, каким я пришел к своему анализу, вряд ли стоит говорить[6*].

[§ 1. ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА ЛЕЙБНИЦА][7*]

Существенным в избранном Лейбницем способе обозначений является то, что он, в соответствии с тем, как это делается в алгебре, обозначает точки, положение которых неизвестно или переменно, последними буквами алфавита, а точки, положение которых известно или неизменно, – прочими буквами. Этим приемом он пользуется затем в примерах, в частности, в примере, касающемся отношения конгруэнтности. Он полагает, что две совершенно произвольные совокупности точек конгруэнтны, если, не изменяя ни в одной из них взаимного расположения соответствующих им точек, их можно расположить на данной поверхности, и именно так, что каждая точка одной из этих совокупностей совпадет с соответствующей точкой другой. При этом он всегда полагает, что точки одной из совокупностей обозначены так же, как точки на соответствующих местах конгруэнтной совокупности. Эти простые способы трактовки и обозначения стали для него источником в высшей степени выдающегося результата. Ведь тем самым он в состоянии действительно указать уже на основании этих примеров, что возможен чисто геометрический анализ, именно такой, которому можно подчинить все пространственные обозначения. В самом деле, это имеет место тогда, когда Лейбниц в качестве знака конгруэнтности выбирает знак ♉, под x понимает точки, различающиеся по своему положению, а под a, b, c – фиксированные точки, так что

$$\ldots ax \;♉\; bc \qquad (1)$$

есть шар (центр которого есть a, а радиус – $b\,c$), а

$$\ldots ax \;♉\; bx \qquad (2)$$

означает плоскость (которая проходит перпендикулярно отрезку ab и делит его пополам) как геометрическое место точек x. Но, поскольку посредством шара и плоскости (да и одного шара) выводятся все конструкции пространства и тем самым – все виды пространственных зависимостей, то, следовательно, упомянутый выше принцип должен быть плодотворным для каждого пространственного анализа. Таким образом, выражения (1) и (2) можно воспринимать как определения шара и плоскости, откуда следует, что только на их основании может быть возведено все здание геометрии. Формулу (2) можно воспринимать как геометрическое место центров кругов, которые проходят через фиксированные точки *a* и *b*. Точно так же формула

$$ax \;\text{ȣ}\; bx \;\text{ȣ}\; cx \tag{3}$$

дает прямую линию как геометрическое место центров всех шаров, которые проходят через три точки *a*, *b*, *c*. Наконец, круговые линии оказываются линиями пересечения двух шаров, следовательно, их выражение есть

$$\begin{cases} ax \;\text{ȣ}\; ac \\ bx\, bc \end{cases}$$

или, сокращенно

$$abx \;\text{ȣ}\; abc. \tag{4}$$

Отсюда видно, как можно было бы все свести к выражению посредством шара. Поэтому такое построение геометрии, основанное на выражении (4), могло бы показать высокое научное значение единства и простоты указанного принципа. Все же, если бы я хотел обесценить основные достоинства такого построения науки, это увело бы меня далеко от намеченной цели. Мне было бы необходимо вывести все требуемые предложения и провести доказательства, а такое исследование всегда исключительно трудоемко. Но я, наоборот, хочу подтвердить применимость предложенного Лейбницем метода вычислений к решению двух фундаментальных задач геометрии – отысканию прямой линии, проходящей через две данные точки, и плоскости, проходящей через три данные точки. Пусть сначала требуется найти прямую, проходящую через две данные точки *a* и *b*. Тогда она должна быть найдена в форме выражения (3), в которое вместо *a*, *b*, *c* следовало бы ввести точки a^1, b^1, c^1, не лежащие на этой прямой линии. Тогда получаются формулы

$$\begin{cases} a^1x \;\text{ȣ}\; b^1x \;\text{ȣ}\; c^1x, \\ a^1a \;\text{ȣ}\; b^1a \;\text{ȣ}\; c^1a \\ a^1b \;\text{ȣ}\; b^1b \;\text{ȣ}\; c^1c, \end{cases} \tag{5}$$

которые в совокупности определяют прямую линию как геометрическое место точки x. Две последние из этих строчек конгруэнтностей можно свести в одну

$$aba^1 \;\text{ȣ}\; abb^1 \;\text{ȣ}\; abc^1.$$

Эта конгруэнция выражает тот факт, что вспомогательные точки a^1, b^1, c^1 лежат на окружности, плоскость которой пересекается перпендикуляром ab в центре окружности.

Точно так же получается выражение плоскости, проходящей через три точки a, b, c, не лежащие на одной прямой. Так как это выражение должно иметь вид (2), то необходимо взять две вспомогательные точки a^1 и b^1, и так как a, b, c, x должны лежать на плоскости, проходящей через эти вспомогательные точки, то мы будем иметь такие четыре формулы

$$a^1x \;\text{ȣ}\; b^1x$$

$$\left.\begin{array}{l} a^1a \;\text{ȣ}\; b^1a \\ a^1b \;\text{ȣ}\; b^1b \\ a^1c \;\text{ȣ}\; b^1c. \end{array}\right\}$$

Три последние конгруэнции могут быть сведены к одной, а именно к конгруэнции $abca^1 \;\text{ȣ}\; abcb^1$. Тогда в качестве формул для плоскости, проходящей через точки a, b, c, имеем

$$\left\{\begin{array}{l} ax^1 \;\text{ȣ}\; bx^1 \\ abca^1 \;\text{ȣ}\; abcb^1 \end{array}\right. \qquad (6)$$

(впрочем, последняя конгруэнция составлена из трех конгруэнций и выражает факт, что a^1 и b^1 симметричны относительно abc).

Если бы возникло желание придать требуемую простоту системам формул (5) и (6), то надо было бы быть в состоянии избавиться от произвольных вспомогательных точек, с которыми по смыслу задачи ничего не нужно делать, а систему формул всякий раз приводить к одной-единственной. Сразу же видно, что в обозначениях Лейбница, насколько они им развиты, этого сделать невозможно. Ибо, если пожелать оставить его обозначения, то легко видеть, насколько возрастет множество формул в случае мало-мальски сложной задачи, и какое множество элементов придется принять во внимание, в которых в случае обычной задачи нет никакой надобности.

[§ 2. КОНГРУЭНЦИЯ И КОЛЛИНЕАЦИЯ]

Выявим теперь неудовлетворительность Лейбницевой геометрической характеристики. Чем она вызвана?

Прежде всего тем, что вместо простого отношения равенства, которое только и уместно в математических формулах, дабы была возможна подстановка, вводится отношение конгруэнтности[8*]. Если для отношения конгруэнтности справедлив закон: два [объекта] порознь конгруэнтные третьему, конгруэнтны между собой, то вовсе не всегда, в случае конгруэнтности, справедливо, что вместо любого выражения можно подставить ему конгруэнтное. Пусть, например, имеем *ac* ȣ *bc* и точка *d* не лежит на перпендикуляре, опущенном из *c* на *ab*, тогда неверно, что *acd* ȣ *bcd*, хотя *ac* ȣ *bc*, так что в конгруэнцию *acd* ȣ *acd* вместо *ac* нельзя подставить конгруэнтное ему *bc*. Или еще проще: так как все точки конгруэнтны между собой, то если бы имела место взаимозаменяемость конгруэнтных, то было бы можно доказать конгруэнтность точек *abc* любой другой тройке точек, что бессмысленно.

Эту возможность подстановки, исключенную в случае вышеприведенных обозначений, мы должны с необходимостью предусмотреть для любых математических обозначений, если они должны приводить к плодотворным результатам. Поэтому мы, прежде всего, должны изменить обозначения и ввести существенное отношение – отношение равенства, просто полагая равным то, что взаимозаменяемо в каждом суждении.

Спрашивается, если *abc* конгруэнтны *def*, что тогда является равным в обеих совокупностях точек? Очевидно, в таком случае должна быть подставляема какая-то геометрическая функция трех точек *a*, *b*, *c*, равная соответствующей функции трех точек *d*, *e*, *f*. Обозначим пока эту функцию посредством *figura* или *fig.* и вместо *abc* ȣ *def* будем писать

$$fig.(a, b, c) = fig.(d, e, f)$$

и точно так же

$$fig.(a, b) = fig.(d, e),$$

если длина *ab* равна длине *de*.

Тогда обнаружение вида этой функции зависит от вида функции двух точек, именно от вида функции *fig.*(*a*, *b*), так как равенство *fig.*(*a*, *b*, *c*) = *fig.*(*d*, *e*, *f*) является композицией трех равенств

$$fig.(a, b) = fig.(d, e)$$

$$fig.(b, c) = fig.(e, f)$$

$fig.(c, a) = fig.(f, d)$.

Прежде всего, если нам удастся отыскать эту функцию и законы, которым она подчиняется, то мы имеем полное право на подстановку. Чтобы достичь этого, сначала обобщим идею Лейбница, переведя отношение конгруэнтности в другое родство – коллинеацию[9*]. Например, если о подобных фигурах мы могли бы говорить, что они имеют одинаковую форму, тогда вместо $abc \sim def$ мы могли бы писать

$form(a, b, c) = form(d, e, f)$.

Так мы могли бы посредством особых знаков выразить равенство площадей, заключенных между тремя точками, или равенство объемов между соответствующими четырьмя точками, или аффинность.

Однако мы сразу же переходим к наиболее общему линейному преобразованию, коллинеации, и для двух коллинеарных совокупностей

a, b, c, d, e, f и a', b', c', d', e', f'

полагаем равенство

$collin(a, b, c, d, e, f) = collin(a', b', c', d', e', f')$.

Среди всех этих преобразований, рассматриваемых с определенной точки зрения, конгруэнция оказывается простейшим, поскольку здесь все сводится к функциям двух точек. В этом аспекте коллинеация оказывается самым запутанным преобразованием, поскольку здесь пять точек, никакие четыре из которых не лежат на одной плоскости, могут быть поставлены в отношение коллинеации с любыми другими такими же точками, и лишь для шестой точки возможно дать определение способа преобразования: если даны шесть точек некоторой системы, тогда определены соответствующие шесть точек другой системы. Простейшая функция, к которой можно все свести при коллинеации в пространстве, является функция, зависящая от шести точек. Легко видеть, что две системы, состоящие из любого количества точек, тогда и только тогда могут быть преобразованы посредством коллинеации, когда между соответствующими шестью точками двух систем имеет место простейшее родство.

Итак, в то время как конгруэнция сводится к функции двух точек, коллинеация сводится к функции шести точек. Если же, наоборот, обращать внимание на прием, каким обусловлены две точки в случае конгруэнции и шесть точек в случае коллинеации, то коллинеация оказывается простейшим родством.

Поскольку, если даны две точки некоторой системы и только одна из соответствующей ей конгруэнтной системы, то второй точкой этой системы является произвольная точка сферы, центром которой служит первая точка второй системы, а радиус равен расстоянию между заданными точками первой системы. Первая характеристика, которая здесь выступает, является частичной, связанной с понятием сферы. Наоборот, если даны пять точек некоторой системы, никакие четыре из которых не лежат на одной плоскости, а из пяти точек соответствующей системы, полученной посредством коллинеации, никакие четыре не лежат на одной плоскости, то для любой шестой точки первой системы полностью определяется соответствующая шестая точка коллинеарной системы. Следовательно, первая характеристика системы при коллинеации является полной. Известно также, что вид зависимости шестой точки от данных точек коллинеарно-родственной системы задается плоскостью (или, если угодно, прямой линией), в то время как конгруэнция определяется сферой. Однако понятие сферы включает в себя понятие плоскости, ибо последняя может быть истолкована как сфера с бесконечно удаленным центром, но не наоборот, поскольку, как показал Г. Грассман в своем «Учении о протяженности», возможна самостоятельная часть геометрии, в которой понятие сферы не предполагается исходным. Что касается вида зависимости, – а это включается в предмет данного исследования, – коллинеация является простейшим родством.

Исходя из этого, я рассматриваю сначала только коллинеарные системы одной и той же плоскости. В таком случае четырем точкам, никакие три из которых не лежат на одной прямой, любые четыре точки, обладающие этим свойством, полагаются как соответствующие точки коллинеарно-родственной системы, но тогда для любой пятой точки одной из систем полностью определена соответствующая точка коллинеарно-родственной системы, и задача состоит в том, чтобы найти явный вид этой зависимости.

[§ 3. ТОЧЕЧНЫЕ И ЛИНЕЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ]

Все же при этом следует заметить, что сами по себе ни точки, ни бесконечные линии не могут восприниматься как величины, между тем величине принадлежит *значение меры* (метрическое значение), способное увеличиваться и уменьшаться. Если требуется связать пространственные величины, то их следует рассматривать с двух сторон, а именно, с одной стороны, учитывать их положение в пространстве, а с другой – их метрическое значение, которое может быть выражено числовой величиной. Следовательно, две пространственные величины могут быть полагаемы равными только тогда, когда равны как их положения в пространстве, так и значения меры.

Так, например, точка как таковая изображает только место в пространстве, но точка, снабженная определенным числовым коэффициентом, становится пространственной величиной. Этот коэффициент может быть равным единице, тогда и сама точка оказывается величиной, но лишь постольку, поскольку она воспринимается как наделенная способным изменяться числовым коэффициентом, в частности принимающим значение *единицы*. Тем самым точка, как всякая величина, оказывается способной к увеличению и уменьшению. Другим примером может служить ограниченный отрезок прямой линии, который становится пространственной величиной, вследствие того что линия представляется как его (бесконечное) положение в пространстве, а длина – как его метрическое значение. Если мера величины становится равной нулю, то величина исчезает, и тогда она сама должна быть полагаема равной нулю.

Точки и прямые, снабженные мерой, я буду для краткости называть *точечными* и *линейными величинами*, а под *комбинацией* ab *двух точечных величин* a и b, т.е. двух точек, наделенных коэффициентами, понимать линейную величину, линия которой проходит через точки, относящиеся к величинам a и b, а значение меры будет установлено позднее. И точно так же под *комбинацией* AB двух линейных величин A и B (т.е. двух ограниченных прямых линий) я буду понимать точечную величину, точка которой является точкой пересечения прямых линий, относящихся к величинам A и B, а коэффициент будет установлен позднее. Только сначала нужно добавить еще предположение, что результат указанной связи всегда должен иметь определенное [метрическое] значение, включая случай, когда значение меры величины, полученной посредством связи, становится равным нулю.

Прежде всего, я рассматриваю комбинацию двух точек. Если обе точки совпадают, то линия, соответствующая их комбинации, является неопределенной, и результат связывания был бы неопределенным, если не предполагать, что в таком случае значение меры [их комбинации] станет равным нулю. Итак, чтобы сделанное выше предположение оставалось в силе, мы должны положить равной нулю комбинацию двух точечных величин, если их точки совпадают. Из тех же соображений линейные величины полагаются равными нулю, если соответствующие им прямые линии совпадают. Далее, *если одна из двух точечных величин равна нулю*, то ее точка может иметь произвольное положение, и, следовательно, линия, соответствующая комбинации этой точки с другой точечной величиной, неопределенна. Итак, для того чтобы сохранить справедливость сделанного предположения, нужно положить равной нулю комбинацию рассматриваемых точек. На том же основании и комбинация двух линейных величин полагается равной нулю, если одна из них равна нулю. Но так как ни в каких других случаях, кроме названного выше, пространственное положение результата не является неопределенным, то мы должны установить, что ни в каких других случаях результат не может быть равным нулю. Таким образом, мы получаем окончательное определение:

Две точечные величины или две линейные величины дают в результате комбинации нуль тогда и только тогда, когда или одна из них нуль, или обе занимают одно и то же положение.

Этот способ обозначения позволяет представить каждую линейную зависимость в виде равенства, одна из сторон которого есть нуль, в то время как другая не содержит никаких иных связей, кроме установленных выше.

Например, равенство

$$ab = 0,$$

означает, что точки a и b совпадают, а равенство

$$(ab)(cd)e = 0,$$

означает, что e является точкой пересечения прямых ab и cd, так как комбинация (ab) (cd) выражает точку пересечения прямых ab и cd, а равенство $(ab)(cd) = 0$ – тот факт, что e совпадает с этой точкой. В подобных равенствах вместо каждой отличной от нуля точечной или линейной величины можно подставлять другие такие же величины с одинаковым положением в пространстве, т.е. такие, которые в комбинации дают нуль. Ясно также, что теперь посредством такого понятия равенства комбинаций можно сформулировать принцип коллинеации, заключающийся в том, что для каждого равенства комбинаций точек некоторой системы имеет место равенство комбинаций соответствующих точек коллинеарной системы.

Остается еще рассмотреть комбинацию точечной и линейной величин. Для этого случая мы можем аналогично установить факт, что комбинация обращается в нуль тогда и только тогда, когда или один из связываемых членов есть нуль, или же данная точка лежит на рассматриваемой прямой.

Насколько плодотворна эта простая идея и сколько из нее следует неожиданных выводов о природе кривых линий, Г. Грассман показал в своей статье в журнале Крелле Journal für Math., Band 31. Указанным способом можно установить равенство, связывающее десять точек плоскости, пять из которых коллинеарны остальным пяти, поскольку для этого требуется лишь полученным выше способом посредством линий составить известную конструкцию из пяти соответствующих точек, для того чтобы получить требуемое равенство. Однако все это могло бы оказаться слишком сложным и вовсе неподходящим для непосредственного представления сути коллинеации.

[§ 4. СЛОЖЕНИЕ ТОЧЕЧНЫХ И ЛИНЕЙНЫХ ВЕЛИЧИН]

Для того чтобы получить требуемое равенство, нужно так обобщить понятие комбинации, чтобы во внимание принималось значение меры. Этому может способствовать аналогия с умножением, которая сразу же бросается в глаза. Эта аналогия между умножением и комбинацией точечных и линейных величин проявляется особенно заметно в следующем: если один из связываемых комбинацией членов равен нулю, то результат тоже равен нулю, и если результат равен нулю, то он остается равным нулю, даже если значение меры отличного от нуля связываемого члена может увеличиваться или уменьшаться. Посему мы распространим эту аналогию, полагая, что если α и β числовые величины, A и B – точечные или линейные величины, то $(\alpha A)(\beta B) = \alpha\beta(AB)$. Итак, если, например, A и B точки, то комбинация точечных величин равна комбинации точек, умноженной на произведение коэффициентов этих точечных величин.

Существенное свойство умножения заключено в его отношении к сложению (см. Учение о протяженности, § 10), а именно вместо умножения суммы, не изменяя результата, можно равным образом умножить слагаемые по отдельности и сложить полученные произведения. Мы должны, поэтому, проверить, нельзя ли понятиям суммы точечных и линейных величин, равно как и определению значения меры комбинации, понимаемой теперь как произведение, придать такой вид, чтобы сохранить в силе указанное отношение умножения к сложению.

Предположим теперь, что сумма двух точечных величин – снова точечная величина, и рассмотрим сначала сумму двух точек $a + b$. Так как по смыслу сложения для каждой суммы $a + b = b + a$ и сумма должна быть определенной величиной, то получается, что точка-сумма имеет одинаковое положение относительно a и b и ее положение должно быть определенным, следовательно, ее место может быть только посредине между a и b.

Пусть s – середина между a и b, а x – коэффициент суммы, следовательно,

$$xs = a + b. \tag{7}$$

Теперь, если мультипликативное отношение справедливо, то должно быть

$$xss = sa + sb,$$

но так как ss есть нуль (как комбинация совпадающих точек), то

$$0 = sa + sb, \quad \text{или} \quad sa = -sb,$$

т.е. sa и sb (равные по длине и противоположно направленные отрезки) в обсуждаемом анализе должны пониматься как равные (мы бы сказали, по модулю. – *З.К.*), но противоположные величины. Далее, умножив это равенство на a, имеем

$$xas = aa + ab = ab,$$

так как aa есть нуль. Теперь, ab вдвое длиннее, чем as, и одинаково направлено с as. Если обозначить через $2as$ удвоенное as, когда оно расположено на одной и той же линии и одинаковом расстоянии, то $ab = 2as$, откуда

$$xas = 2as,$$

следовательно, $x = 2$ и тем самым

$$a + b = 2s, \tag{8}$$

т.е. *сумма двух точек есть их середина с коэффициентом* 2.

Пусть теперь r – некоторая точка, тогда, если требуется, чтобы отношение умножения к сложению было всегда справедливо, то должно быть

$$ra + rb = r(a + b) = 2rs. \tag{9}$$

Отсюда тотчас же следует, что сумма ra и rb есть диагональ rd параллелограмма $arbd$, и что, если ra и rb имеют одинаковое направление, то сумма так же велика, как составленные вместе эти два отрезка, следовательно, сумма оказалась бы той же самой, если сложить отрезки как числовые величины. Существенно, что если

a, b, c – точки, лежащие на одной и той же прямой линии, то всегда $ab + bc = ac$. Отсюда следует также, что $\alpha\, ab$, где α – некоторое число, можно истолковать как линейную величину, которая имеет то же положение, что и ab, и больше, чем ab, в α раз, и что отрезок ab представляет собой в точности значение меры комбинации ab, в то время как линия ab – бесконечное положение этой комбинации.

Теперь мы можем легко отыскать сумму $\alpha a + \beta b$, где α и β – числа, а a и b – точки, если сумма $\alpha + \beta$ отлична от нуля. А именно пусть

$$\alpha a + \beta b = xs,$$

тогда для каждой точки r:

$$r(\alpha a + \beta b) = xrs,$$

т.е.

$$\alpha ra + \beta rb = xrs \tag{10}$$

и, стало быть, rs есть нуль, если r и s совпадают. Тогда имеем

$$\alpha sa + \beta sb = 0, \tag{11}$$

т.е. s – центр тяжести отрезка, соединяющего точки a и b, если к ним приложены веса, пропорциональные числам α и β. Далее, если r и a в равенстве (10) совпадают, т.е. ra становится равным нулю, то

$$\beta ab = xas,$$

если же в (10) r равно b, т.е. rb становится равным нулю, то

$$\alpha ba = xbs.$$

Итак, *сумма двух точечных величин, коэффициенты которых отличны от нуля, является центром тяжести с коэффициентом, равным сумме коэффициентов точечных величин.*

Каким образом эта связь точек или точечных величин, названная здесь сложением (можно показать, как это название связано с существом дела), каким образом из нее выводится соответствующее вычитание, как разность двух точек оказывается отрезком с постоянным направлением и длиной[1], каким образом

[1] Для того чтобы предотвратить недоразумения, я замечу здесь, что линейная величина ab и отрезок $b - a$ имеют схожий, но совершенно разный смысл, поскольку равенство $b - a = d - c$ выражает *только* то, что линия, проведенная от a к b, по длине равна линии, проведенной от c к d. Равенство же $ab = cd$ выражает не только это, но одновременно и то, что ab и cd – части одной и той же линии.

из сложения происходит вычитание таких отрезков, – все это можно здесь не рассматривать, поскольку можно предполагать известным из сочинений и исследований Мёбиуса и Г. Грассмана. Теперь ясно, каким образом можно продолжить пройденный путь, для того чтобы получить подобные методы и законы. Все же ниже я выведу эти законы, по крайней мере, для точек и их кратных.

Именно по этой причине я не могу здесь останавливаться на том, чтобы показать, каким образом связь, обозначенная здесь как комбинация, может быть охвачена единым понятием с алгебраическим умножением. При этом для первого я резервирую название внешнее, или комбинаторное, умножение. Я не показываю, как отсюда развертывается операция умножения отрезков (как линий фиксированной длины и направления) и умножения точечных величин на отрезки, как можно комбинаторно перемножать между собой линейные величины и как отсюда снова вытекают соответствующие законы для умножения плоских областей между собой и с отрезками. Относительно всего этого я должен отослать читателя к «Учению о протяженности» Грассмана.

Поэтому я перехожу, применяя коллинеацию, к развертыванию действительно новых методов вычислений, причем, предполагаю известными результаты, полученные в указанном сочинении.

[§ 5. ФУНКЦИЯ КОЛЛИНЕАЦИИ]

Мы отыскивали вид функции коллинеации. Теперь, если предположить

$$collin(a, b, c, d, e) = collin(a', b', c', d', e'),$$

а под abc понимать площадь треугольника с углами a, b и c, положительную, если c лежит левее ab, то получается (Учение о протяженности, § 165):

$$\left(\frac{eab}{dab}\right):\left(\frac{ebc}{dbc}\right)=\left(\frac{e'a'b'}{d'a'b'}\right):\left(\frac{e'b'c'}{d'b'c'}\right).$$

Все же из такого соотношения точка e' не может быть определена через остальные точки, т.е. отношение коллинеации не выражено полностью. Но если добавить два таких соотношения

$$\left[\left(\frac{eab}{dab}\right):\left(\frac{ebc}{dbc}\right):\left(\frac{eca}{dca}\right)\right]=\left[\left(\frac{e'a'b'}{d'a'b'}\right):\left(\frac{e'b'c'}{d'b'c'}\right):\left(\frac{e'c'a'}{d'c'a'}\right)\right],$$

где скобки с обеих сторон равенства должны выражать два соответствующих отношения, разделенные знаком «:», то мы можем воспринимать выражение

$$\left[\left(\frac{eab}{dab}\right):\left(\frac{ebc}{dbc}\right):\left(\frac{eca}{dca}\right)\right] \tag{13}$$

как функцию коллинеации для плоскости.

Впрочем, для пространства, из равенства

$collin(a, b, c, d, e, f) = collin(a', b', c', d', e', f')$

можно было бы получить

$$\left[\left(\frac{fabc}{eabc}\right):\left(\frac{fbcd}{ebcd}\right):\left(\frac{fcda}{ecda}\right):\left(\frac{fdab}{edab}\right)\right], \tag{14}$$

если под $abcd$ понимать тетраэдр, углы которого суть a, b, c, d. Равным образом, можно получить из равенства коллинеаций соотношение, аналогичное (14), относительно a', b', c', d', e', f', содержащее равенство трех отношений, а выражение (14) представляло бы функцию коллинеации для пространства.

§ 6. ВОЗВРАТ К КОНГРУЭНЦИИ. РАВЕНСТВА МЕЖДУ ПРОСТРАНСТВЕННЫМИ ВЕЛИЧИНАМИ

Теперь я опять свяжу получение нового метода вычислений с идеей Лейбница, отправляясь от простейшего в некотором смысле родства – коллинеации к простейшему в другом смысле родству – конгруэнции, из которой первоначально исходил Лейбниц, и, используя связи, ранее выведенные из коллинеации, точнее, связи, выводимость которых была доказана, теперь же предполагаемых известными, соответствующим образом истолковать конгруэнцию.

Принцип конгруэнции *нельзя* получить, исходя из рассмотренных до сих пор взаимосвязей, так как последние касаются только проведения прямых линий или пересечения плоскости прямой линией, проходящей через данную точку плоскости и не принимают во внимание природы кругов и сфер, как это имеет место в случае коллинеации. Так как до сих пор часть грассмановского учения о протяженности касается только понятий прямых линий и плоскостей, то мы в этом произведении не предпринимаем – за исключением отдельных указаний в определениях этих понятий – их дальнейшего развития. Поэтому, дабы не нарушать строгости изложения, я избираю впредь такой путь: после формировки некоторого понятия я еще раз представляю это понятие в виде дефиниции, а законы, которые из нее вытекают, развиваю в строгой математической форме.

Простейший случай конгруэнции, к которому может быть приведен любой другой случай, состоял в том, что две прямые линии одинаковой длины могут быть полагаемы конгруэнтными, следовательно,

$$fig.(a, b) = fig.(c, d), \tag{15}$$

если часть линии ab по длине была равна части линии cd. Далее, выше мы познакомились с равными линейными величинами и равными отрезками. Линейные величины ab и cd мы полагаем равными тогда и только тогда, когда они лежат на одной и той же линии, имеют одинаковое (не противоположное) направление от начальной до конечной точки и равные длины. Наоборот, отрезок мы понимает как разность двух точек, поэтому $a - b$ и $c - d$ должны полагаться равными тогда и только тогда, когда оба отрезка (от b до a и от d до c) имеют одинаковое направление и равные длины. Отсюда следует, что если две ограниченные прямые линии, например от a до b и от c до d, равны как линейные величины, т.е. $ab = cd$, тогда они должны быть равны и как отрезки, т.е. $b - a$ должно быть равно $d - c$, но не наоборот, поскольку если $b - a$ равно $d - c$, то ab только тогда равно cd, когда a, b, c, d лежат на одной и той же прямой линии[10*]. Далее следует, что если указанные ограниченные линии были бы равны как отрезки, значит $b - a = d - c$, они были бы и конгруэнтны, т.е. имели бы равные длины, но не наоборот, поскольку равенство отрезков только тогда следует из равенства длин, когда соответствующие им направления выбраны одинаковыми.

Конгруэнция связана, прежде всего, с равенством отрезков, но поскольку всякий раз, когда

$$a - b = c - d,$$

имеет место

$$fig.(a, b) = fig.(c, d),$$

мы можем выражение *fig.*(a, b), представляющее длину прямой линии от точки a до точки b, рассматривать как функцию от $a - b$. Поэтому, если f есть знак этой функции, вместо *fig.*(a, b) мы можем писать $f(a - b)$ и вместо равенства (15) получим равенство

$$f(a - b) = f(c - d). \qquad (16)$$

Отсюда мы получаем преимущество – право трактовать длину как функцию одной-единственной величины.

Этой функции следует придать такой вид, чтобы равенство (16) было истинно только в случае, когда $a - b$ и $c - d$ имеют равные длины. Для того чтобы найти такую функцию, примем сначала, что все рассматриваемые величины лежат на одной и той же прямой. Здесь две части линии, имеющие одинаковую длину, могут иметь либо одинаковое, либо противоположное направление. В первом случае эти части равны как отрезки, во втором один из отрезков является отрицательным по отношению к другому. Итак, если p – один из отрезков, другим отрезком, имеющим ту же длину, будет $(-p)$. Но кроме p и $(-p)$ на одной и той же [ограниченной] линии не может быть ни одного отрезка, имеющего равную с отрезком p длину. Отсюда следует, что $f(p)$ должна иметь такую форму, что $f(p) = f(-p)$. Если бы можно было с отрезками на прямой линии действовать как с числами, то искомой была бы функция – простейшая из функций, удовлетворяющих поставленным условиям. Сначала мы исследуем, насколько законы числовых связей применимы к отрезкам одной и той же прямой линии, или вообще, могут ли эти законы применяться к величинам, которые, как отрезки одной и той же прямой линии, пропорциональны ряду числовых величин.

(Определение 1). *Я полагаю, что последовательность пространственных величин A, B, ... пропорциональна числовой последовательности α, β, ..., если некоторая пространственная величина M (отличная от нуля) имеет вид $A = \alpha M$, $B = \beta M$[2],... и так далее, и в таком случае пространственные величины называю однородными. Если, далее, две последовательности про-*

---

[2] Если я представляю некоторую величину как *произведение* некоторой числовой величины α на пространственную величину A, то это должно выражать тот факт, что для умножения справедливы законы умножения и деления чисел, именно, что должно быть

$$\beta(\alpha A) = (\beta\alpha)A \quad \text{и} \quad \alpha A/\beta = (\alpha/\beta)A.$$

Эти свойства используются в последующем доказательстве.

странственных величин пропорциональны одной и той же числовой последовательности, то последовательности пространственных величин я называю пропорциональными.

Отсюда сразу следует (Теорема 1): *если последовательность пространственных величин A, B,... пропорциональна числовой последовательности α, β, ..., а эта числовая последовательность, в свою очередь, пропорциональна другой числовой последовательности, то последовательность пространственных величин пропорциональна этой другой числовой последовательности.*

Поскольку любая последовательность чисел, пропорциональная числовой последовательности α, β, ..., может быть представлена в виде $\rho\alpha$, $\rho\beta$, ..., где ρ – произвольное число, отличное от нуля, то положив теперь $M' = M : \rho$, т.е. будем иметь

$$A = \alpha\rho M', \quad B = \beta\rho M', ...,$$

иными словами, A, B, ... соотносятся так же, как $\alpha\rho$: $\beta\rho$: ..., т.е. как любая числовая последовательность, пропорциональная α, β,... .

Если имеется некоторое алгебраическое равенство, в котором встречаются α, β, ..., и это равенство не нарушается, если вместо последовательности чисел α, β, ... подставить пропорциональную последовательность пространственных величин A, B, ..., то можно утверждать, что полученное равенство не обладает никакими свойствами, отличными от свойств исходного равенства.

Пусть теперь описанное выше равенство имеет вид

$$F(\alpha, \beta, ...) = F'(\alpha, \beta, ...), \tag{17}$$

где знаки F и F' представляют однородные алгебраические функции, имеющие равные степени, т.е. две функции, члены которых имеют вид $\lambda\alpha^a \beta^b$ ..., и суммы их степеней $a + b + ...$ равны между собой, а λ – произвольная числовая величина. Если положить $a + b + ... = x$, а вместо α, β, ... подставить пропорциональную последовательность чисел $\rho\alpha$, $\rho\beta$, ..., где ρ – отличное от нуля число, то функция $F(\rho\alpha, \rho\beta, ...)$ будет равна функции $\rho^x F(\alpha, \beta, ...)$, а $F'(\rho\alpha, \rho\beta, ...) = \rho^x F'(\alpha, \beta, ...)$, кроме того

$$F(\alpha, \beta, ...) = F'(\rho\alpha, \rho\beta, ...). \tag{18}$$

Подставим теперь вместо числовой последовательности α, β, ... последовательность пространственных величин A, B, ...; полученное равенство

$$F(A, B, ...) = F'(A, B, ...) \tag{19}$$

я называю однородным алгебраическим равенством пространственных величин A, B, ... и, таким образом, получаю следующее определение:

(Определение 2). *Я полагаю однородное алгебраическое равенство пространственных однородных величин, т.е. величин, пропорциональных некоторому ряду числовых величин, верным тогда и только тогда, когда является верным равенство, полученное из данного подстановкой вместо пространственных величин пропорциональных им числовых величин. Я говорю, что полученные таким путем связи пространственных величин соответствуют алгебраическим связям числовых величин.*

Отсюда следует теорема (Теорема 1b): Для однородных пространственных величин имеют место все алгебраические связи, которые могут быть представлены однородными равенствами этих величин, и указанные равенства между однородными пространственными величинами справедливы также для пространственных величин, пропорциональных данным.

Эту теорему я использую только применительно к отрезкам, лежащим на одной и той же прямой линии, но ее можно формулировать в общем виде, поскольку она истинна при распространении алгебраических связей на пространственные величины.

§ 7. ВНУТРЕННЕЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ ОТРЕЗКОВ

Если вернуться теперь к равенству

$$f(p) = f(-p),$$

то ясно, что оно самым простым способом удовлетворяется, если положить $f(p) = p^2$, ведь $p^2 = (-p)^2$ и в том случае, если p представляет отрезок. Поскольку p связано с $-p$ так же, как 1 с -1 (определение 1), то p^2 полагается равным $(-p)^2$, в силу определения 2, если $1^2 = (-1)^2$, а последнее имеет место.

Мы можем, поэтому, попытаться вообще положить, что квадрат p равен квадрату q, если p и q – отрезки равной длины, лежащие на одной и той же прямой линии. Однако остается сомнение, можем ли мы рассматривать этот квадрат вполне соответствующим арифметическому квадрату. Ибо умножению, посредством которого связываются оба сомножителя этого квадрата, вообще говоря, присущ некий [специфический] закон, позволяющий сравнивать квадрат одних направленных отрезков с квадратами других направленных отрезков. Иными словами, естественную ли гипотезу мы выдвигаем, в общем случае принимая квадрат p в качестве функции $f(p)$. Во всяком случае, предварительно, до выдвижения этой гипотезы, присвоим этой операции определенное название. Мы назовем ее *внутренним умножением*, а внутреннее произведение двух равных отрезков – *внутренним квадратом этих отрезков*. Комбинируя сказанное с объяснением 2, мы приходим к следующему объяснению:

(Определение 3). *Под внутренним произведением двух параллельных отрезков мы понимаем такую величину, которая полагается пропорциональной числам, возникающим, если измерить одной и той же мерой оба параллельных отрезка этого внутреннего произведения, а количества обеих мер перемножить между собой, при том, что все меры полагаются равной длины. Внутреннее произведение двух отрезков обозначаем посредством* $a \times b$, *внутренний квадрат* $a \times a$ *посредством* a^2.

Так, например, $a \times b$ и $c \times d$ пропорциональны числам, которые возникают, если a и b измерены посредством r_1, а c и d – посредством r_2, причем r_1 и r_2 имеют одинаковую длину, отрезок r_1 параллелен отрезкам a и b, r_2 – отрезкам c и d. Из определения сразу следует, что $a \times b = b \times a$, и $a \times (b + c) = a \times b + a \times c$, если a, b, c – параллельные отрезки. В таком случае и равенства имеют тот же смысл, какой предписан определением 2.

Теперь придется определить внутреннее произведение неравнонаправленных отрезков.

Определение такого понятия можно получить, пытаясь сохранить общую взаимосвязь умножения и сложения и предполагая перестановочность сомножителей, с тем чтобы внутреннее умножение разнонаправленных отрезков и внутреннее умножение равнонаправленных отрезков составляли единое понятие. Если временно предположить, что выполнены указанные условия определения понятия этого произведения, то отсюда сразу следует, что

$$(a + b) \times (a + b) = a \times a + b \times b + b \times a + a \times b, \text{ т.е.}$$

$$(a + b)^2 = a^2 + 2a \times b + b^2. \tag{20}$$

Отрезки представлены как разности точек, а именно

$$a = B - A, \quad b = C - B,$$

т.е.

$$a + b = B - A + C - B = C - A.$$

Поэтому, если a и b – взаимно перпендикулярные отрезки, то

$a + b$ – гипотенуза прямоугольного треугольника, катеты которого суть a и b, и, следовательно,

$$(a + b)^2 = a^2 + b^2. \qquad (21)$$

Из сравнения равенств (20) и (21) следует, что $2a \times b = 0$, а значит, и $a \times b = 0$, т.е. внутреннее произведение двух взаимно перпендикулярных отрезков следует положить равным нулю.

Из сказанного можно получить понятие внутреннего произведения двух произвольных отрезков a и b.

Пусть имеем

$$a = A - E, \quad b = B - E.$$

Опустим перпендикуляр из точки B на EA, пусть C – точка пересечения, тогда

$$B - E = B - C + C - E.$$

Значит, имеет место и

$$a \times b = (A - E) \times (B - E) = (A - E) \times (B - C + C - E) =$$
$$= (A - E) \times (B - C) + (A - E) \times (C - E).$$

Первое слагаемое из полученной в итоге суммы равно нулю, так как $A - E$ перпендикулярно $B - C$, поэтому

$$a \times b = a \times (C - E),$$

но $C - E$ – ортогональная проекция отрезка b на a. Отсюда следует определение:

(Определение 4). *Под внутренним произведением $a \times b$ двух непараллельных отрезков a и b следует понимать внутреннее произведение первого из них, a, на ортогональную проекцию отрезка b на отрезок a*[11*].

Из этого определения мне следует вывести законы внутреннего умножения, не прибегая при этом к помощи теорем, принятых при определении названного понятия[3], а именно, во-первых:

[3] Чрезвычайно важно четко различать следующий ниже ход математического доказательства и использованный (скорее, философский) способ предварительного введения понятия [внутреннего произведения]. Указанное введение понятия служит только для того, чтобы скрыть общее впечатление произвола, который мог бы возникнуть при непосредственном установлении новой дефиниции, в то время как ход доказательства совершенно не зависит от указанного способа введения и связан непосредственно с установленной дефиницией. Так, например, при объяснении этого понятия была использована теорема Пифагора, но математический ход доказательства *не* предполагал этой теоремы. Более того, она оказалась следствием данного здесь математического доказательства, которое, стало быть, одновременно включает полное доказательство этой теоремы.

(Теорема 2). *Два сомножителя внутреннего произведения можно поменять местами, не меняя значения произведения, т.е.* $a \times b = b \times a$.

Так как если $a = A - E$, $b = B - E$, C – основание перпендикуляра из B на AE, D – основание перпендикуляра из A на BE, то

$$a \times b = (A - E) \times (C - E),$$

$$b \times a = (B - E) \times (D - E).$$

Из подобия треугольников ADE и BCE следует теперь, что длина AE так относится к длине DE, как длина BE к длине CE, следовательно, и произведение длин AE и CE равно произведению длин DE и BE. Значит, если $A - E$ и $C - E$ измерены мерой линии EA, а $D - E$ и $B - E$ – мерой линии EB, то произведение частных первых двух мер равно произведению двух последних мер, т.е. на основании определения 3

$$(A - E) \times (C - E) = (B - E) \times (D - E),$$

т.е.

$$a \times b = b \times a.$$

Отсюда следует, далее,

(Теорема 3). *Внутреннее произведение двух взаимно перпендикулярных отрезков равно нулю, однако никакое другое произведение, сомножители которого отличны от нуля, не равно нулю.*

Поскольку, если отрезки взаимно перпендикулярны, то ортогональная проекция одного из них на другой есть нуль, следовательно, если, в соответствии с определением 4, вместо второго сомножителя подставить его ортогональную проекцию, т.е. нуль, тогда и произведение есть нуль. Наоборот, в любом другом случае, если ни один из отрезков не равен нулю, то проекция отлична от нуля, значит, и произведение будет отлично от нуля.

Далее, можно доказать, что

$$a \times (b + c) = a \times b + a \times c \quad \text{и} \quad (b + c) \times a = b \times a + c \times a. \tag{22}$$

Действительно, пусть $a = A - E$, $b = B - E$, $c = C - B$, тогда и $b + c = C - E$. Если, далее, B', C' – основания перпендикуляров, опущенных из B и C на EA, то $B' - E$ есть ортогональная проекция b на a, $C' - E$ – ортогональная проекция $(b + c)$ на a, $C' - B'$ – ортогональная проекция c на a, тогда

$$a \times b + a \times c = a \times (B' - E) + a \times (C' - B'),$$

теперь, поскольку все отрезки в правой части равенства лежат на прямой линии, то правая сторона

$$= a \times (B' - E + C' - B')$$

$$= a \times (C' - E)$$

$$= a \times (b + c).$$

Наконец, поскольку сомножители перестановочны, то

$$(b + c) \times a = b \times a + c \times a.$$

Итак, равенство (22) доказано. Но отсюда следует общая теорема:

(Теорема 4). *Все алгебраические теоремы, выражающие отношение умножения к сложению, справедливы и для внутреннего умножения двух отрезков*,

так как это отношение зависит только от уже доказанных основных законов (сравни грассмановское Учение о протяженностях).

Этим оправдывается наименование и обозначение нового способа связывания как умножения. Но поскольку в алгебре ничто не соответствует закону, согласно которому внутреннее произведение двух ортогональных отрезков равно нулю, это новое умножение оказывается существенно отличным от алгебраического, поэтому мы назвали его *внутренним* умножением, чтобы отличить его как от *алгебраического*, так и от *внешнего* умножения, и установили знак × в качестве знака этого умножения. Отсюда следует, что если a, b, c, d – точки, то мы вместо равенства

$$fig.(a, b) = fig.(c, d)$$

или вместо

$$ab \ \aleph \ cd$$

не только вводим равенство

$$(a - b) \times (a - b) = (c - d) \times (c - d)$$

или

$$(a - b)^2 = (c - d)^2,$$

но и применяем к этому умножению все прежние теоремы, т.е. мы можем совершенно свободно оперировать этим умножением как любой алгебраической связью.

[§ 8. ВНУТРЕННЕЕ И ВНЕШНЕЕ УМНОЖЕНИЕ]

Тем самым решена изначально поставленная нами задача свести лейбницевскую характеристику к ее естественному выражению. Но одновременно в способе решения этой задачи заложено начало нового развития в двух различных направлениях.

А именно одно из них порождает задачу отыскивать разность произведений по известному произведению разностей точек, раскрывая скобки, в которые заключены эти произведения разностей, для того чтобы придти к еще более свободной и более общей трактовке связи, представляющей конгруэнцию.

Другой отправной пункт дальнейшего развития находится в установлении связи между внутренним и внешним произведением. Эта связь реализуется посредством идеи «ортогональной пропорциональности».

(Определение 5). *Две плоские области A и B я называю ортогонально пропорциональными отрезками a и b, если эти плоские области перпендикулярны отрезкам и обладают таким свойством: если один из отрезков, скажем b, не меняя взаимного расположения с соответствующей ему областью B, переместить так, чтобы отрезок b стал равнонаправлен отрезку a, и после этого измерить отрезок b отрезком a, область B областью A, то результаты этих измерений окажутся равными.*

Отсюда следует теорема

(Теорема 5). *Два внутренних произведения отрезков $a \times b$ и $c \times d$ соотносятся как внешние произведения*[12*], *которые возникают, если вместо двух выбранных сомножителей рассматриваемых произведений подставить ортогонально пропорциональные этим отрезкам плоские области A и C, а знаки внутреннего умножения заменить знаками внешнего умножения, т.е.*

$$(a \times b) : (c \times d) = (A\ .\ b) : (C\ .\ d). \tag{23}$$

Если c, d, C рассматриваются как некая система, и эта система произвольно переносится так, что она остается конгруэнтной себе, то в результате такого переноса произведения $c \times d$ и $C \cdot d$ не меняются, следовательно, не меняются их значения, если при этом c переводится в то же направление, что и a. Отсюда следует, что равенство (23) становится всегда истинным, если доказано, что a и c становятся равнонаправленными.

Если при этих предположениях $\dfrac{c}{a} = \gamma$, то тогда и $\dfrac{C}{A} = \gamma$ (на основании определения 5). В таком случае, если в равенство

(23) я подставлю γa вместо c и γA вместо C, то мне остается лишь доказать, что

$$(a \times b) : (\gamma a \times d) = (A \,.\, b) : (\gamma A \,.\, d).$$

Это равенство будет доказано, если я докажу, что должно быть верно

$$(a \times b) : (a \times d) = (A \,.\, b) : (A \,.\, d) \tag{24}$$

или, что если $a \times\ b = \alpha(a \times d)$, где α снова числовая величина, и $A \,.\, b = \alpha(A \,.\, d)$. Но если $a \times b = \alpha(a \times d)$, то верно и $a \times b = a \times (\alpha d)$, следовательно, $a \times (b - \alpha d) = 0$, следовательно, $b - \alpha d$ либо есть нуль, либо ортогонален a (по теореме 3), т.е. так как A – плоская область, ортогональная a, отрезок $b - \alpha d$ либо равен нулю, либо параллелен A. Но, далее, внешнее произведение некоторой плоской области на параллельный ей отрезок дает нуль (Учение о протяженностях § 54 и 55), значит, $A \,.\, (b - \alpha d)$ есть нуль, значит, $A \,.\, b$ равно $A \,.\, \alpha d$ и равно $\alpha(A \,.\, d)$, т.е. равенство (24) доказано. Но тогда доказано и равенство (23) для случая, когда a и c равнонаправленные отрезки, а сейчас будет доказано и в общем случае.

Эту теорему мы можем сфомулировать более общо, если скажем:

(Теорема 5b). *Справедливость равенства, члены которого являются внутренними произведениями двух таких отрезков или кратными таких произведений, не нарушится, если заменить эти внутренние произведения пропорциональными им внешними произведениями, возникающими, если вместо некоторого множителя такого внутреннего произведения поставлена ортогонально пропорциональная ему плоская область, а вместо знака внутреннего умножения – знак внешнего умножения. И, наоборот, из этого последнего равенства можно получить первое равенство.*

Если данные внутренние произведения пропорциональны некоторой последовательности числовых величин, то внешние произведения, пропорциональные этим внутренним, пропорциональны той же последовательности числовых величин, поэтому доказательство теоремы сразу следует из определения 2.

Так как идея ортогональной пропорциональности может быть перенесена на другие внешние произведения, то в ней содержится зародыш ранее названного дальнейшего развития [теории]. Я изложу теперь этот ход обобщения, но прежде, чем прослеживать другой упомянутый выше путь, я покажу, насколько до сих пор развитый анализ обладает названными Лейбницем преимуществами, применяя его к геометрии и механике.

[§ 9. ВНУТРЕННИЕ ПРОИЗВЕДЕНИЯ ПЛОСКИХ ОБЛАСТЕЙ И ОТРЕЗКОВ]

Ясно, что, используя идею ортогональной пропорциональности применительно как к внешнему произведению двух отрезков, так и к произведению плоской области и отрезка, подставляя вместо отрезка ему пропорциональную плоскую область, можно новым способом получать соответствующие внутренние произведения. Для получения законов этих новых связей, равно как и для обоснования законов внутреннего произведения, с которым мы только что имели дело, достаточно следующей теоремы, если превратить теорему 5 в дефиницию этого внутреннего произведения.

(Теорема 6). *Если a, b, c, ... – отрезки, A, B, C, ... – ортогонально пропорциональные отрезкам плоские области, то также пропорциональны и их суммы, т.е., если $s = a + b + c + \ldots$ и $S = A + B + C + \ldots$, то и $s, a, b, c, \ldots$ ортогонально пропорциональны $S, A, B, C, \ldots$*

Непосредственно видно, что если теорема доказана для суммы двух отрезков, то ее справедливость для суммы произвольного числа членов получается продолжением того же самого рассуждения. Поэтому мы докажем ее сначала для двух отрезков, полагая, что если $s = a + b$, $S = A + B$, то s, a, b ортогонально пропорциональны S, A, B.

Если отрезок f ортогонален a и b одновременно, то f ортогонален s, поскольку s лежит в одной плоскости с a и b. Для наглядности предположим, что a, b, s и f исходят из одной точки. Если повернуть систему отрезков a, b, s, не меняя их длины и взаимного расположения, вокруг перпендикулярной им оси f, так, чтобы эта система (а значит, и каждый ее отрезок) описала прямой угол, то в результате точки a, b, s перейдут в точки a', b', s', но при этом останется справедливым равенство $s' = a' + b'$. Ясно, что $f\,.\,a'$, $f\,.\,b'$, $f\,.\,s'$ ортогонально пропорциональны отрезкам a, b и s, следовательно, если $A = \gamma fa'$, то $B = \gamma fb'$, значит, $A + B$ или $S = \gamma(f\,.\,a' + f\,.\,b') = \gamma f\,.\,s'$, следовательно, S, A, B ортогонально пропорциональны s, a, b, и это верно для любого числа членов.

Так как три члена пропорции полностью определяют четвертый член, то верна и обратная теорема

(Теорема 7). *Если s, a, b c, ... ортогонально пропорциональны S, A, B, C, ..., и*

$s = a + b + c + \ldots$, *то*

$S = A + B + C + \ldots$

и наоборот, если при сделанных выше предположениях справедливо второе равенство, то справедливо и первое.

В дальнейшем мы все же будем использовать только первое из этих равенств и только для случая двух членов.

Идея ортогональной пропорциональности используется для определения следующего понятия:

(Определение 6). *Под внутренним произведением двух плоских областей я понимаю такую величину, которая пропорциональна внешнему произведению, полученному посредством подстановки вместо первого множителя каждого внутреннего произведения ортогонально пропорционального ему отрезка, второй же множитель остается неизменным, а знак внутреннего умножения* (×) *превращается в знак внешнего умножения* (.) и

(Определение 7). *Под внутренним произведением плоской области на отрезок мы понимаем такую величину, которая ортогонально пропорциональна внешнему произведению, которое возникает, если вместо плоской области – множителя указанного внутреннего произведения – подставить ортогонально пропорциональный ему отрезок, знак внутреннего умножения заменить знаком внешнего умножения, не меняя при этом никаких других множителей.*

Например, произведения $A \times b$ и $C \times d$, где A и C – плоские области, b и d – отрезки, возникают из $a\ .\ b$ и $c\ .\ d$ путем замены a и c ортогонально пропорциональными областями A и C соответственно.

Законы, которым подчиняются эти связи, легко получаются на основании теоремы 6.

Так, равенство $A \times (B + C) = A \times B + A \times C$ доказывается исходя из равенства $a\ .\ (B + C) = a\ .\ B + a\ .\ C$, если отрезок a перпендикулярен A, и величины доказываемого равенства пропорциональны величинам исходного (на основании теоремы 1b). Точно так же, если b и c ортогонально пропорциональны B и C, то b, c и $(b + c)$ (по теореме 6) ортогонально пропорциональны B, C, $(B + C)$, тогда из равенства

$$(b + c) \cdot A = b \cdot A + c \cdot A$$

следует равенство

$$(B + C) \times A = B \times A + C \times A.$$

Аналогично устанавливается, что $A \times (b + c) = A \times b + A \times c$. Поскольку имеет место

$$a\ .\ (b + c) = a\ .\ b + a\ .\ c,$$

то на основании теоремы 7 справедливо доказываемое равенство, члены которого ортогональны членам исходного равенства, т.е.

$$A \times (b + c) = A \times b + A \times c.$$

И, наконец, справедливо, что

$$(A + B) \times c = A \times c + B \times c.$$

Так как если a и b отрезки, ортогонально пропорциональные плоским областям A и B, то (по теореме 6) a, b, $(a + b)$ ортогонально пропорциональны областям A, B, $(A + B)$. Имеет место равенство

$$(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c.$$

Тем самым теперь (по теореме 7) справедливо искомое равенство, члены которого – величины, ортогонально пропорциональные членам данного равенства. Но, в силу определения 7, произведения $(A + B) \times c$, $A \times c$, $B \times c$ ортогонально пропорциональны произведениям $(a + b) \cdot c$, $a \cdot c$, $b \cdot c$, так как $A + B$, A, B ортогонально пропорциональны $a + b$, a, b. Итак (в силу теоремы 7),

$$(A + B) \times c = A \times c + B \times c.$$

Чтобы нагляднее представить идею последнего случая умножения плоской области на отрезок, предположим, что b_1 – ортогональная проекция отрезка b на плоскую область A, следовательно, $b = b_1 + b_2$, где b_2 ортогонален плоской области A. Тогда, если a – отрезок, ортогональный A, то

$$a \cdot (b_1 + b_2) = a \cdot b_1,$$

так как $a \cdot b_2$ равно нулю, как внешнее произведение двух равнонаправленных отрезков. Точно так же и

$$A \times (b_1 + b_2) = A \times b_1,$$

или

$$A \times b = A \times b_1,$$

и $A \times b_1$ ортогонально пропорционально произведению $a \cdot b_1$.

Ясно, однако, что отрезок, ортогональный $a\ .\ b_1$, в плоскости A ортогонален как проекции b_1, так и самому отрезку b. Отсюда следует, что произведение $A \times b$ представляется некоторым отрезком, который находится в плоскости A и перпендикулярен отрезку b, относительная величина которого определяется на основании того, что он должен быть ортогонально пропорционален плоской области $a\ .\ b$.

Из доказанного выше взаимоотношения обоих новых видов умножения со сложением следует общая теорема:

(Теорема 8). *Для каждого вида внутреннего умножения двух протяженностей в пространстве справедливы все алгебраические теоремы, выражающие общее отношение умножения к сложению и вычитанию.*

В этой теореме как частный случай содержится теорема 4. Сразу же получается теорема

(Теорема 9). *Для всех видов внутреннего умножения двух протяженностей в пространстве произведение равно нулю тогда и только тогда, когда сомножители перпендикулярны друг другу,*

поскольку тогда и только тогда соответствующее внешнее произведение содержит параллельные сомножители. И эта теорема оказывается обобщением третьей теоремы. Отсюда снова непосредственно следует

(Теорема 10). *Любое внутреннее произведение непараллельных сомножителей равно внутреннему произведению одного из сомножителей на ортогональную проекцию на него другого сомножителя.*

Естественно, что если рассматривается произведение некоторой плоской области на отрезок, то речь может идти только о проекции этого отрезка на данную плоскую область. Легко показать, далее, что $A \times B = B \times A$. Так как ортогональная проекция B на A равна αA, где α – некоторое число, то $A \times B = A \times \alpha A = \alpha(A \times A)$, $B \times A = (\alpha A) \times A = \alpha(A \times A)$, значит, $A \times B = B \times A$. Произведение $a \times B$ до сих пор не определено, но аналогия позволяет нам положить, что оно равно произведению $B \times a$, и мы имеем теорему:

(Теорема 11). *Два сомножителя любого из таких внутренних произведений можно менять местами, не меняя значения произведения*. Ясно, что эта теорема является обобщением второй теоремы.

Таким образом, получается, что все законы, касающиеся внутреннего умножения, согласуются между собой. Параллелизм между законами внутреннего умножения отрезков, плоских областей, значит и величин одинаковых ступеней настолько полный, что если поменять местами понятия отрезка и плоской области, то нельзя вывести никакого нового закона, касающегося одной из этих связей, который не был бы справедлив для другой[13*].

[ЗАКЛЮЧЕНИЕ][14*]

Этим, я полагаю, можно завершить установление важнейших законов внутреннего произведения двух величин первой ступени. Правда, в изложенном выше тексте уже содержится зародыш для полного понимания сути внутреннего произведения. Развитие этой идеи видно из предшествующего развертывания теории.

Именно в определениях 6 и 7 и в вытекающих из них теоремах мы уже сформулировали понятие внутреннего произведения двух протяженностей более высокой ступени, каждая из которых оказывается внешним произведением отрезков.

Следовало бы еще предложить наглядное представление тех связей, законы которых получены как следствия из вышеуказанных теорем. Но поскольку они не составляют никаких затруднений, поскольку введены совершенно аналогично тому, как это было сделано для внутренних произведений двух точек, то я полагаю, что их можно оставить в стороне.

Я надеюсь также, что изложенного мною достаточно, чтобы показать, как верно Лейбниц предугадал преимущества чисто геометрического анализа. Он подчеркивал, что решение геометрической задачи средствами этого анализа доставляет одновременно решение, построение и доказательство, т.е. именно естественный способ, и что такие пути решения с необходимостью диктуются самим этим анализом. Далее, так как любое равенство в данном анализе является геометрическим соотношением, выраженным средствами этого анализа, высказанным четко и ясно, поскольку оно может быть воспринято непосредственно, ибо это соотношение не отягчено произвольными величинами обычного анализа, например, величинами, зависящими от координат; и так как, далее, любое преобразование одного из таких равенств является выражением одновременно осуществляемого построения, то отсюда следует, что на самом деле в данном анализе аналитическое решение геометрической задачи происходит одновременно с построением и доказательством [справедливости решения]. Но так как при этом не используется ничего, что не связано обязательным образом с природой задачи, как, например, координаты аналитической геометрии, то и вид решения задачи всегда согласован с ее природой, а поскольку решение облечено в форму данного анализа, то нет никакой необходимости вести речь о поиске методов решения. Итак, чтобы новый анализ удовлетворял полностью всем требованиям, необходимо еще было бы развить теорию уравнений, т.е. указать способы элиминировать из уравнений неизвестные величины. Но как это можно осуществить, ясно из того, какие принципы положены в основу построения всей теории.

Далее, в качестве важного преимущества геометрического анализа Лейбниц выдвигает то обстоятельство, что, используя средства этого анализа, механику можно трактовать как геометрию. И, вообще, он надеется, что средства этого анализа позволят осуществить более глубокое математическое истолкование физики, например, исследовать внутреннюю природу физических тел. Я полагаю, что изложенное мною выше применение [средств этого анализа] к задачам механики на деле показывает, что в механике можно обходиться чисто геометрическими методами. Отсюда вытекает, что средства этого анализа могли бы быть перенесены на способы математической трактовки физики. Если бы позволило место, я мог бы привести простые примеры из оптики, акустики, электродинамики и других ветвей физики. Я надеюсь, наконец, что недалеко то время, когда удастся проникнуть в суть внутренней структуры физических тел, т.е. исследовать взаимоотношение ее простых или составляющих атомов. Ясно также из других приложений, которые допускает этот анализ, например в кристаллографии (ср. Учение о протяженностях, § 171), что новый анализ мог бы стать незаменимым, если не затемнять наглядность введением координат, затрудняющим оперирование аппаратом и методами, вводящими в заблуждение излишними детализациями.

Наконец, в заключении Лейбницева изложения есть замечательное место, где он явно высказывает мысль о применимости данного анализа к объектам, не имеющим пространственной природы, но добавляет, что в немногих словах невозможно было бы дать ясное представление об этом предмете.

На самом деле все понятия и законы нового анализа можно изложить независимо от пространственной наглядности, связывая их с абстрактным понятием постепенного (непрерывного) перехода, как это и происходит сплошь и рядом в «Учении о протяженностях» Грассмана. Если воспринять идею абстрактно истолкованного непрерывного перехода, то легко можно обнаружить, что развитые в данном сочинении законы допускают трактовку, свободную от пространственной наглядности. Тем самым осуществлен и замысел Лейбница, ибо, как мне кажется, нет ничего существенного, что можно было бы добавить, чтобы выявить справедливость всего того, что он утверждал относительно геометрического анализа, разумеется, за вычетом некоторых преувеличений, которые, правда, вызваны скорее способом выражения, чем существом дела, и чтобы обнаружить в этом предмете удивительную силу духа, способного охватить взглядом необозримую линию развертывания [предмета] с самых ее истоков, всю важность этого развертывания, а также важность и своеобразие преимуществ, которые оно могло бы принести.

ИЗ «АРИФМЕТИКИ»[1*]

ПРЕДИСЛОВИЕ

Предлагаемое построение арифметики, которое в своих существенных чертах представляет совместный труд – мой и моего брата Роберта, – претендует на то, чтобы быть первым строго научным построением этой дисциплины. Кроме того, это изложение претендует на то, что используемый здесь метод, – как бы сильно он ни отличался от общепринятого, – во всех существенных моментах является не просто одним из возможных, но единственно возможным методом строго последовательной и отвечающей существу дела трактовки данной науки.

Обоснованы или нет эти наши притязания, заключающие в себе одновременно и упрек предшествующим разработкам в недостаточной научной строгости и последовательности, должен доказать сам предлагаемый труд, поскольку полемическое или апологетическое обоснование упомянутых притязаний противоречит нашей непосредственной цели. Мы надеемся позже устранить этот изъян путем такой разработки математики, предназначенной для подготовленного читателя, в которой будут подчеркнуты все руководящие идеи и в деталях показана необходимость используемого метода. Однако я убежден, что уже теперь всякий, кто сознательно и без предубеждений проштудирует предлагаемый труд, признает оправданность упомянутых притязаний. Следовательно, остается только обсудить педагогическую сторону книги и ее практическое применение.

Пожалуй, немногие станут оспаривать тот факт, что уже в самом начале научного обучения математике использование максимально строгого метода имеет преимущество перед всеми другими. В частности, любой педагог последовательное доказательство предпочтет доказательству, содержащему ошибку или впадающему в круг; более того, для него морально невозможно идти к учащимся с такого рода доказательством. И все-таки подобного рода негодные доказательства повсеместно распространены в учебниках арифметики и господствуют там, где дело идет об основах ее системы. Но строгое доказательство может оказаться слишком трудным для учащихся. Если это имеет место, – что всегда указывает на погрешность общей трактовки или изложения предмета в целом, – то единственным выходом является разъяснение учащимся соответствующего предложения в историческом плане. При этом следует открыто признавать, что полностью понятное для них доказательство привести невозможно [в силу сложности самого предмета]. Разумеется, подобное решение допустимо принимать лишь в самых крайних случаях. Однако такой выход из положения следует все же предпочесть доказательству, которое в действительности не обладает доказательной силой и поэтому вызывает либо полное непонимание учащихся, либо создает видимость знания, открывающую двери поверхностности и отсутствию научности.

Только математика в ее наиболее строгой форме, – с присущей ей непреклонной последовательностью, – в состоянии оградить учащихся от модного увлечения красивыми фразами и научить мыслить логически. Но эта цель не может быть достигнута, если нанизывать формулы одну за другой, не сопровождая их разъяснением сути (смысла) соответствующих преобразований. Поэтому развертывание формул и раскрытие смысла всегда должны идти рука об руку. Способ, каким это можно осуществлять, показан в предлагаемом учебнике на конкретных примерах, как это сделано, например, в № 17. Доказательство в нашем учебнике, как правило, передается только с помощью формул, причем в круглых скобках указывается номер предложения, на основе которого получена новая формула. При этом, однако, всегда предполагается, что при словесном воспроизведении доказательства учащийся всякий раз формулирует предложение, которое используется при получении данной формулы. В трудных местах он должен осознать особенность соответствующего предложения применительно к конкретному случаю. Тогда все воспроизведение доказательства будет происходить в форме развертывания понятий, а выписываемая каждый раз формула символически представлять шаг, осуществляемый с помощью понятий. При этом предполагается, что учащийся твердо помнит запас проработанных ранее предложений, так что в процессе домашней подготовки или при повторении он только в исключительных случаях нуждается в том, чтобы справляться с учебником. Такое воспроизведение процесса вывода формул служит не только развитию навыка последовательного мышления, оно повышает продуктивность учащихся в данной области и приводит их к открытию новых истин. Короче, учебник построен так, что даже средний ученик, если он усвоит особенности доказательств (последовательного [fortschreitend], возвратного [ruckschreitend], косвенного [indirect] и индуктивного [induktorisch]), оказывается в состоянии совершенно самостоятельно осуществлять доказательства, при условии, что он знаком с каким-либо доказательством того же рода.

Другим важным средством пробуждения творческой активности учащихся служит эвристический метод, который учит тому, как находить сами предложения. Но ограничиться одним только эвристическим методом было бы совершенно ошибочно. Это осложнило бы повторение пройденного ранее материала, сузило бы рамки индивидуальной работы учителя с учащимися, обладающими разными способностями. Надеюсь, однако, что изложение в моей книге таково, что во всех случаях позволяет извлекать необходимую эвристику. Пример подобного эвристического метода для одного из самых трудных случаев представлен в № 439.

Что касается заданий, которые направлены к тому, чтобы частью служить упражнениями при изучении материала, частью же содействовать пробуждению творческой активности учащихся, читатель найдет, например, в превосходном сборнике Гейса.

В соответствующих местах [учебника] указаны типы задач, которые должны быть предложены учащимся в процессе изучения материала. Кроме того, в ходе развертывания формул строго поступательным [индуктивным] методом, предложенным в настоящем учебнике, учащиеся упражняются и в выполнении алгебраических преобразований, так что при решении соответствующих задач они не встретятся с большими затруднениями.

Но кроме развития способности четкого усвоения и уверенного отыскания истины математика обладает и еще одним воспитывающим свойством, а именно она содействует формированию способности ума охватывать научную систему в целом. Однако было бы ошибкой начинать с попыток развить эту способность до того, как учащиеся овладели конкретным материалом, ибо в этом случае не останется ничего иного, как отделываться общими философскими фразами, по меньшей мере, неудопонятными учащимся и в любом случае препятствующими развитию способности воспринимать научную систему в целом.

Сформировать способность воспринимать систему в целом можно, с одной стороны, прибегая к легко обозримой и строгой систематизации, которая не скроена по внешнему шаблону, но органически вытекает из природы предмета. С другой же стороны, резюмируя в заключении все то, что еще находится вне связи друг с другом, но готово к тому, чтобы быть связанным между собой, и создавая тем самым цельную картину. В применении к элементарной арифметике мы пытаемся сделать это в ее заключении, в параграфе 16.

Наконец, что касается структурирования и подачи материала, то уже из оглавления видно, что его должно быть достаточно вплоть до старших классов гимназии и что им охвачена вся арифметическая часть преподавания. В случае обычной организации гимназии четвертому и третьему классам должны соответствовать § 1–9; второму – § 10–16, а § 17–26 – старшим классам. Следует заметить, что § 24–26, в зависимости от способностей учащихся, или прорабатываются или пропускаются, или предлагаются наиболее одаренным ученикам, или же передаются в качестве дополнительных лекций в остальные классы. Помеченные звездочкой * предложения (теоремы) при первом чтении могут быть опущены.

В соответствии с планом автора за предлагаемой первой частью должны последовать еще две, одна из которых – планиметрия, другая – стереометрия, и обе должны охватывать тригонометрию.

§ 1. Введение

1. *Определение. Математика* [μαϑηματιϰη] есть наука о соединении [сочленении] величин. *Величиной* называется любая вещь, полагаемая равной либо неравной некоторой другой вещи. Две вещи называются *равными*, если в любом высказывании одну из них можно заменить другой.

2. *Обозначение.* Общими знаками *величин* являются буквы. Как бы часто в одном и том же связном тексте (под одним и тем же номером в этой книге) ни встречалась одна и та же буква, под ней всегда понимается одна и та же величина (если особо не указано, что впредь этой букве следует соотносить другое значение). Знаком *равенства* является знак =, знаком *неравенства* – знак $\gtrless$.

3. *Определение.* Формула $a = b$ называется равенством, a – левой, b – правой его частью.

4. *Определение.* Каждое математическое *соединение* имеет место только между двумя величинами; величина, возникающая благодаря соединению, называется *результатом* соединения. Результат соединения, в свою очередь, можно соединять с некоторой величиной. *Последовательно* соединить величину a со многими величинами b, c,...значит соединить a с b, результат этого соединения соединить с c и т.д.

5. *Обозначение.* Скобка ( ) означает, что стоящее в ней выражение образует *одну* величину. Самой простой связью является сложение [Addition] (§ 2) и вычитание [Subtraktion] (§ 3). Знак сложения есть + (читается: плюс). Знак вычитания есть – (читается: минус). В случае сложения и вычитания скобки могут быть удалены во всех случаях, когда первая величина должна быть последовательно связана со следующими за нею величинами[2*].

Пример. $a + b + c$ означает, что к a последовательно прибавляются b и c, т.е. к a сначала прибавлено b, а к возникшей величине $a + b$ прибавлена величина c; или, иначе, $a + b + c = (a + b) + c$. Напротив, $a + (b + c)$ означает, что сначала к b прибавлена величина c, а затем к a прибавлена величина $b + c$.

Примечание 1. Выражение, которое либо содержит знак только *одной* величины, либо не является частью более обширного выражения, не нуждается в том, чтобы его заключали в скобку, так как в этом случае ясно, что данное выражение образует только *одну* величину[3*].

Примечание 2. При чтении выражения, в котором имеются скобки, во избежание двусмысленности, всегда следует указывать, где открывается некоторая скобка, и где она закрывается; только в тех местах, где само собой понятно, что скобки закрываются, как, например, в конце всего выражения или перед знаком равенства, целесообразно не указывать на то, что скобки закрываются. Примеры:

1) $a - (b + c) - d$, читается: a минус, скобка b плюс c, скобка закрывается, $-d$.

2) $a + (b - (c + d)) + e$ читается: a плюс, скобка b минус скобка c плюс d, обе скобки закрываются, плюс e.

3) $a - (b + c) = b - (a + (b - c))$ читается: a минус скобка, b плюс c равно b минус скобка a плюс скобка $b - c$.

6. *Определение. Арифметика* (ἀριθμητική) рассматривает такие величины, которые возникают путем сочленения из однойединственной величины e.

§ 2. Сложение

7. *Определение.* Исходя из величины e, можно образовать некоторую последовательность, применяя следующую процедуру: положить e в качестве *одного* члена последовательности, в качестве непосредственно следующего за ним члена положить $e + e$

(читается e плюс e), и так продолжать далее, получая каждый раз путем прибавления $+e$ к последнему члену непосредственно следующий за ним член. Равным образом, можно положить сначала $e + -e$ (читается: e плюс минус e) в качестве такого члена последовательности, который непосредственно предшествует e, и так продолжать далее, прибавляя $+e$ к первому члену, получать каждый раз из первого члена последовательности непосредственно предшествующий ему член. Тогда мы получим некоторую бесконечную в обе стороны последовательность

$$\ldots, e + -e + -e + -e, e + -e + -e, e + -e, e, e + e, e + e + e, \ldots$$

Если положить, что каждый член этой последовательности отличен от всех других членов, то такая последовательность называется *основным* рядом [Grundreie][4*], e называется *положительной* единичностью, $-e$ – *отрицательной* единичностью[5*].

8–9. *Определение.* Если a есть некоторый член основного ряда, то $a + e$ (в частности, если a есть один из членов, предшествующих e) означает член ряда, непосредственно следующий за a, и $a + -e$ (в частности, если a есть один из членов, которые следуют за e) – член ряда, непосредственно предшествующий a, т.е. если b есть член ряда, непосредственно следующий за a, то

$$b = a + e, \tag{8}$$

$$a = b + -e. \tag{9}$$

Эти сочленения называют сложением единичностей.

10. *Обозначение.* Сумма одной положительной и одной отрицательной единичностей обозначается через 0 (ноль), т.е.

$$e + -e = 0.$$

11. *Обозначение.* Вместо $0 + -e$ пишут $-e$.

$$0 + -e = -e.$$

12. *В соответствии с этим последовательность, получающаяся из единицы e,*

$$\ldots, -e + -e + -e, -e + -e, -e, 0, e, e + e, e + e + e, \ldots$$

Члены этой последовательности, предшествующие члену $-e$, суть суммы отрицательных единичностей, члены последовательности, следующие за e, суть суммы положительных единичностей.

Доказательство. Члены основного ряда, следующие за e, возникли (согласно 7) из e путем последовательного прибавления положительных единичностей. Члены, предшествующие e, возникли из e путем последовательного прибавления отрицательных единичностей, а именно член, непосредственно предшествующий e, есть $e + -e = 0$ (согласно 10). А член, предшествующий нулю, есть $0 + -e = -e$ (согласно 11). Все члены, предшествующие члену $-e$, возникают из $-e$ посредством последовательного прибавления отрицательных единичностей и поэтому представляют собой суммы отрицательных единичностей.

13. $a + e + -e = a$.

Последовательное прибавление одной положительной и одной отрицательной единичностей ничего не меняет.

Доказательство. Пусть b есть член основного ряда, непосредственно следующий за a; тогда

$b = a + e$ (согласно 8).

$a = b + -e$ (согласно 9).

Если во второе равенство подставить значение b, которое оно имеет в первом равенстве, то мы получим

$a = a + e + -e$.

14. $a + -e + e = a$.

Последовательное прибавление одной отрицательной и одной положительной единичностей ничего не меняет.

Доказательство. Пусть b есть член основного ряда, непосредственно предшествующий a; тогда

$a = b + -e$ (согласно 8)

$b = a + -e$ (согласно 9).

Если в первом равенстве заменить b его значением из второго равенства, то получится

$a = a + -e + e$.

15. *Определение.* Если a и b произвольные члены основного ряда, то под суммой $a + b$ понимают такой член основного ряда, для которого справедлива формула

$a + (b + e) = a + b + e$,

a и b называют слагаемыми, или частями, $a + b$, a – первым, b – вторым слагаемым. Такое соединение называется сложением. В словесном выражении эта формула гласит:

Вместо того чтобы прибавлять единичность ко второму слагаемому, ее можно прибавить к сумме, или:

Вместо того чтобы прибавлять положительную единичность к сумме, ее можно прибавить ко второму слагаемому[6*].

16. *Добавление. Величина* $a + (b + e)$ *есть член основного ряда, непосредственно следующий за членом* $a + b$, и $a + b$ *есть член этого ряда, непосредственно предшествующий величине* $a + (b + e)$.

Доказательство. $a + (b + e)$ равно (согласно 15) $a + b + e$, т.е. (согласно 8) член основного ряда, непосредственно следующий за $a + b$, или, что то же самое, $a + b$ есть член этого ряда, непосредственно предшествующий величине $a + (b + e)$.

17. $a + (b + -e) = a + b + -e$.

Вместо того чтобы прибавлять отрицательную единичность ко второму слагаемому, ее можно прибавить к сумме, или:

Вместо того чтобы прибавлять отрицательную единичность к сумме, ее можно прибавить ко второму слагаемому.

Доказательство (последовательное).

$$\begin{aligned} a + (b + -e) &= a + (b + -e) + e + -e && \text{(согласно 13)} \\ &= a + (b + -e + e) + -e && \text{(согласно 15)} \\ &= a + b + -e && \text{(согласно 14)}^{7*}. \end{aligned}$$

Примечание 1. При *последовательном* доказательстве мы исходим из левой части доказываемого равенства, и шаг за шагом преобразуем его правую часть; при этом мы, как правило, стремимся сделать так, чтобы последняя имела тот же самый заключительный член, что и левая часть.

Примечание 2. Номер, помещенный в [круглых] скобках рядом с формулой, служит для выражения того, что формула получена из предложения, фигурирующего под соответствующим номером[8*]. В случае устного воспроизведения эти номера следует опускать; вместо этого, прежде чем производить вывод формулы, следует привести словесную формулировку того предложения, на которое необходима ссылка, и в нужных случаях также указать, как это предложение следует применить к только что полученной формуле. Если вслед за номером, помещенным в скобке, стоит буква b, то это означает, что нужно избрать *вторую* словесную формулировку, входящую в предложение, на которое дается ссылка. Чтобы пояснить на примере, как такое доказательство звучит устно, дадим словесную формулировку приведенного выше доказательства:

Доказательство в словесной форме

Мы исходим из левой части доказываемого равенства, т.е. из

$a + (b + -e)$.

Это выражение можно привести к такой форме, чтобы оно, подобно правой части, оканчивалось выражением $+ -e$, это возможно, так как последовательное прибавление положительной и отрицательной единичности ничего не меняет. Тогда приведенное выше выражение примет вид

$= a + (b + -e) + e + -e$.

Но вместо того чтобы к сумме $a + (b + -e)$ прибавлять положительную единичность, ее можно прибавить ко второму слагаемому, поэтому данное выражение

$= a + (b + -e + e) + -e$.

Последовательное прибавление отрицательной и положительной единичностей ничего не меняет; применение этого свойства к выражению, стоящему в скобке, приводит полученное только что выражение к виду

$a + b + -e$.

Следовательно, $a + (b + -e) = a + b + -e$, то есть:
вместо того чтобы прибавлять отрицательную единичность ко второму слагаемому, ее можно прибавить к сумме.

18. $a + 0 = a$.

Прибавление нуля ничего не меняет.

Доказательство.

$a + 0 = a + (e + -e)$	(согласно 10)
$= a + e + -e$	(согласно 17)
$= a$	(согласно 13).

*19. *Для того чтобы прибавить сумму положительных или отрицательных единичностей, можно последовательно прибавлять эти единичности, иначе говоря, если R означает ряд положительных или отрицательных единичностей, которые подлежат последовательному прибавлению, а (R) есть их сумма, то*

$a + (R) = a + R$.

Доказательство 1. Обозначим через (R) сумму положительных единичностей. Тогда сумма $a + (R)$ получается из суммы $a + e$ путем последовательного прибавления положительных единичностей ко второму слагаемому; но вместо того чтобы прибавлять положительную единичность ко второму слагаемому, ее можно прибавить к сумме (согласно 15). Стало быть, вместо того чтобы ко второму слагаемому суммы $a + e$ последовательно прибавлять несколько единичностей, их можно прибавить к сумме $a + e$, следовательно, вместо того чтобы прибавлять к a некоторую сумму положительных едничностей, эти единичности можно последовательно прибавлять к a.

2. Если (R) есть сумма отрицательных единичностей, доказательство остается тем же самым, только вместо положительных единичностей, фигурирующих в доказательстве 1, везде следует брать отрицательные единичности.

20. $e + a = a + e.$

Если одно из двух слагаемых есть положительная единичность, то слагаемые можно поменять местами.

Доказательство. (Относительно a). Допустим, что формула (20) справедлива для некоторой величины a[9*]. Тогда можно, во-первых, показать, что она справедлива и для величины $= a + e$, непосредственно следующей за a, т.е. что

$$e + (a + e) = a + e + e,$$

ибо имеет место

$$\begin{aligned} e + (a + e) &= e + a + e && \text{(согласно 15)}, \\ &= a + e + e, \end{aligned}$$

так как, согласно предположению, формула (20) должна быть справедлива для значения a.

Таким образом, если формула (20) справедлива для некоторого значения a, она справедлива и для непосредственно следующего значения, а, стало быть, и для значения, которое непосредственно следует за этим последним, и так далее, следовательно, для всех последующих значений.

Покажем, во-вторых, что исходная формула справедлива для члена ряда, непосредственно предшествующего a[10*], т.е. для $a + -e$, иными словами, покажем, что

$$e + (a + -e) = a + -e + e.$$

Имеет место равенство

$$\begin{aligned} e + (a + -e) &= (e + a) + -e && \text{(согласно 17)} \\ &= a + e + -e && \text{(согласно допущению)} \\ &= a + -e + e && \text{(согласно 13 и 14).} \end{aligned}$$

Итак, если исходная формула справедлива для некоторого значения a, то она справедлива для непосредственно предшествующего значения, а, значит, и для значения, которое непосредственно предшествует этому последнему, и, таким образом, справедлива для всех значений, предшествующих a.

Наконéц, в-третьих, формула (20) справедлива для случая, когда $a = e$[11*], ибо тогда справедливо

$$e + a = e + e = a + e.$$

Формула (20) справедлива для некоторого значения, следовательно, в соответствии с первой частью доказательства, справедлива для всех последующих значений, и в соответствии со второй частью, – также и для всех предшествующих значений, стало быть, она справедлива для всех значений.

Примечание. Доказательства данного вида называются индуктивными. В дальнейшем они будут представляться в несколько более сокращенной форме.

21. $-e + a = a + -e.$

Если одно из двух слагаемых есть отрицательная единичность, то слагаемые можно поменять местами.

Доказательство. Точно такое же, как и в номере 20, только вместо e следует брать $-e$, вместо $-e$ брать e, а вместо «предшествующий» брать «[по]следующий», и наоборот.

22. $a + (b + c) = a + b + c$[12*].

Вместо того чтобы прибавлять сумму, можно последовательно прибавлять слагаемые [этой суммы],
или:

Вместо того чтобы прибавлять последовательно две величины, можно прибавить их сумму.

Доказательство (индуктивное относительно c). Допустим, что формула 22 справедлива для какого-то значения c; тогда справедливо

$$\begin{aligned} a + [b + (c + e)] &= a + [b + c + e] && \text{(согласно 15)}\\ &= a + (b + c) + e && \text{(согласно 15)}\\ &= a + b + c + e && \text{(согласно допущению)}\\ &= a + b + (c + e) && \text{(согласно 15}b\text{).} \end{aligned}$$

Итак, если формула 22 справедлива для некоторого значения [c], то она справедлива и для непосредственно следующего значения, и, следовательно, для всех последующих значений. Равным образом, при том же предположении справедливо:

$$
\begin{aligned}
a + [b + (c + -e)] &= a + [b + c + -e] && \text{(согласно 17)}\\
&= a + (b + c) + -e && \text{(согласно 17)}\\
&= a + b + c + -e && \text{(согласно допущению)}\\
&= a + b + (c + -e) && \text{(согласно 17}b\text{)}^{13*},
\end{aligned}
$$

то есть: если формула 22 справедлива для какого-либо значения c, то она справедлива и для непосредственно предшествующего значения, следовательно, справедлива для всех предшествующих значений.

Но она справедлива для $c = e$ (согласно 15), стало быть, она справедлива для всех значений.

23. $a + b = b + a$.

Два слагаемых суммы можно менять местами.

Доказательство (индуктивное относительно b). Допустим, что формула 23 справедлива для некоторой величины b, тогда справедливо

$$
\begin{aligned}
a + (b + e) &= a + b + e && \text{(согласно 15)}\\
&= b + a + e && \text{(согласно допущению)}\\
&= b + (a + e) && \text{(согласно 15 }b\text{)}\\
&= b + (e + a) && \text{(согласно 20)}\\
&= b + e + a && \text{(согласно 22)}
\end{aligned}
$$

и

$$
\begin{aligned}
a + (b + -e) &= a + b + - e && \text{(согласно 17)}\\
&= b + a + -e && \text{(согласно допущению)}\\
&= b + (a + -e) && \text{(согласно 17 }b\text{)}\\
&= b + (-e + a) && \text{(согласно 20)}\\
&= b + -e + a && \text{(согласно 22)},
\end{aligned}
$$

то есть: если формула 23 справедлива для какого-либо из значений b, то она справедлива для всех последующих и для всех предшествующих значений. Но она справедлива для значения e, так как

$$a + e = e + a \qquad \text{(согласно 20).}$$

Следовательно, она справедлива вообще.

24. $a + b + c = a + c + b$.

Порядок, в котором производится последовательное прибавление, безразличен для результата.

Доказательство.

$a + b + c = a + (b + c)$ (согласно 22 b)

$= a + (c + b)$ (согласно 23)

$= a + c + b$ (согласно 22).

25. $0 + a = a + 0$

Ноль в качестве слагаемого ничего не меняет[14*].

Доказательство.

$0 + a = a + 0$ (согласно 23)

$= a + (e + -e)$ (согласно 10).

$= a + e + -e$ (согласно 22)

$= a$ (согласно 13).

26. *Для любых двух величин a и b основного ряда существует некоторая третья величина x того же ряда такая, что если ее прибавить к первой из двух упомянутых величин, то она дает вторую величину, т.е. такая, что*

$b = a + x$.

Доказательство (индуктивное относительно b).

Допустим, что данное предложение справедливо для некоторого значения b; тогда оно справедливо и для значения, непосредственно следующего за b. Ибо если x есть величина основного ряда и $b = a + x$,

то

$b + e = a + x + e$ (согласно допущению)

$= a + (x + e)$ (согласно 22b),

следовательно, существует также некоторая величина основного ряда (а именно $x + e$) такая, что если ее прибавить к a, то она дает $b + e$; это значит, что, в силу сделанного допущения, наше предложение справедливо и для $b + e$.

$b + -e = a + x + -e$ (согласно допущению)

$= a +(x + -e)$ (согласно 22b),

то есть: при том же предположении, данное предложение справедливо и для $b + -e$.

Итак, если это предложение справедливо для какого-либо значения b, то оно справедливо и для любого значения, предшествующего b.

Но рассматриваемая формула справедлива для $b = a$, поскольку в этом случае

$$b = a = a + 0 \qquad \text{(согласно 25).}$$

Следовательно, наше предложение справедливо вообще.

27. Гипотеза (υποθεσις) $a + b = a + c$.

Тезис (θεσις) $b = c$.

Если две величины (b и c) *таковы, что, будучи прибавлены каждая к одной и той же величине* (a), *дают равные суммы, то они равны между собой.*

Доказательство (последовательное).

Для того чтобы можно было, используя допущение, содержащееся в гипотезе, преобразовать b в c, надо сначала преобразовать b так, чтобы значение этой величины осталось тем же самым, но величина a выступила в качестве части некоторого второго слагаемого, т.е. к b надо прибавить некоторую величину $a + x$, являющуюся нулем.

Действительно, согласно 26, всегда существует некоторая величина x такая, что

$$* \; a + x = 0.$$

Тогда

$$\begin{aligned}
b &= b + 0 && \text{(согласно 25)}\\
&= b + (a + x) && \text{(согласно *)}\\
&= b + a + x && \text{(согласно 22)}\\
&= a + b + x && \text{(согласно 23)}\\
&= a + c + x && \text{(согласно гипотезе)}\\
&= a + x + c && \text{(согласно 24)}\\
&= 0 + c && \text{(согласно *)}\\
&= c && \text{(согласно 25).}
\end{aligned}$$

§ 3. Вычитание

28. *Определение.* Под разницей [der Unterschied] (разностью [die Differenz][15*]), остатком [der Rest] $a - b$ понимают такую величину основного ряда, что если к ней прибавить b, то получится a, то есть

$$a - b + b = a^{16*}.$$

Последовательное вычитание и прибавление некоторой величины ничего не меняет.

a называется уменьшаемым [der Minuend], b – вычитаемым [der Subtrahend] разности $a - b$; вычесть b из a значит образовать разность $a - b$.

29. $a + b - b = a$

Последовательное прибавление и вычитание некоторой величины ничего не меняет.

Доказательство (с помощью равенств). При осуществлении этого доказательства используется предложение, обратное [umgekehrt] (28), путем последовательного вычитания и прибавления b к $a + b$. Тогда получается равенство

$a + b - b + b = a + b$[17*] (согласно 28).

Два слагаемых некоторой суммы можно поменять местами. Осуществив это с обеими частями приведенного выше равенства, получаем:

$b + (a + b - b) = b + a$ (согласно 23).

Две величины $a + b - b$ и a характеризуются тем, что, будучи прибавлены каждая к одной и той же величине b, дают равные суммы, поэтому они равны между собой:

$a + b - b = a$ (согласно 27).

30. $a + (b - c) = a + b - c.$

Вместо вычитания некоторой величины из второго слагаемого ее можно вычесть из суммы,
или:

Вместо вычитания некоторой величины из суммы, ее можно вычесть из второго слагаемого.

Доказательство.

$a + (b - c) = a + (b - c) + c - c$ (согласно 29)

$= a + (b - c + c) - c$ (согласно 22 b)

$= a + b - c$ (согласно 28).

31. $a - (b + c) = a - b - c.$

Вместо вычитания некоторой суммы можно последовательно вычесть слагаемые
или:

Вместо последовательного вычитания двух величин можно вычесть их сумму.

Доказательство (возвратное [zuruckschreitend])

$$a - b - c = a - b - c + (b + c) - (b + c) \qquad \text{(согласно 29)}$$
$$= a - b - c + (c + b) - (b + c) \qquad \text{(согласно 23)}$$
$$= a - b - c + c + b - (b + c) \qquad \text{(согласно 22)}$$
$$= a - b + b - (b + c) \qquad \text{(согласно 28)}$$
$$= a - (b + c) \qquad \text{(согласно 28).}$$

Примечание. Доказательство называется возвратным, если правая часть доказываемого равенства шаг за шагом преобразуется в левую часть.

32. $a - (b - c) = a - b + c.$

Вместо вычитания разности можно последовательно вычесть уменьшаемое и прибавить вычитаемое

или:

Вместо последовательного вычитания одной величины и прибавления другой можно вычесть разность первой и второй величин.

Доказательство.

$$a - (b - c) = a - (b - c) - c + c \qquad \text{(согласно 28)}$$
$$= a - (b - c + c) + c \qquad \text{(согласно 31 } b\text{)}$$
$$= a - b + c \qquad \text{(согласно 28).}$$

33. $a - b - c = a - c - b.$

Порядок, в котором производится последовательное вычитание, безразличен для результата.

Доказательство.

$$a - b - c = a - (b + c) \qquad \text{(согласно 31 } b\text{)}$$
$$= a - (c + b) \qquad \text{(согласно 28)}$$
$$= a - c - b \qquad \text{(согласно 31).}$$

34. $a + b - c = a - c + b$

Порядок, в котором последовательно одна величина прибавляется, другая вычитается, безразличен для результата.

Доказательство.

$$a + b - c = a + b - c - b + b \qquad \text{(согласно 28)}$$
$$= a + b - b - c + b \qquad \text{(согласно 33)}$$
$$= a - c + b \qquad \text{(согласно 29).}$$

35. $a - 0 = a.$

Вычитание нуля ничего не меняет.
Доказательство.

$a - 0 = a - 0 + 0$ (согласно 25)

$= a$ (согласно 28).

36. $a - a = 0.$

Разность двух равных величин есть нуль.
Доказательство.

$a - a = 0 + (a - a)$ (согласно 25)

$= 0 + a - a$ (согласно 30)

$= 0$ (согласно 29).

37. 38. *Обозначение*. Вместо $0 - a$ можно писать $-a$, а вместо a можно писать $+a$; $+a$ и $-a$ называются означенными [bezeichnete] величинами, причем $+a$ и $+b$, а также $-a$ и $-b$ называются равноозначенными [gleichbezeichnete], $+a$ и $-b$ – неравноозначенными [ungleichbezeichnete] величинами.

$0 - a = -a.$ (37)

$+ a = a.$ (38)

39. $a + (-b) = a - b.$

Плюс минус можно заменить минусом.
Доказательство.

$a + -b = a + (0 - b)$ (согласно 37)

$= a + 0 - b$ (согласно 30)

$= a - b$ (согласно 25).

40. $a - -b = a + b$, *т.е.* $- -b = b.$

Минус минус можно заменить плюсом.
Доказательство.

1) $a - \; -b = a - (0 - b)$ (согласно 37)

$= a - 0 + b$ (согласно 32)

$= a + b$ (согласно 35).

2) $- \; -b = 0 - -b$ (согласно 37)

$= 0 + b$ (согласно доказательству 1)

$= b$ (согласно 25).

41. $-a + -b = -a - b = -(a + b)$.

Чтобы сложить две величины, означенные минусом (или прибавить их друг к другу), можно сложить [соответствующие] неозначенные величины и перед суммой поставить знак минус.

Доказательство.

$$
\begin{aligned}
-a + -b &= -a - b && \text{(согласно 39)}\\
&= 0 - a - b && \text{(согласно 37)}\\
&= 0 - (a + b) && \text{(согласно 31 } b\text{)}\\
&= -(a + b) && \text{(согласно 37).}
\end{aligned}
$$

42. *Чтобы сложить две неравноозначенные величины, можно произвести вычитание неозначенных величин и перед остатком поставить тот знак, какой имела величина, взятая в качестве уменьшаемого, то есть*

$$
\begin{aligned}
a + -b &= a - b\\
&= -b + a = -(b - a).
\end{aligned}
$$

Доказательство.

$$
\begin{aligned}
a + -b &= a - b && \text{(согласно 39)}\\
a + -b &= -b + a && \text{(согласно 23)}\\
&= 0 - b + a && \text{(согласно 37)}\\
&= 0 - (b - a) && \text{(согласно 32 } b\text{)}\\
&= -(b - a) && \text{(согласно 37).}
\end{aligned}
$$

*43. *Определение.* Выражение, в котором величины последовательно соединены посредством плюса или минуса, называется полиномом (биномом и т.д.), а входящие в него отдельные величины вместе с их знаками – членами (νομοι) полинома. Если первый член полинома не имеет знака, то ему можно придать знак +. Например, $a + (b + c) - d$ – полином, состоящий из трех членов, а именно a (или $+a$) – его первый член, $+(b + c)$ – его второй, $-d$ – его третий член.

*44–46. В полиноме любые два рядом стоящие члена можно поменять местами

$$\ldots + a + b \ldots = \ldots + b + a \ldots \tag{44}$$

$$\ldots + a - b \ldots = \ldots - b + a \ldots \tag{45}$$

$$\ldots - a - b \ldots = \ldots - b - a \ldots, \tag{46}$$

многоточия означают, что перед этими членами и после них может стоять сколь угодно много членов. (Если перед ними не стоит ни один член, то, в соответствии с 25 и 37, в качестве предшествующего члена можно ввести нуль.)

Доказательство.

$\ldots + a + b \ldots = \ldots + b + a \ldots$ (согласно 24)

$\ldots + a - b \ldots = \ldots - b + a \ldots$ (согласно 34)

$\ldots - a - b \ldots = \ldots - b - a \ldots,$ (согласно 33).

47. *Значение полинома не зависит от порядка его членов.*

Доказательство. Поскольку (согласно 44–46) каждый член полинома можно поменять местами с непосредственно предшествующим и непосредственно последующим его членами, то каждый член полинома можно поместить в нем на любое место, повторно ставя его на место непосредственно последующего или непосредственно предшествующего члена. Поэтому он может оказаться как на любом последующем, так и на любом предшествующем месте. Значит, члены полинома можно располагать в любом порядке, и это не меняет его значения.

48. *Вместо прибавления полинома можно последовательно прибавить его члены*
или:

Вместо последовательного прибавления членов полинома можно прибавить полином, то есть:

$\ldots + (P) = \ldots P,$

где (P) означает полином, а P – последовательно присоединяемые его члены. При этом предполагается, что если первый член не имеет никакого знака, то (согласно 38) ему приписывается знак плюс.

Доказательство 1.

Пусть (P) есть бином; тогда

$a + (b + c) = a + b + c$ (согласно 22)

$a + (b - c) = a + b - c$ (согласно 30).

Далее,

$a + (-b + c) = a + -b + c$ (согласно 22)

$= a - b + c$ (согласно 39)

$a + (-b - c) = a + -b + -c$ (согласно 30)

$= a - b - c$ (согласно 39).

Если скобке со знаком плюс *не* предшествует никакая величина, то (согласно 25) к ней можно добавить в качестве первого члена нуль, то есть в приведенных выше формулах положить $a = 0$, в заключительных же формулах нуль, в свою очередь (согласно 25 и 37), удалить.

Доказательство 2. Если (P) есть полином, состоящий из более чем двух членов, то мы восстанавливаем все скобки, опущенные в соответствии с № 5; все эти скобки начинаются, согласно № 5, с первого члена полинома, то есть в нашем случае непосредственно после первого стоящего впереди знака +, и каждая из них заключает в себе только две величины. Следовательно, согласно доказательству 1, можно начать с того, что удалить внешнюю скобку, так как она заключает в себе только две величины и является плюсовой скобкой [die Plusklammer]. По этой же причине можно затем удалить скобку, которая теперь стала внешней и начинается с первой величины, и так далее, до тех пор, пока не исчезнут все скобки.

Пример доказательства для четырех величин:

$$\ldots (b + c + d + e) = \ldots + ([(b + c) + d] + e) \qquad \text{(согласно 5)}$$

$$= \ldots + [(b + c) + d] + e \qquad \text{(согласно доказательству 1)}$$

$$= \ldots + (b + c) + d + e \qquad \text{(согласно 5)}$$

$$= \ldots + b + c + d + e \qquad \text{(согласно 5).}$$

*49. ***Вместо вычитания полинома можно знаки всех его членов заменить противоположными и последовательно присоединить полученные таким путем члены***

или:

Вместо последовательного присоединения членов некоторого полинома можно заменить все знаки членов этого полинома противоположными и вычесть полученный таким путем полином, то есть

$$\ldots - (P) = \ldots P',$$

где (P) означает некоторый полином, а P' – последовательный ряд членов, возникающий из полинома (P) путем замены всех его членов противоположными.

Доказательство 1. Пусть (P) есть бином; тогда

$$a - (b + c) = a - b - c \qquad \text{(согласно 31)}$$

$$a - (b - c) = a - b + c \qquad \text{(согласно 32)}$$

Далее,

$$a - (-b + c) = a - -b - c \qquad \text{(согласно 31)}$$
$$= a + b - c \qquad \text{(согласно 40)}$$
$$a - (-b - c) = a - -b + c \qquad \text{(согласно 32)}$$
$$= a + b + c \qquad \text{(согласно 40)}$$

Если скобке со знаком минус *не* предшествует никакая величина, то (согласно 37) можно начать с того, что присоединить в качестве первого члена нуль, а на заключительном этапе его удалить (согласно 25 и 37).

Доказательство 2. Пусть (P) есть полином, содержащий более чем два члена. Тогда можно поступить так, как это было в доказательстве 2 предшествующего предложения. Затем, раскрывая ту скобку, которая каждый раз является внешней, знак последнего члена полинома заменить (согласно доказательству 1) противоположным, затем так же поступить со знаком последующего члена, и так далее до тех пор, пока мы не дойдем до второго члена полинома.

Пример доказательства для четырех членов:

$$a - (b - c + d - e) = a - ([(b - c) + d] - e) \qquad \text{(согласно 5)}$$
$$= a - [(b - c) + d] + e \qquad \text{(согласно доказательству 1)}$$
$$= a - (b - c) - d + e \qquad \text{(согласно 31)}$$
$$= a - b + c - d + e \qquad \text{(согласно 32).}$$

*50. *Все предложения о соединении, которые справедливы в отношении единичности, справедливы и в случае, когда вместо единичности взята произвольная величина основного ряда.*

Доказательство. Предложения, касающиеся соединений, в которых встречается e, содержатся в № 10, 11, 13, 14, 17, 20 и 21. И мы имеем

$$a + -a = a - a \qquad \text{(согласно 39)}$$
$$= 0 \qquad \text{(согласно 36),}$$

то есть формула 10 справедлива и тогда, когда вместо e берется a.

Далее,

$$0 + -a = 0 - a \qquad \text{(согласно 39)}$$
$$= -a \qquad \text{(согласно 37),}$$

то есть формула 11 также справедлива для этого обобщения.

Затем устанавливается, что обобщение № 13 содержится в № 29, обобщение № 14 – в № 28, № 15 и 17 – в № 22, а № 20 и 21 – в № 23.

*51. *Если тем же способом, каким из e был получен основной ряд, из отличной от нуля величины E этого ряда получается некоторая последовательность величин, то в ней, как и в основном ряде, каждый член отличен от всех остальных.*

Доказательство. Пусть A есть член последовательности, полученной из E, который следует за членом B; это означает (согласно 8), что B строится из A путем последовательного прибавления величины E. Поскольку E не равно нулю, оно (согласно 12) равно либо e, либо $-e$, либо сумме положительных единичностей, либо сумме отрицательных единичностей. Вместо того чтобы прибавлять сумму, состоящую из двух или более членов, соответствующие величины можно (согласно 48) прибавить последовательно. Следовательно, B строится из A так, что прибавляются последовательно положительные или же, так же последовательно, отрицательные единичности, то есть (согласно 8, 9) B есть либо некоторая следующая за A величина основного ряда, либо некоторая его величина, предшествующая A, следовательно (согласно 7) она отлична от A.

Примечание. Если некоторый ряд величин R развертывается, исходя из какой угодно отличной от нуля величины E, которая принадлежит основному ряду, в соответствии с процедурой, указанной в № 7, то величину E можно положить в качестве единичности, а ряд величин R – в качестве основного ряда. Тогда для этой новой единичности и этого нового основного ряда справедливы все до сих пор установленные предложения.

§ 4. Умножение

52. *Определение.* Под выражением $a.\,1$ (читается: a один раз, или a, умноженное на один) понимают саму величину a, то есть

$$a.\,1 = a. \qquad (52)$$

Умножение на единицу ничего не меняет.

53. *Определение.* Основной ряд, единичность которого равна единице, называется числовым рядом, его члены – числами. Число 1 + 1 обозначается через 2, число 2 + 1 – через 3, и т.д.

$$1 + 1 = 2.$$

$$2 + 1 = 3. \qquad (53)$$

Примечание. Поскольку числовой ряд есть основной ряд, а законы сложения и вычитания справедливы для [величин] любого основного ряда, то они справедливы для чисел.

54. *Определение*. Числа числового ряда, следующие за нулем, называются положительными, а предшествующие ему – отрицательными числами. Если a есть положительное число, то числа a и $-a$ называются противоположными друг другу, а число a называется положительным значением числа $-a$[19*].

55. Числовой ряд есть

... | –3 | –2 | –1 | 0 | 1 | 2 | 3 | ... ,

и каждое его отрицательное число противоположно некоторому положительному числу.

Доказательство. Пусть a – некоторое число числовой последовательности. Тогда непосредственно следующее за ним число в этой последовательности (согласно 8) равно $a + 1$, так как единичность числового ряда равна 1; стало быть, число, следующее за 1, есть $1 + 1$, то есть 2 (согласно 53), число, следующее за 2, есть $2 + 1$, то есть 3 (согласно 53), и т.д. Число, непосредственно предшествующее 1, есть 0 (согласно 10), число, непосредственно предшествующее 0, есть –1 (согласно 11), следовательно, число, противоположное числу 1. Тогда, если какое-либо отрицательное число противоположно положительному числу (a), то это же справедливо и для непосредственно предшествующего отрицательного числа. Ибо число, предшествующее числу $-a$, есть (согласно 9) $-a + -1 = -(a + 1)$ (согласно 41), то есть как раз число, противоположное некоторому положительному числу.

Итак, если некоторое отрицательное число противоположно какому-либо положительному, то и непосредственно предшествующее ему число – тоже. Следовательно, каждое предшествующее число противоположно некоторому положительному числу. Поскольку [число] –1 противоположно положительному числу, то это же верно и для всех предшествующих ему чисел, то есть для всех отрицательных чисел. Поскольку же, далее, число, предшествующее числу $-a$, $= -(a + 1)$, как было доказано выше, получается, что число, предшествующее числу -1, $= -(1 + 1) = -2$ (согласно 53), число, предшествующее числу -2, $= -(2 + 1) = -3$ (согласно 53), и т.д.

56–58. *Определение*. Умножение чисел, отличных от единицы, определяется следующими формулами:

$$a . (\beta + 1) = a\beta + a, \tag{56}$$

где β есть некоторое положительное число.

$$a.\,0 = 0. \tag{57}$$

$$a.\,(-\beta) = -(a\beta)^{20*}, \tag{58}$$

где β есть некоторое положительное число; [выражение] $a.\,\beta$ (читается a, взятое β раз, или: a, умноженное на β) называется произведением [das Produkt], a – его множимым [der Multiplikand], β – его множителем [der Multiplikator], а оба они – сомножителями [Faktoren] произведения. Вместо $a.\,\beta$ можно писать также $a\beta$; однако этого не разрешается делать, если оба сомножителя записаны с помощью цифр (так, нельзя вместо 2.3 писать 23).

Словесные формулировки этих формул:

(56) *Вместо прибавления единицы к положительному множителю можно прибавить множимое к произведению.*

(57) *Если любое число умножить на нуль, то получится нуль.*

(58) *Вместо умножения на отрицательное число можно умножить на его положительное значение и перед произведением поставить знак минус.*

59. *Обозначение.* В случае умножения скобку можно удалить, если первая величин перемножается со следующей за ней величиной. Далее, если произведение есть член полинома, то скобку, которая заключает в себе это произведение, опускают. Например, abc означает, что a должно быть перемножено с b, а их произведение – с c; стало быть, это равно $(ab)c$. Далее, $ab - cd$ означает, что a должно быть умножено на b, c умножено на d, произведение же cd надлежит вычесть из произведения ab; что, стало быть, равно $(ab - cd)$.

Примечание. Таким образом, вместо [выражения] $(-(a\beta))$ можно писать $-a\beta$.

60. *Произведение $a\beta$ есть величина, которая принадлежит тому же основному ряду, что и множимое a.*

Доказательство.

1 (индуктивное относительно β). Допустим, что данное предложение справедливо для некоторого положительного числа β, то есть $a\beta$ принадлежит тому же основному ряду, что и a; тогда

$$a.(\beta + 1) = a + a \qquad \text{(согласно 56)}$$

есть, стало быть, сумма двух величин, которые принадлежат одному и тому же основному ряду, значит, эта сумма также принадлежит этому ряду (согласно 15). Итак, если данное предложение справедливо для некоторого положительного числа β, то оно справедливо для непосредственно следующего числа, стало быть, и для всех последующих чисел. Но для $\beta = 1$ это предложение справедливо, ибо

$$a.1 = a \qquad \text{(согласно 52),}$$

следовательно, оно справедливо для 1 и всех следующих за ним чисел числового ряда, то есть для всех положительных чисел.

2. Данное предложение справедливо для $\beta = 0$, так как

$$a.0 = 0 \qquad \text{(согласно 57).}$$

3. Данное предложение справедливо для каждого отрицательного числа, так как если γ есть его положительное значение, то есть $\beta = -\gamma$, то

$$a.\beta = a.(-\gamma) = -(a\gamma) \qquad \text{(согласно 58).}$$

Поскольку (согласно доказательству 1) $a\gamma$ принадлежит тому же основному ряду, которому принадлежит a, то $-(a\gamma)$, то есть $0 - a\gamma$, тоже принадлежит этому ряду (согласно 28), следовательно, принадлежит ему и $a\beta$.

Примечание. То же самое справедливо и для случая, когда величина a последовательно умножается на несколько данных величин.

61. *Добавление.* Отсюда следует, что для умножения справедливы все законы сложения и вычитания.

62. В общем случае, то есть когда β отрицательно или нуль, справедливо

$$a(\beta + 1) = a\beta + a.$$

Вместо прибавления единицы к множителю можно множимое прибавить к произведению,
или:

Вместо прибавления множимого к произведению можно к множителю прибавить единицу.

Доказательство 1. Если β есть положительное число, то данное предложение справедливо (согласно 56).

2. Если $\beta = 0$, то

$$\begin{aligned} a.(0 + 1) &= a.1 && \text{(согласно 25)} \\ &= a && \text{(согласно 52)} \\ &= 0 + a && \text{(согласно 25)} \\ &= a.0 + a && \text{(согласно 57)} \end{aligned}$$

3. Если $\beta = -1$, мы имеем

$a(-1+1) = a(0-1+1)$ (согласно 37)

$= a.0$ (согласно 28)

$= 0$ (согласно 57)

$= 0 - a + a$ (согласно 28)

$= -a + a$ (согласно 37)

$= -(a.1) + a$ (согласно 52)

$= a.(-1) + a$ (согласно 58).

4. Если β есть число, предшествующее в числовом ряду числу -1, то и число, непосредственно следующее за β, отрицательно: пусть положительное значение этого последнего есть γ и, значит, оно само есть $-\gamma$, тогда β есть число, которое ему предшествует, то есть

$\beta = -\gamma + -1$ (согласно 9).

Итак, $a(\beta + 1) = a(-\gamma + -1 + 1)$ (согласно *)

$= a(-\gamma)$ (согласно 14)

$= -a\gamma$ (согласно 58)

$= -a\gamma - a + a$ (согласно 28)

$= -(a\gamma + a) + a$ (согласно 41)

$= -[a(\gamma + 1)] + a$ (согласно 62 b)

$= a[-(\gamma + 1)] + a$ (согласно 41)

$= a\beta + a$ (согласно *).

63. $a(\beta - 1) = a\beta - a.$

Вместо вычитания единицы из множителя можно из произведения вычесть множимое,
или:
Вместо вычитания множимого из произведения можно вычесть единицу из множителя.

Доказательство

$a(\beta - 1) = a(\beta - 1) + a - a$ (согласно 29)

$= a(\beta - 1 + 1) - a$ (согласно 62 b)

$= a\beta + a$ (согласно 28).

64. Если a есть величина основного ряда, получающаяся из $e > 1$ и $a = e\alpha$, то a называют именованной [benannt] величиной, e – ее единичностью, α – ее числовым значением[21*].

65. Каждая величина a основного ряда может быть представлена в виде произведения единичности e этого ряда и некоторого числа α, то есть в форме $e\alpha$. Число α может быть положительным, отрицательным или 0, в зависимости от того, следует ли величина a в основном ряду за числом 0, предшествует ему, или сама является нулем.

Доказательство (индуктивное). 1. Если $a = 0$, то

$$a = 0 = e.0 \qquad \text{(согласно 57)},$$

следовательно, является произведением единичности e и числа нуль.

2. Допустим, что рассматриваемое предложение верно для $a = 0$ или для какой-нибудь величины a, следующей за 0, так что $a = e\alpha$ и α есть нуль или положительное число, тогда

$$a + e = e\alpha + e = e(\alpha + 1) \qquad \text{(согласно 62 } b\text{)}.$$

Значит, данное предложение справедливо также и для непосредственно следующего члена; но, поскольку оно верно для $a = 0$ (часть 1), оно верно для каждого члена, следующего за нулем.

3. Допустим, что данное предложение верно для $a = 0$ или для какой-либо величины a, предшествующей нулю, так что $a = e\alpha$ и α есть нуль или положительное число, тогда

$$a - e = e\alpha - e = e(\alpha - 1) \qquad \text{(согласно 63 } b\text{)}.$$

Таким образом, это предложение верно и для непосредственно предшествующего члена, но, поскольку оно верно для $a = 0$ (часть 1), оно верно и для каждого члена основного ряда, предшествующего нулю.

66. $\quad a.(\beta + \gamma) = \alpha\beta + \alpha\gamma.$

Чтобы число умножить на сумму, его можно умножить на каждое слагаемое и сложить полученные произведения,
или

Чтобы сложить произведения, содержащие равные множимые, можно сложить множители, а множимое оставить без изменения.

Доказательство (индуктивное относительно γ).

1. Допустим, что формула (66) справедлива для некоторого числа γ.

Тогда

$$
\begin{aligned}
a[\beta + (\gamma + 1)] &= a[\beta + \gamma + 1] && \text{(согласно 22)}\\
&= a(\beta + \gamma) + a && \text{(согласно 62)}\\
&= a\beta + a\gamma + a && \text{(согласно допущению)}\\
&= a\beta + (a\gamma + a) && \text{(согласно 22 } b\text{)}\\
&= a\beta + a(\gamma + 1) && \text{(согласно 62 } b\text{),}
\end{aligned}
$$

то есть, если данная формула справедлива для какого-либо числового значения γ, то она справедлива и для непосредственно следующего числа, а значит, для всех последующих чисел.

2. При том же предположении,

$$
\begin{aligned}
a[\beta + (\gamma - 1)] &= a[\beta + \gamma - 1] && \text{(согласно 30)}\\
&= a(\beta + \gamma) - \mathrm{a} && \text{(согласно 63)}\\
&= a\beta + a\gamma - a && \text{(согласно допущению)}\\
&= a\beta + (a\gamma - a) && \text{(согласно 33 } b\text{)}\\
&= a\beta + a(\gamma - 1) && \text{(согласно 63 } b\text{)}
\end{aligned}
$$

Итак, эта формула справедлива для непосредственно предшествующего значения, следовательно, и для всех предшествующих значений.

3. Но формула (66) справедлива для $\gamma = 1$, так как

$$a(\beta + 1) = a\beta + a \qquad \text{(согласно 62),}$$

поэтому она справедлива вообще.

67. $\quad a(\beta - \gamma) = a\beta - a\gamma.$

Чтобы умножить число на разность, его можно умножить на ее члены по отдельности и вычесть из первого произведения второе,

или:

Чтобы из одного произведения вычесть другое с тем же множимым, можно из первого множителя вычесть второй, а множимое оставить без изменения.

Доказательство (последовательное).

$$
\begin{aligned}
a(\beta - \gamma) &= a(\beta - \gamma) + a\gamma - a\gamma && \text{(согласно 29)}\\
&= a(\beta - \gamma + \gamma) - a\gamma && \text{(согласно 66 } b\text{)}\\
&= a\beta - a\gamma && \text{(согласно 28)}
\end{aligned}
$$

68. $(a + b)\gamma = a\gamma + b\gamma.$

Чтобы умножить сумму на число, можно умножить каждое слагаемое на это число и сложить полученные произведения, или:

Чтобы сложить произведения, имеющие одинаковые множители, можно сложить их множимые, а множитель оставить без изменения.

Доказательство (индуктивное относительно γ). Допустим, что данное предложение справедливо для какого-либо числового значения γ; тогда

$$
\begin{aligned}
(a + b)(\gamma + 1) &= (a + b)\gamma + (a + b) && \text{(согласно 62)}\\
&= a\gamma + b\gamma + (a + b) && \text{(согласно допущению)}\\
&= a\gamma + b\gamma + a + b && \text{(согласно 22)}\\
&= a\gamma + a + b\gamma + b && \text{(согласно 24)}\\
&= a\gamma + a + (b\gamma + b) && \text{(согласно 22 } b\text{)}\\
&= a(\gamma + 1) + b(\gamma + 1) && \text{(согласно 62 } b\text{)}
\end{aligned}
$$

Итак, данное предложение справедливо для всех значений, следующих после γ.

При том же предположении,

$$
\begin{aligned}
(a + b)(\gamma - 1) &= (a + b)\gamma - (a + b) && \text{(согласно 62)}\\
&= a\gamma + b\gamma - (a + b) && \text{(согласно допущению)}\\
&= a\gamma + b\gamma - a - b && \text{(согласно 31)}\\
&= a\gamma - a + b\gamma - b && \text{(согласно 34)}\\
&= a\gamma - a + (b\gamma - b) && \text{(согласно 30 } b\text{)}\\
&= a(\gamma - 1) + b(\gamma - 1) && \text{(согласно 63 } b\text{),}
\end{aligned}
$$

то есть данное предложение справедливо для всех значений, предшествующих γ.

Но данное предложение справедливо для $\gamma = 1$, ибо

$$
\begin{aligned}
(a + b)1 &= a + b && \text{(согласно 52)}\\
&= a.\ 1 + b.\ 1 && \text{(согласно 52)}
\end{aligned}
$$

Итак, данное предложение справедливо для $\gamma = 1$, следовательно, согласно первой части доказательства, оно справедливо для всех последующих, а согласно второй части, – для всех предшествующих значений, то есть справедливо вообще.

69. $(a-b)\gamma = a\gamma - b\gamma$.

Чтобы умножить разность на некоторое число, можно последовательно умножить на это число ее члены и вычесть из одного произведения другое,
или:

Чтобы вычесть произведение из другого произведения, имеющего тот же множитель, можно из множимого первого вычесть множимое второго произведения, а множитель оставить без изменения.

Доказательство (последовательное):

$$\begin{aligned} (a-b)\gamma &= (a-b)\gamma + b\gamma - b\gamma && \text{(согласно 29)} \\ &= (a-b+b)\gamma - b\gamma && \text{(согласно 68 } b\text{)} \\ &= a\gamma - b\gamma && \text{(согласно 28).} \end{aligned}$$

70. $a(\beta\gamma) = a\beta\gamma$.

Вместо умножения числа на произведение можно выполнить последовательное умножение на каждый из сомножителей,
или:

Вместо последовательного умножения числа на два числа, его можно умножить на их произведение.

Доказательство (индуктивное относительно γ).

1. Допустим, что данная формула справедлива для некоторого значения γ, тогда

$$\begin{aligned} a[\beta(\gamma+1)] &= a[\beta\gamma + \beta] && \text{(согласно 62)} \\ &= a(\beta\gamma) + a\beta && \text{(согласно 66)} \\ &= a\beta\gamma + a\beta && \text{(согласно допущению)} \\ &= a\beta(\gamma+1) && \text{(согласно 62 } b\text{).} \end{aligned}$$

2. При том же допущении,

$$\begin{aligned} a[\beta(\gamma-1)] &= a[\beta\gamma - \gamma] && \text{(согласно 63)} \\ &= a(\beta\gamma) - a\beta && \text{(согласно 67)} \\ &= a\beta\gamma - a\beta && \text{(согласно допущению)} \\ &= a(\beta\gamma - 1) && \text{(согласно 63 } b\text{).} \end{aligned}$$

3. $$\begin{aligned} a.(\beta 1) &= a\beta && \text{(согласно 52)} \\ &= a\beta \cdot 1 && \text{(согласно 52).} \end{aligned}$$

Итак, данная формула справедлива для $\gamma = 1$, но, согласно первой части, она справедлива для всех последующих, а согласно второй, – для всех предшествующих значений, следовательно, она справедлива вообще.

71. Если α – некоторое число, то

$$1 \cdot \alpha = \alpha.$$

Произведение, множимое которого = 1, *равно множителю.*

Доказательство (индуктивное). Допустим, что данная формула справедлива для какого-либо числового значения α; тогда

$$1 \cdot (\alpha + 1) = 1. \alpha + 1 \qquad \text{(согласно 62)}$$
$$= \alpha + 1 \qquad \text{(согласно допущению)}$$
$$1 \cdot (\alpha - 1) = 1. \alpha - 1 \qquad \text{(согласно 63)}$$
$$= \alpha - 1 \qquad \text{(согласно допущению),}$$

то есть, если формула 71 справедлива для какого-либо значения, то она справедлива для непосредственно следующего и для непосредственно предшествующего, стало быть, для всех последующих и всех предшествующих значений. Но она справедлива для $\alpha = 1$, ибо

$$1 \cdot 1 = 1 \qquad \text{(согласно 52).}$$

Следовательно, она справедлива вообще.

72. Если α и β – числа, то

$$\alpha\beta = \beta\alpha.$$

Сомножители произведения можно менять местами (если они числа).

Доказательство (индуктивное). Пусть формула 72 верна для некоторого числового значения β. Тогда

$$\alpha(\beta + 1) = \alpha\beta + \alpha \qquad \text{(согласно 62)}$$
$$= \beta\alpha + \alpha \qquad \text{(согласно допущению)}$$
$$= \beta\alpha + 1. \alpha \qquad \text{(согласно 71)}$$
$$= (\beta + 1)\alpha \qquad \text{(согласно 68 } b\text{)}$$
$$\alpha(\beta - 1) = \alpha\beta - \alpha \qquad \text{(согласно 63)}$$
$$= \beta\alpha - \alpha \qquad \text{(согласно допущению)}$$
$$= (\beta - 1)\alpha \qquad \text{(согласно 63 } b\text{)}$$

Но формула 72 верна для $\beta = 1$, ибо

$$\alpha \cdot 1 = \alpha \qquad (52)$$
$$= 1 \cdot \alpha \qquad (71).$$

Следовательно, и т.д.

73. $a\beta\gamma = \alpha\gamma\beta$.

Порядок, в котором последовательно умножают на два числа, безразличен для результата.

Доказательство.

$a\beta\gamma = a(\beta\gamma)$ (согласно 70 *b*)

$= a(\gamma\beta)$ (согласно 72)

$= a\gamma\beta$ (согласно 70).

74. $0 \cdot \alpha = \alpha \cdot 0$.

Произведение, в котором один из сомножителей – нуль, также есть нуль.

Доказательство.

$0. \alpha = \alpha.0$ (согласно 72)

$= 0$ (согласно 57).

75. $(-a). \beta = a \cdot (-\beta) = -a\beta$.

Вместо того чтобы знак минус помещать перед одним из сомножителей, его можно поместить перед произведением.

Доказательство.

$(-a). \beta = (0 - a)\beta$ (согласно 37)

$= 0. \beta - a. \beta$ (согласно 69)

$= 0 - a\beta$ (согласно 74)

$= - a\beta$ (согласно 37).

Далее, $a(-\beta) = -a\beta$ (согласно 58).

76. $(-a) \cdot (-\beta) = a\beta$.

Вместо того чтобы перемножать две величины со знаком минус, можно перемножить эти величины как неозначенные.

Доказательство.

$(-a)(-\beta) = -[a(-\beta)]$ (согласно 75)

$= - -[a\beta]$ (согласно 75)

$= a\beta$ (согласно 40).

**77. Чтобы сумму сколь угодно многих членов умножить на данное число, можно все слагаемые умножить на это число и полученные произведения сложить*

$$(a_1 + a_2 + ... + a_n)\beta = a_1\beta + a_2\beta + ... + a_n\beta.$$

Доказательство (индуктивное относительно n). Допустим, что данное предложение справедливо для n членов, тогда можно доказать, что оно справедливо и для $n+1$ члена. Имеет место (согласно 68)

$$(a_1 + a_2 + \dots a_n + a_{n+1})\beta = (a_1 + a_2 + \dots a_n)\beta + a_{n+1}\beta$$
$$= a_1\beta + a_2\beta + \dots + a_n\beta + a_{n+1}\beta \quad \text{(согласно допущению)},$$

то есть, если данное предложение справедливо для некоторого числа членов, то оно справедливо и для числа членов, на единицу большего, чем данное, но, поскольку оно справедливо для двух членов, оно справедливо для любого их количества.

*78. ***Чтобы величину a умножить на некоторую сумму, ее можно умножить на каждое слагаемое и полученные произведения сложить.***

Это значит

$$a(\beta_1 + \beta_2 + \dots + \beta_n) = a\beta_1 + a\beta_2 + \dots a\beta_n.$$

Доказательство такое же, как и в 77.

*79. ***Чтобы некоторую сумму из сколь угодно большого количества членов умножить на другую такого же рода сумму, можно каждый член одной суммы перемножить с каждым членом другой суммы и полученные произведения сложить.***

$$\begin{aligned}(a_1 + a_2 + \dots + a_n)(\beta_1 + \beta_2 + \dots + \beta_m) = {} & a_1\beta_1 + a_2\beta_1 + \dots + a_n\beta_1 \\ & + a_1\beta_2 + a_2\beta_2 + \dots + a_n\beta_2 \\ & \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ & + a_1\beta_m + a_2\beta_m + \dots + a_n\beta_m.\end{aligned}$$

Доказательство. Имеем (согласно 77)

$$\begin{aligned}(a_1 + a_2 + \dots + a_n)(\beta_1 + \beta_2 + \dots + \beta_m) = {} & a_1(\beta_1 + \beta_2 + \dots + \beta_m) \\ & + a_2(\beta_1 + \beta_2 + \dots + \beta_m) \\ & \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ & + a_n(\beta_1 + \beta_2 + \dots + \beta_m) \\ & = a_1\beta_1 + a_1\beta_2 + \dots + a_1\beta_m \\ & + a_2\beta_1 + a_2\beta_2 + \dots + a_2\beta_m \\ & \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ & + a_n\beta_1 + a_n\beta_2 + \dots + a_n\beta_m \\ & \text{(согласно 78).}\end{aligned}$$

80. *Чтобы полином P умножить на число a, или число a умножить на полином, можно (в остальном оставляя полином без изменения) приписать число a каждому члену полинома в качестве сомножителя,*

или:

Полином, все члены которого содержат одинаковый сомножитель a, равен произведению, одним из сомножителей которого является a, а другим сомножителем – полином P, получающийся из данного удалением сомножителя a из каждого члена последнего.

Доказательство. Представим полином P в виде суммы, для этого заменим каждый минус знаком + – (иными словами, вместо члена вида $-b$ напишем $+ -b$). Умножим полученную таким образом сумму на a, присоединив a к каждому ее слагаемому в качестве сомножителя (согласно 77, 78). Например, вместо $+ -b$ получим $+ (-b)a$, затем (согласно 75) получим $+ -ba$, или $-ba$. Это означает, что к снабженным знаком минус членам полинома P достаточно присоединить сомножитель a.

81. *При перемножении двух полиномов каждый член одного из них перемножается с каждым членом другого. Каждому произведению двух равно означенных членов приписывается знак +, каждому произведению двух неравно означенных членов приписывается знак –, затем полученные таким образом члены соединяются в один полином.*

Доказательство. Каждый из двух полиномов можно, как это делалось в № 80, представить в виде суммы, заменив знак – в каждом соответствующим образом означенном члене знаком + –, затем, в соответствии с 79, каждый член первой суммы перемножить с каждым членом второй. Тогда мы получим сумму произведений, некоторые сомножители которых все еще содержат знак –. Если в таком произведении только один из сомножителей имеет знак –, значит исходные члены, из которых возникло это произведение, имели разные знаки, например, если $(-a)b$ – рассматриваемое произведение, то знак минус можно (согласно 75) поставить перед произведением, а в конце можно заменить + – знаком –; например, $+(-a)b$ заменяется на $+-ab$, т.е. на $-ab$. Если же знак минус имеют оба сомножителя некоторого произведения, например, $(-c)(-d)$, то, (согласно 75) оба знака минус можно удалить, получив, в нашем примере, вместо $(-c)(-d)$, член $+cd$, то есть такой член, какой получился бы, если исходные члены, из которых возникло произведение, имели знаки +.

*82. *Порядок сомножителей произведения, содержащего сколь угодно много сомножителей, безразличен для результата.*

Доказательство такое же, как в № 47 для сложения.

*83. *Скобки, заключающие в себе какой угодно ряд сомножителей, можно удалить.*

*84. Вместо того чтобы умножить полином на –1, можно знаки всех членов полинома заменить противоположными,
или:

$$P \cdot (-1) = P',$$

где P' означает полином, возникающий из P заменой знаков его членов противоположными.

Доказательство.

$$\begin{aligned} P \cdot (-1) &= -P \cdot 1 && \text{(согласно 75)} \\ &= -P && \text{(согласно 52)} \\ &= P' && \text{(согласно 49).} \end{aligned}$$

Часть вторая

Роберт Грассман

ЛОГИЧЕСКОЕ И МЕТОДОЛОГИЧЕСКОЕ УЧЕНИЕ

УЧЕНИЕ О ФОРМАХ

ВВЕДЕНИЕ В УЧЕНИЕ О ФОРМАХ[1*]

1. Величины и связи в учении о формах. Их обозначения

Учение о формах[1] должно научить нас законам строго научного мышления. Оно уже не нуждается в предположении других законов мышления; ибо в противном случае каждое нарушение этих последних законов делало бы ошибочным и ненаучным также и учение о формах; в особенности, следовательно, оно не нуждается в предположении законов языка, не может развертываться по законам и в формах языка. Одним словом, оно предполагает только способность людей к мышлению, только возможность строго научного мышления зрелых, четко мыслящих людей.

Детям, еще не научившимся говорить, совсем нельзя преподавать учение о формах. Картина внешнего мира у детей еще темна и смутна; они еще недостаточно определенно разграничивают отдельные события жизни, объединяют и смешивают сходные вещи и сходные виды деятельности, дают одинаковое название самым различным вещам. На такой низкой ступени способности к мышлению, естественно, не могут развертываться строгие научные формы мышления. Способность к мышлению должна произрасти, должна развиться и созреть, прежде чем она сделает возможным *понимание* строгости во всей ее полноте.

Прежде чем ребенок будет в состоянии следить за ходом мысли в Учении о формах и с требуемой четкостью различать и употреблять величины и их соединения, он должен научиться говорить, научиться различать свойство и действие, научиться пони-

---

[1] Форма [*Forma*] представляет собой заимствованное латинское слово *forma*, а последнее – заимствованное, путем замены букв, – греческое *morphe*. Это слово происходит от корневого глагола *mar* – размягчаю, в соответствии с чем *marva, agsmarva* означает «мягкий», «податливый» и, таким образом, *morphe* – мягкость, телесный облик, прекрасный облик, потом облик вообще [*Gestalt*], форма вполне определенного, однозначного очертания[2*].

мать и представлять себе внешнюю и внутреннюю взаимозависимость вещей и действий, научиться прослеживать и воспринимать в целом взаимозависимость длительной речи. Следовательно, учение о языке должно предшествовать учению о формах[3*].

Учение о языке [грамматика] и в школе предшествует учению о формах. Хотя упражнения, относящиеся к счету и мышлению, принадлежащие к учению о формах, следуют сразу после начала обучения в школе, тем не менее строгое изложение этой науки возможно только тогда, когда достигнуто уверенное пользование родным языком, достигнуто понимание его структуры, т.е. в старших классах нашей средней школы.

Учение о формах как строгая наука должно быть общезначимым для любого народа, для всякого языка. Уже по этой причине оно не может развертываться и развиваться в формах какого-то отдельного, особого языка, сильно отклоняющегося от других языков.

Учение о формах должно, в конце концов, учить законам строго научного соединения[4*], при которых невозможны смешения понятий, ошибочные умозаключения. Величины, связываемые друг с другом в учении о формах, должны поэтому обладать одним, а не многими значениями.

Однако в языке каждое слово служит для обозначения многих вещей и имеет поэтому множественный смысл, который дает повод для путаницы и ошибочных умозаключений и на котором было основано все искусство древней софистики. Каждое понятие в царстве мыслей многозначно – ведь понятие меняется во время работы мышления и в результате этой работы, и, следовательно, в ходе исследования оно изменяет свое значение; наконец, каждая вещь во внешнем мире подвержена изменениям и, стало быть, тоже получает множественное значение. То же самое относится и к отношениям и сочетаниям слов, понятий и вещей. Предложения, мысли и отношения между вещами также имеют множественные значения, могут пониматься по-разному; любые два человека понимают их по-разному, и именно благодаря этому создается многообразие различных взглядов.

Строгое учение о формах, в котором каждая величина должна иметь только одно, а не много значений, не имеет дела ни с этими меняющимися вещами и понятиями, ни со словами, которые всегда обладают многими значениями, и уже по этой причине не может развиваться в формах языка и по его законам. Напротив, все величины, которые подлежат связыванию в учении о формах, оно должно само произвести, само построить, а также установить законы их соединения, определив их настолько точно, чтобы каждая величина имела только одно значение, относительно которого не могло бы быть никаких сомнений; и, наконец, для каждой величины и каждой связи надо установить некоторый особый специфический знак, который, равным образом, имел бы только одно значение и делал бы невозможными недоразумения[5*].

С другой стороны, поскольку учение о формах должно развить законы для всякого мышления, требуется, чтобы все, что есть или может стать предметом мышления, могло сделаться и предметом учения о формах, а также чтобы каждое связывание в мышлении можно было понимать и как некоторое связывание в учении о формах. Из этого вытекают первые положения, касающиеся величин и связей в учении о формах. Они таковы:

Учением о величинах называется учение о связи величин.

Величиной называется все, что является или может стать предметом мышления, коль скоро оно имеет только одно, а не много значений.

Равными называются две величины, если в каждой связи учения о формах одна может быть заменена другой без изменения значения[6*].

Неравными называются две величины, если ни в одной связи учения о формах одну нельзя заменить другой без изменения значения[7*].

Величина никогда не может быть равна и одновременно не равна некоторой другой величине, но она должна быть либо равна, либо не равна этой другой величине; ибо каждая величина должна иметь только одно, а не много значений. В этом заключается [ее] наиболее существенное отличие от понятий обыденного мышления. Ибо в обыденном мышлении каждое понятие в какомлибо отношении может быть полагаемо равным многим другим понятиям, в другом же отношении – неравным и может, поэтому, не требуя четкого различения, называться то равным, то различным. (Например, собака и собака равны и все же различны, так же как любовь и любовь, счастье и счастье и т.д.)[8*] В противоположность этому в учении о формах каждая величина однозначна, и если одна равна другой, то не неравна ей, если же является неравной другой, то она не является ей равной.

Каждая из величин, которые подлежат связыванию, но сами не возникли в результате связи величин, и которые, стало быть, полагаемы в качестве изначальных, называется *штифтом* [Stift], или *элементом*[9*].

Буквы суть знаки величин, при этом в учении о формах буквы (e_1, e_2, e_3, ...) – знаки штифтов, или элементов, а буквы (a, b, c, ...) – знаки любых величин[10*].

Одна и та же буква в одном и том же параграфе учения о формах всегда обозначает только одну, причем одну и ту же величину, и имеет, стало быть, только одно значение. Впрочем, любая буква может обозначать произвольную величину. Каждое предложение, которое доказано для некоторой буквы, тем самым справедливо для всех величин, которые может обозначать эта буква, т.е. для какой угодно величины[11*]. Если буква должна обозначать только один определенный род величин, то в данном параграфе об этом должно быть сказано с полной определенностью и точно и недвусмысленно установлено, какие величины должны обозначаться этой буквой, так как иначе данное предложение было бы справедливо для произвольных величин.

Связью двух величин называется любое составление или соединение этих величин, которое возможно для человеческого ума, поскольку оно имеет только одно, а не много значений.

То, что возникает посредством связи двух величин, есть снова некоторая величина, так как она есть предмет мышления и имеет только одно, а не много значений; эта величина называется *результатом связи* или, коротко, *целостностью.*

Связующие знаки суть знаки и читаются «связано с». Один и тот же связующий знак в одном и том же параграфе учения о формах всегда обозначает единственную, причем одну и ту же связь. Впрочем, каждый связующий знак может обозначать произвольную связь. Каждое предложение, которое доказано для некоторого связующего знака, тем самым справедливо для всех связей, которые может обозначать этот связующий знак. Если связующий знак должен обозначать только определенный род связей, то при его введении об этом должно быть сказано с полной определенностью и точно и недвусмысленно установлено, какие связи должны обозначаться этим связующим знаком.

Общий знак произвольной связи есть кружок «$\circ$», который помещается между связываемыми величинами (например, $a \circ b$, что читается: a связано с b или кратко: a с b)[12*]. Особыми знаками связи являются *знак равенства* = и *знак неравенства* $\gtrless$ первый обозначает, что связываемые величины являются равными (например, $a = b$ читается: a равно b), а второй обозначает, что связываемые величины являются неравными (например, а $\gtrless$ b читается: a неравно b). Связь двух величин посредством *знака* «=» *называется равенством.*

Каждая связь величин имеет место только между двумя величинами. Если надо связать друг с другом больше величин, например, три, то надо установить, какие две величины должны быть связаны сначала; затем результат этой связи связать с третьей величиной, и т.д., так что каждый раз связываемыми оказываются только две величины.

Скобка[13*] () – это знак, который должен связать в целостность заключенные в скобку величины для того, чтобы ее затем можно было связать с величиной вне скобок (например, $a \circ (b \circ c)$, что читается «*a* со скобкой: $b \circ c$, скобка закрывается», обозначает, что сначала *b* должно быть связано с *c* и что полученная целостность должна быть связана с *a*).

В каждой скобке может быть только две величины; если в ней содержится больше величин, то все они, кроме одной, должны быть заключены в другую скобку. Затем все величины в этой другой скобке должны быть связаны в некоторую целостность; и только потом целостность в этой скобке может быть связана с одной, вне этой скобки стоящей, величиной. В соответствии с этим, если надо связать *n* величин, то в данном выражении требуется $n - 2$ скобки, поскольку не должно быть никакого сомнения относительно структуры связи[14*].

Последовательно связывать ряд величин означает связать сначала первую величину со второй, результат этой связи связать с третьей и каждый раз результат связи всех предшествующих величин сразу, как только он возникает, связывать с непосредственно следующей величиной. Если последовательно связано много величин, то скобки можно удалить, так как относительно очередности связи не может быть никаких сомнений. Скобки должны стоять только там, где происходит отклонение от последовательного связывания, однако их снова можно ввести в последовательную связь. Связь многих величин, которая содержит величину *a*, называется формулой этой величины *a*.

2. Развертывание учения о формах и способ его обоснования

Итак, учение о формах начинается с того, что полагаются штифты (элементы) и их связь в величины или в формулы. Все эти положения и связи имеют только одно значение и этим существенно отличаются от любого предложения или слова языка.

Конечно, учение о формах тоже не может обойтись без языка, поскольку люди должны уяснить себе и договориться с другими людьми, что следует понимать под знаками величин и связей, а произойти это может только с помощью языка. Однако эта договоренность относится только к введению учения о формах, а не к развитию его самого; последнее начинается только с полагания и связывания величин.

Развертывание учения о формах состоит тогда в том, что от самых простых связей или формул величин восходят к самым сложным, исследуя, какие из этих формул равны друг другу.

Берется некоторая формула, для нее отыскивается некоторая равная ей, для последней снова отыскивается равная ей формула, и так до тех пор, пока не будет найдена формула, относительно которой мы хотим доказать, что она равна исходной. Процесс, таким образом, состоит только в полагании величин, их связывании и в преобразовании этих связей в связи или формулы, которые имеют другой вид, но равны [исходным].

Каждое такое равенство двух формул, которое в конце концов получено, образует тогда результат данного рассмотрения и может быть выражено в некотором предложении или облечено в слова. Однако это высказанное словами предложение просто сопровождает формулу и не может ни заменить последнюю, ни сделать ее излишней. Доказательство, так же как и предложение, может быть представлено в словесной форме; однако слова опять-таки дают только перевод на обычный язык того преобразования, которое претерпевают формулы.

В связи со сказанным может показаться, что представление предложений с помощью слов, развертывание данного доказательства в словесном виде излишне. Однако это не так. Все сообщение мыслей происходит на языке, так же как и все мышление; стало быть, если мы хотим рассказать об учении о формах, обсудить значение некоторой формулы или только подумать о ней, мы должны сделать это на языке; с другой стороны, если учение о формах надо применить к предметам мышления и языка, это возможно, только если данная формула переведена на язык. Перевод формулы на язык является поэтому важным упражнением, особенно для начинающих, и должен происходить в случае каждого доказательства. Когда ученик выписывает и анализирует формулы, он должен произносить или ссылаться на предложения, в соответствии с которыми происходит преобразование, должен натренироваться в том, чтобы с легкостью передавать каждую формулу словами и, наоборот, каждое предложение – формулами. Только в том случае, если он приобретет этот навык, он полностью овладеет данными предложениями, осознает их и сможет постоянно пользоваться ими в своих мыслях.

Но и сам язык благодаря этому переводу на него формул приобретает совершенно новую четкость и определенность. Каждое *определение*, т.е. каждое утверждение о том, что следует понимать под величинами или их связью, может допускать только одно, а не много значений. Точно так же каждое высказывание, *предложение* или *теорема* может иметь только одно, а не много значений, так как оно должно выражать словами в точности то, что содержит равенство в формулах, которые тоже допускают только одно значение. То же самое относится, наконец, к каждой высказываемой задаче, к каждому решению и каждому доказательству на словах. Стало быть, словесный перевод учения о формах представляет собой полезное и, безусловно, творческое занятие. Однако развитие собственно учения о формах всегда происходит в формулах. Доказательство, которое осуществляется просто на словах и которое нельзя передать формулами, является в учении о формах ошибочным и обманчивым; такого рода учение о формах, изложенное в учебнике, где доказательства производятся на словах, а не с помощью формул, является бессмыслицей и доказывает лишь научную некомпетентность автора.

3. Пять ветвей учения о формах

Учение о формах, или математика, разделяется на пять ветвей: на общее учение о величинах и четыре частных его ответвления.

1) Учение о величинах, первая, или общая, часть учения о формах, знакомит нас с такими связями величин, которые являются общими для всех ответвлений учения о формах; оно рассматривает законы равенства, сложения [Addition], или прибавления [Fügung], умножения [Multiplication], или переплетения [Webung], и возведения в степень [Potenzierung], или возвышения [Höhung].

Четыре частные ветви учения о формах

Из учения о величинах посредством введения новых условий непосредственно получаются четыре частные ветви учения о формах. Главным вопросом в этих условиях является то, что возникает посредством связывания равных штифтов (элементов). Связь $e \circ e$ может быть или равна e или не равна e; если имеет место первое, то целостность, состоящая из связи сколь угодно многих e, есть снова то же самое e; если имеет место второе, то связь равных *е* постоянно порождает новые и новые величины.

Первую связь, соответствующую связи представлений в мыслях, при которой два одинаковых представления сливаются в одно общее представление, мы называем *внутренней* связью, в отличие от второй связи – *внешней.* Эта последняя соответствует связи вещей во внешнем мире, где две равные вещи никогда не становятся одной вещью, но обе остаются в пространстве, и всегда чем больше становится вещей, тем больше они занимают места в пространстве.

Но внутренняя и внешняя связи в свою очередь могут выступать в качестве прибавления, или суммирования, так же как в качестве переплетения, или перемножения, в соответствии с чем, стало быть, имеются четыре различных рода связи. В случае *внутреннего* прибавления, или сложения [Addition], каждый шрифт, поскольку его прибавляют к нему же самому, всегда остается данным штифтом без какого-либо изменения своего значения. Стало быть, здесь мы имеем дело просто с представлениями в нашей голове, со связью представлений или понятий. Но в случае *внешнего прибавления*, или сложения, каждый новый штифт, который прибавляется к некоторой величине, построенной путем связи этого штифта с самим собой, дает всегда некоторую новую величину, не сливая данный штифт с равным ему штифтом в единый штифт; стало быть, мы имеем здесь дело исключительно с вещами внешнего мира.

В случае *внутреннего переплетения*, или перемножения, характер отношения штифтов является внутренним. Каждый штифт, наложенный на равный ему штифт, опять-таки дает тот же самый штифт, подобно тому как наложение представления на равное понятие дает снова только лишь то же самое представление, то же самое понятие. В отличие от этого в случае *внешнего переплетения*, или перемножения, характер отношения штифтов является внешним. Каждый штифт, наложенный на равный ему дает некоторый новый штифт, подобно тому как наложение вещи на одинаковую [равную] вещь не порождает ту же самую вещь, а дает некоторое новое отношение, некоторую новую вещь. Внутреннее и внешнее переплетения, стало быть, относятся друг к другу как мыслимое и внешнее отношение и образуют вторую противоположность в пределах четырех ветвей учения о формах[15*].

Теперь мы можем перейти к установлению самих четырех ветвей учения о формах. Первые две – это те, для которых имеет место внутреннее прибавление, две вторые – это те, для которых имеет место внешнее прибавление. Но в каждом из этих двух подразделений первой ветвью является та, для которой выполняется внутреннее переплетение, а второй – та, для которой действительно внешнее переплетение.

2) Первая частная ветвь учения о формах, самая простая и одновременно самая глубинная, есть *учение о понятии* [Begriffslehre], или *логика*. В ней понятия внутреннего, или мыслимого, определяются внутренним понятийным способом. В ней действует не только внутреннее прибавление $e + e = e$, но и внутреннее переплетение $e \cdot e = e$, в то время как продукт или произведение различных штифтов устанавливается равным нулю:

$$e_1 e_2 = 0.$$

3) Вторая частная ветвь учения о формах, служащая для упорядочения понятий внутреннего мира, есть *учение о соединениях* или *комбинаторика* [Combinationslehre]; понятия в ней устанавливаются, упорядочиваются и связываются внешним образом. В ней действует внутреннее прибавление $e + e = e$, но внешнее переплетение $e \cdot e \gtrless e$. Здесь появляется ряд новых переплетений, или перемножений. Мы устанавливаем либо $e \cdot e = 0$ – связку без повторения, либо $\mathrm{e} \cdot \mathrm{e} \gtrless 0$ – с повторениями; мы устанавливаем либо $e_1 e_2 = e_2 e_1$ – раздельность (Complexio), либо $e_1 e_2 \gtrless e_2 e_1$ – вариативность.

4) Третья ветвь учения о формах, самая простая с точки зрения постижения внешнего мира, есть *учение о числах*, или *арифметика*; в ней не обращают внимания на различие вещей внешнего мира. Последние, в качестве одинаковых, подлежат счету или прибавлению. Но отношение к вещам вне нас является лишь внутренним, понятийным – не таким, что два внешних штифта накладываются один на другой, а лишь таким, что число, образованное внутри [нас], накладывается на внешний штифт. В ней действует внешнее прибавление, где $e + e \gtrless e$ и при последовательном прибавлении равного штифта e каждое следующее число отличается от всех предшествующих; в отличие от этого внутреннее переплетение $1 \times 1 = 1$ и $1 \times e = e$.

5) Последняя ветвь учения о формах, одновременно и самая сложная, и самая внешняя, есть учение о внешнем. В ней вещи внешнего мира рассматриваются отчасти как равные [одинаковые], отчасти как неравные; одинаковые подлежат счету, неодинаковые [неравные] – прибавлению, и отношение вещей как не-

что отличное от вещей тоже представляется внешне. Этой ветви больше всего соответствует внешний мир и его соотношения. Прибавление является внешним: $e + e \gtrless e$, так же как внешним является и переплетение: $e \cdot e \gtrless e$.
Здесь тоже либо $e \cdot e = 0$ – продукт без повторения, либо $e \cdot e \gtrless 0$ – с повторением, и либо $e_1e_2 = e_2e_1$ – сплетение либо $e_1e_2 \gtrless e_2e_1$ – заплетение[16*].

В случае всех 4 ветвей вопрос заключался в том, чтобы отыскать строго научную форму. В течение многих лет совместного труда мой брат Герман и я преследовали эту цель, и мы полагаем, что достигли ее и можем внести научную строгость – в сочетании с элементарной простотой – в начальные разделы математики. Однако я лучше воздержусь от какого-либо суждения об этом, пусть дело говорит само за себя. Арифметика и учение о протяженностях моего брата, так же как предлагаемый мною труд являются примерами той строго научной формы, которой мы добиваемся.

УЧЕНИЕ О ВЕЛИЧИНАХ

Первая книга учения о формах, или математики

Введение в учение о величинах

Учение о величинах, или общая часть учения о формах, является совсем молодой наукой. Идею такого учения впервые выдвинул Лейбниц в письме к профессору Вагецию[17*] [Vagetius] из Гиссена [in Giessen][18*] в 1696 г. по Р.Х. В этом письме он уже использует название «*учение о величинах*» [Grösenlehre][1] (scientia de magnitudine). Он подчеркивает, что этому учению присущи простые, скорее, однозначные понятия, предложения, умозаключения и способы; это название следует сохранить, поскольку оно полностью соответствует существу предмета. «Однозначные понятия суть величины и отношения, а из них составляются формулы», – говорит он в этом письме (Opera omnia, ed. Dutens, 1768, Th. 3, S. 338). Однозначные предложения суть равенства и предложения о величинах и малостях. Умозаключения или связи суть сложение, умножение и т.п. Наконец, способ развертывания [теории][19*] указывает, как получить доказательство некоторого предложения или решение некоторой задачи. Идея этой науки, если бы она была хорошо разработана каким-нибудь искусным человеком, представила бы нам общую часть учения о формах в качестве легкой и надежной ветви математики». Это слова Лейбница.

Существует ряд законов и связей, которые являются общими для всех ветвей учения о формах; таковы законы равенства, таковы законы сложения, или прибавления, законы умножения, или переплетения. Все эти законы имеют силу и получают применение в учении о понятии (логике), так же как в учении о числах (арифметике), в учении о соединениях (комбинаторике) и в учении о протяженности.

Было бы ненаучно выводить одни и те же законы четырежды в каждой отдельной ветви или, тем более, предполагать их без введения и без доказательства. Вместо этого их надо один раз

---

[1] *Gröse* происходит от корневого глагола ghar, *санскритское* [sskr.] ghar – glänze, leucht ⟨блещу, свечу⟩. Производными от него являются греческое chlóē – молодые всходы, латинское germen – росток [der Schössling], огорчать [gramen], готское gras, das Gras, означающие нечто, имеющее яркую окраску, и латинское grandis, англосаксонское и английское great, gros, означающие сияющий, возвышенный облик [Gestalt].

Die Grösenlehre.

Erstes Buch

der

Formenlehre oder Mathematik.

Von

Robert Grassmann.

Stettin, 1872.

Druck und Verlag von R. Grassmann.

строго вывести и доказать в общей части учения о формах. Оно образует как бы ствол, от которого отходят другие ветви.

Однако сложение, или прибавление, и умножение, или переплетение, если не говорить об установлении равенства, ни в коем случае не представляют собой единственные и наиболее общие способы связывания в учении о величинах. Разумеется, общими для обоих являются законы снятия скобок, или объединения, с одной стороны, и закон перестановки – с другой. Так, закон скобок или закон объединения, $a \circ (b \circ c) = a \circ b\ c$, охватывает закон прибавления, или сложения, $a + (b + c) = a + b + c$ и закон умножения, или переплетения, $a\ (b\ c) = a\ b\ c$; а закон перестановки $a \circ b = b \circ a$ охватывает закон сложения $a + b = b + a$ и закон перемножения $a\ b = b\ a$. Оба эти закона могут и должны быть развиты прежде, чем может зайти речь о прибавлении и переплетении.

Кроме того, закон объединения может действовать сам по себе, без того, чтобы действовал закон перестановки, и существует большое число исчислений в которых действует только объединение, но не перестановка; поэтому закон объединения, или скобочный закон должен быть введен до того, как может зайти речь о перестановке[20*].

В соответствии со сказанным *структура* учения о величинах является следующей. После общих определений следуют предложения, относящиеся к равенству, – раздел 2; за ним непосредственно следует определение присоединения для которого не имеет места ни объединение, ни перестановка – *раздел 3*; затем предложения об объединении величин без перестановки – *раздел 4* и предложения о перестановке – *раздел 5*. Только после этого производится различение разных уровней связи. В разделе 6 следуют предложения, касающиеся отношения[21*], для которого действует закон $(a \circ b)\ c = a\ c \circ b\ c$; последний может встретиться во всех тех случаях, где для более низкого уровня действует объединение. Если с обеих сторон равенства имеет место одна и та же связь $\circ$, то отношение называется простым, а если разные связи $\circ$ и $\circ$, так что $(a \circ b)c = a\ c \circ b\ c$, то такое отношение называется двойным.

Только после этого в разделе 7 появляется связь низшего уровня – прибавление, или сложение, и затем в разделе 8 – средний уровень связи – переплетение, или перемножение; наконец, в разделе 9 – самый высокий уровень, возвышение или возведение в степень.

Что касается формы *преобразований и доказательств*, то здесь, очевидно, не может быть использовано понятийное, или логическое, умозаключение или доказательство, потому что еще ведь не развито и не обосновано учение о понятиях, или логика; наоборот, это учение должно быть развито только после учения о величинах. Заранее предполагая в доказательствах то, что должно быть доказано лишь впоследствии, мы были бы повинны в круге в умозаключении или в ошибочном заключении[22*].

По счастью, однако, в наших доказательствах в учении о величинах мы вовсе не нуждаемся в понятийном, или логическом, умозаключении. А именно в понятийном выводе имеет место заключение от некоторого более широкого понятия к понятию, которое ему подчинено, или является более узким. В отличие от этого в доказательствах учения о величинах мы имеем дело не с подчиненными, а только с равными или неравными величинами. Стало быть, понятийное, или логическое, умозаключение не находит в учении о формах совершенно никакого применения. То же самое вытекает из того, что все доказательства учения о формах могут и должны производиться с помощью формул и что перевод этих доказательств на язык есть только некоторое [их] воспроизведение в сфере обыденного мышления – сфере, которой чуждо строгое учение о формах само по себе.

В случае *предложений, относящихся к равенству,* развитие начинается с определения, согласно которому две величины могут быть названы равными только в том случае, когда в любой связи учения о формах одну из них можно заменить другой без изменения значения. Доказывается: если в некоторой последовательности величин каждая предшествующая величина равна непосредственно следующей, то первая равна любой последующей; ибо тогда первая равна второй, вторая же может быть заменена равной ей третьей, а эта последняя – равной ей непосредственно следующей величиной. Следовательно, первая величина равна любой последующей. Это есть первый закон равенства или предложение о *прямом или непосредственном доказательстве*[23*]. Доказывается, далее, что если в последовательности величин для первой из ее величин справедливо некоторое равенство и оно, кроме того, таково, что, когда оно справедливо для любой величины последовательности, оно справедливо также для непосредственно следующей величины последовательности, то оно справедливо вообще для всех величин последовательности. Это второй закон равенства или предложение о *поступательном*, или *индуктивном доказательстве.* Оба рода доказательств – единственные, которые относятся к общему учению о формах. В учении о понятиях мы познакомимся, кроме того, с непрямым, или косвенным, доказательством, которое часто используется в последующих частях учения о формах, особенно в учении о пространстве[24*].

В случае *предложений об объединении величин* эти формы доказательства находят свое первое применение. Раздел начинается с определения объединения. Пусть мы пожелали бы предусмотреть в этом определении закон объединения в полном объеме и определить объединение следующим образом: объединение есть такая связь величин, при которой каждую скобку можно как угодно поставить или удалить. Такое определение было бы слишком широким и ненаучным, поскольку в нем было бы выражено то, что можно вывести из гораздо более узкого определения. Поэтому [из него] невозможно было бы узнать, каково то предположение которое необходимо для того, чтобы имел место закон объединения в целом. Но хорошее определение не должно устанавливать ничего, кроме допущения [предположения], совершенно необходимого для дела.

Пусть даны штифты, или элементы, которые еще никак не связаны. Уже установлено, что при последовательной связи скобки можно опустить, стало быть, $(a \circ e_1) \circ e_2 = a \circ e_1 \circ e_2$. Необходимо еще установить, что должно означать: с величиной a надо связать целостность, состоящую из величины b и одного штифта, например $a \circ (b \circ e)$. Если здесь нельзя удалить скобку, то удаление скобок невозможно никаким способом, кроме последовательной связи; если же, наоборот, ее можно удалить и, стало быть, $a \circ (b \circ e) = a \circ b \circ e$, то любая скобка может быть удалена, что позволяет вывести закон объединения целиком. А именно сначала имеет место $(a \circ e_1) \circ e_2 = a \circ e_1 \circ e_2$. Затем имеет место $a \circ (a_1 \circ e_2 \circ e_3) = a \circ (e_1 \circ e_2) \circ e_3 = a \circ e_1 \circ e_2 \circ e_3$ и так далее.

Определение: связь называется объединением, если $a \circ (b \circ e) = a \circ b \circ e$; этого, следовательно, достаточно, чтобы удалить все скобки. С другой стороны, это определение не содержит и слишком много; ибо если предположить, что оно должно действовать при не более чем 10 штифтах, или элементах, то мы можем положить, что b содержит 10 штифтов, и тогда не будет справедливо $a \circ (b \circ e) = a \circ b \circ e$, и, стало быть, с этого момента недопустим никакой род удаления скобок (кроме случайной связи).

Многим из тех, кто привык к ненаучному пустословию доказательств в логике и арифметике, поступательная, или индуктивная, форма доказательства кажется утомительной, отпугивающей и – особенно для школ – непрактичной и неподходящей. Эти люди будут, наверное, морщить нос и высокомерно осуждать предлагаемый строго научный метод. Поэтому еще несколько слов по их адресу. Я хочу спросить своих оппонентов:

1) Может быть, вы хотите начинать с величин, уже связанных друг с другом, не определяя законы связи и не вводя штифтов, или элементов, которые они связывают?

Я со своей стороны считаю, что единственно научным и для учащихся основным является введение штифтов, или элементов, и последующее связывание их в другие величины по определенным законам.

2) Может быть, вы хотите одновременно вывести все величины, которые могут быть построены с помощью связи, не переходя постепенно от одной уже построенной величины к непосредственно следующей посредством ее связи с новым штифтом?

Я со своей стороны, лишь постепенно строю каждую следующую величину из предшествующей с помощью связывания с некоторой новой величиной, и любой учитель начальных классов подтвердит, что только на этом пути в учении о числах можно построить числа. Мои оппоненты в детстве тоже так учились считать, когда они заучивали: один и один есть два, два и один есть три, три и один есть четыре и т.д. Итак, поступательное (индуктивное) продвижение вперед – полагание штифтов, или элементов, и последовательное связывание штифтов в величины – является необходимым; только оно является правильным, только оно является основным.

3) Может быть, вы хотите в случае связи нескольких величин связывать их в любом количестве и притом брать величины любой сложности. А не желаете ли вы каждый раз связывать только две величины, а именно, поступать так, чтобы вторая величина сначала содержала только два штифта, или элемента, затем – три штифта и так продвигаться вперед, каждый раз выбирая величину, содержащую на один штифт больше?

Я, со своей стороны, всегда выбираю последний путь как единственно научный и основной. Как только дети таким способом построили числа, в школе приступают к прибавлению[25*] чисел, или сложению. Учитель показывает детям, что вместо прибавления числа 2 можно прибавить один, а затем еще один, и разучивает с ними: «один и два дает три, два и два дает четыре и т.д.». После того, как это прочно усвоено, учитель говорит, что вместо трех можно прибавить два, затем один, и разучивает с ними прибавление числа три. Аналогично, в случае каждого следующего числа, он показывает детям, что вместо того чтобы прибавлять следующее число, можно прибавить предшествующее число и единицу, и прежде чем идти дальше до полной прочности разучивает с ними следующий ряд [чисел].

Существует, стало быть, лишь один исходный путь обучения учению о формах – это поступательный, или индуктивный путь; аналогично, существует только один научный путь развертывания и обоснования исходных основ учения о формах – опять-таки поступательный, или индуктивный. Однако вернемся к нашему предмету.

Из определения того, что $a \circ (b \circ e) = a \circ b \circ e$, в предложениях об объединении выводится *закон объединения*, или *скобочный закон*, согласно которому, поскольку справедлива эта формула, каждая скобка может быть как угодно введена или удалена, а результат опять-таки будет величиной, штифты, или элементы, которой связаны последовательно.

Относительно *перестановки величин* следует, прежде всего, заметить, что одна перестановка без объединения не дает ничего нового[26*]. Пусть, например, имеет место перестановка второго уровня $e_1 \circ e_2 = e_2 \circ e_1$, но не имеет места объединение. Тогда в выражении $e_1 \circ e_2 \circ e_3$ можно, конечно, произвести перестановку в $e_1 \circ e_2$, однако этого нельзя сделать в $e_2 \circ e_3$, ибо, если восстановить скобки, то окажется, что $e_1 \circ e_2 \circ e_3 = (e_1 \circ e_2) \circ e_3$ и, стало быть, e_2 и e_3 разделены скобкой и – поскольку не имеет места объединение – их нельзя поменять местами. Если же объединение имеет место, то скобки можно расставить любым способом; после этого $e_1 \circ e_2 \circ e_3 = e_1 \circ (e_2 \circ e_3)$. Здесь можно поменять местами e_2 и e_3 и, стало быть, получить $e_1 \circ (e_2 \circ e_3) = e_1 \circ e_2 \circ e_3$. Определение перестановки, таким образом, должно предусмотреть справедливость не только объединения, но и перестановки двух соседних штифтов, или элементов. Тогда, если доказан *закон перестановки*, то скобку можно поставить где угодно и удалить откуда угодно, а порядок величин как угодно изменять, сохраняя значение результата.

За перестановкой сразу следует *закон отношения*, предполагающий для связи более низкого уровня закон объединения, или закон удаления скобки. Для определения отношения тогда достаточно, чтобы было установлено $(a \circ e)\, b = ab \circ eb$ и $a\,(b \circ e) = ab \circ eb$, откуда последовательно, или индуктивно, можно вывести относительный закон в целом. С другой стороны, это допущение не содержит также ничего, что не было бы необходимым для того, чтобы вывести из него относительный закон. Наконец, это определение тоже носит чисто базовый характер. Учитель, который в ходе преподавания арифметики обучает детей переплетать, или перемножать, показывает детям, что единожды два есть два, и затем продолжает: дважды два есть единожды два и один на два, единожды два есть два, два и два есть четыре, стало быть, дважды два тоже есть четыре; трижды два есть дважды два и единожды два, но дважды два есть четыре, единожды два есть два, а четыре и два есть шесть, стало быть, трижды два тоже есть шесть; четырежды два есть трижды два и единожды два, трижды два есть шесть, единожды два есть два, шесть и два есть восемь, стало быть, четырежды два есть восемь и т.д. Определение, следовательно, совершенно элементарно.

После этого легко получаются законы для отдельных уровней связи – для прибавления, или сложения, для переплетения, или перемножения, и для возвышения, или возведения в степень.

Остается только еще сказать несколько слов об искусственно образованных выражениях. Новый способ рассмотрения предмета требует, если мы хотим быть научно строгими, также и новых искусственных слов. Так, в учении о величинах для такого способа связи, как перемножение, мы познакомимся с тремя ее видами, в учениях о понятиях и о числах – с одной в каждом, в учении о соединениях и учении о протяженности – с четырьмя в каждом, а всего, стало быть, с тринадцатью видами. Было бы ненаучно обозначать все эти различные виды связи одним и тем же словом умножение; добавление имен прилагательных является только некоторым ненаучным искусственным средством. Здесь надо, стало быть, вводить новые названия[27*]. С другой стороны, если мы хотим сделать мышление основательным и точным, а науку – продвинуть в народ, то необходимым оказывается требование, чтобы каждое искусственное выражение имело немецкую форму и могло подвергаться преобразованиям, свойственным немецкому языку. Народ никогда не подвести к пониманию вычислений, если говорить ему об аддировании [Addiren] и мультиплицировании [Multipliciren], о факторах [Factoren] и продукте [Product][28*], о мультипликаторе [Multiplicator] и мультипликанде [Multiplicandus] и эти чужие слова употреблять в деревенской школе, заставляя их заучивать. Поэтому вместо чужих слов надо ввести новые немецкие надо слова, которые могли бы быть общими для науки и народной школы[29*].

Величины, полагаемые первоначальными, из которых выводимы другие величины, по латыни называются elementum, по-гречески – stoicheion, по-немецки – *штифтами, Stifte*[2] от глагола stiften, т.е. устанавливать, располагать, основывать. Взаимосвязь вообще двух величин я называю *Knüpfung*[3] – связью; если имеет место перестановочность соединяемых величин, то *Verknüpfung* связыванием; результат данной связи называется целостностью[4] [Gesammt], причем следует обратить внимание, что он отличен от результат [связи] первой ступени, или суммы [Summe].

Связь первого уровня в учении о числе уже названа *суммированием* [Addiren] или *прибавлением* [Fügen][5]; именно это название я принимаю. Вид [связи], для которой не имеет места перестановка, я называю *Einfügen – вложением*, а где перестановка справедлива – *Zufügen, – добавлением.*

Связь второго уровня в учении о числе называется перемножением, или *умножением* [Vervielfachen]. Это выражение, которое подходит только для чисел, я сохраню в учении о числе. В учении о величинах термин multiplicare я перевожу как Weben[6] – *переплетение* – выражение, которое очень точно передает суть дела, так как каждый штифт, входящий в сомножитель, должен быть связан с каждым штифтом другого сомножителя. Переплетение без объединения и перестановки я называю *Anweben – приплетением*, а с объединением и перестановкой – *Verweben – сплетением.*

---

[2] *Stift* происходит от корневого глагола stab, stütze, stemme; отсюда возникло санскритское [sskr.] staba – столб, греческое stibos – тропа, англо-саксонское [ags.] stap=ul – столб, нововерхненемецкое [nhd.] Stift.

[3] *Knüpfung* происходит от корневого глагола gnā, греческое nēō, латинское neo – пряду, древневерхненемецкое [ahd.] nāa – nähe ⟨шью⟩, schnüre ⟨шнурую⟩, knüpfe ⟨завязываю⟩; отсюда произошло латинское nodus, англосаксонское cnotta, cnyt, нововерхненемецкое Knoten ⟨узел⟩ и knüpfe ⟨завязываю⟩.

[4] *Gesammt* происходит от старой корневой формы sa, в санскрите [sskr.] sa, в греческом ho, в латинском se «mit, zugleich» – «с, одновременно», которая в превосходной степени звучит sama, в санскрите [sskr.] sama, в греческом hama, в готском sama, в английском [an.] saman, в древневерхненемецком samen, в нововерхненемецком samt – zusammen, вместе. Das Gesammt, следовательно, означает собрание нескольких величин в одну.

[5] *Füge* – [при]соединяю происходит от корневого глагола pak, санскритское [sskr.] paças [zend.] paç, латинское pac – isor, готское fahan, англо-саксонское fangan, датское [dän.] fangen, нововерхненемецкое fangen в значении fange – ловлю, связываю [binde]. Füge, англосаксонское ge-fegan, швабское fogan, в соответствии с этим, означает связывать [binden], привязывать к чему-либо [an etwas fügen].

[6] *Webe* представляет собой корневой глагол vap, санскритское [sskr.] vap, [zend.] vap, англосаксонское vefan, древневерхненемецкое wĕban, нововерхненемецкое weben.

Виды связи учения о величинах[30*]

Уровень	Название		Ни объединения, ни перестаноки	Объединение без перестановки	Объединение с перестановкой
	Чужое слово	Немецкое слово			
Первый	Addition – сложение [аддиция]	Fügen – прибавление	Anfügen – присоединение	Einfügen – вложение	Zufögen – добавление
Второй	Multiplication – умножение [мультипликация]	Weben – переплетение	Anweben – приплетение	Einweben – вплетение	Verweben – сплетение
Третий	Potenzie-rung – возведение в степень [потенцирование]	Höhen – возвышение	Anhöhen – повышение	Einhöhen – завышение	Erhöhen – превышение

Третий уровень связи в учении о числе называется *возведением в степень* [Potenziren], или *Höhen – возвышением*[7]. Эти выражения я сохраняю. Возвышение без объединения и перестановки я называю *Anhöhen – повышением*, его же с объединением, но без перестановки – *Einhöhen – завышением*, а с объединением и с перестановкой – *Erhöhen – превышением*.

В соответствии с этим мы имеем следующие виды связи в учении о величинах.

Далее, в случае первого уровня, данные величины называются *Stücke*[8] – *частями*, результат – *суммой* [*Summe*][9]. Знак перепле-

---

[7] Höhe происходит от корневого глагола kak, kank, санскритское [sskr.] cank, греческое koch – eúo, латинское conctāri, готское hah=an, нововерхненемецкое hangen – висеть, парить в воздухе [schweben], т.е. находиться на высоте. Отсюда произошло готское hauhs, древневерхненемецкое hoh, нововерхненемецкое hoch и готское hauhja, нововерхненемецкое Höhe, высота.

[8] *Stück* происходит от корневого глагола stag, санскритское [sskr.] tuj, греческое tag, латинское tango – толкаю: [stosse; в книге напечатано stossc], готское stikan, stak, англосаксонское stican, древневерхненемецкое stechan, нововерхненемецкое stechen и готское stingvan, stangv – толкать [stosen]. Отсюда древневерхненемецкое stucchi, англосаксонское sticce, нововерхненемецкое Stück, das Abgestosene [отбитое], часть целого.

[9] *Summa* есть заимствованное латинское summa. Последнее происходит от древней корневой формы upa, санскритское [sskr.] upa, греческое hypó, латинское

тения – вертикально расположенный крест – называется плюсом[10], а скобка с этим знаком – *плюсовой скобкой* [Plusklammer][31*].

В случае второго уровня величина, подлежащая переплетению, называется Fach[11] – *отдел*[32*], или *Factor – сомножитель.* В случае переплетения результат называется *Product* – продукт [произведение] или *Zeug*[12] – *ткань*, а в случае отношения вообще – *Erzeugniss*, изделие.

В случае третьего уровня связываемые величины называются die Base[13] – основанием и der Exponent – показателем [степени], или Stufe[14], ступенью. Результат возвышения [das Höhens] называется Höhe – высотой или Potenz – степенью.

---

sup, готское uf [неразборчиво, м.б. nf?], нововерхненемецкое auf [на], der ursprünglich auf [первоначальный?], oben bezeichnet [вышеобозначенный]. Отсюда с помощью окончания [Gipfelendung] am возникло санскритское [sskr.] upama, латинское summa вместо [für] supma, самый верхний, самый высокий [die oberste, höhste]. Стало быть, обозначает то, что выше всего [die höchste], главное дело, затем целое [das Ganze], совокупность вещей [das Gesammt von Dingen].

[10] *Plus* произошло от латинского plus, pluris. Это последнее происходит от древнего корня par, санскритское par, греческое par, латинское par-io, …[lit.] per-iu, … ful, нововерхненемецкое voll, [полный], fullen [наполнять]. Отсюда … латинское plus – mehr [больше].

[11] *Fach* происходит от корневого глагола pak, санскритское pac, латинское pac, готское fahan, … нововерхненемецкое fahnen, в значении fange [ловлю], binde [связываю], потом fange an [начинаю], mache [делаю]. Fach, таким образом, – это устройство для ловли, для захвата; впоследствии в сложных словах «einfach, zehnfach, hundertfach, das Vielfach» – «однократно, десятикратно, стократно, многократно» и т.д. – получило всеобщее распространение в качестве обозначения сомножителей [Factoren] и является, следовательно, подлинно немецким словом.

[12] *Zeug* происходит от корневого глагола tagh, tangh, санскритское taksh, греческое teúchc tyn=chánc, étych=on – произвожу, действую, téch=nē – искусство, латинское texo, … древневерхненемецкое ziugau, нововерхненемецкое zeugen, erzeugen, weben, откуда Zeug – инструмент, ткань…

[13] *Base* представляет собой заимствованное латинское básis, а последнее – заимствованное греческое básis, Fus [нога], Fusgestell [подножие]. Слово происходит от корневого глагола gva, санскритское gu, греческое ba – иду [gehe], шагаю [schreite].

[14] *Stufe* происходит от корневого глагола stab, stamb, санскритское stamb, греческое stemb=o, англо-саксонское stapan, steppan, древневерхненемецкое stephan, stemph=on, treten [ступать], beschreiten [вступать], stapfen [тяжело ступать]. Отсюда Stufe, английское step – ступень лестницы, ступенька [die Stuf].

Раздел 1

ОПРЕДЕЛЕНИЯ И ОБОЗНАЧЕНИЯ

1. Учение о величинах есть [по сути] учение о связи величин.
2. *Величиной* называется все то, что является или может стать предметом мышления, коль скоро оно имеет одно, а не несколько значений.

Две величины называются равными, если в любой связи учения о формах одну из них можно заменить другой без изменения значения.

Две величины называются неравными, если ни в одной связи учения о формах ни одну из них нельзя заменить другой без изменения значения.

Никакая величина никогда не может быть равна и вместе с тем не равна другой величине, но она должна быть либо равной, либо неравной другой величине, ибо каждая величина должна иметь одно, а не несколько значений.

3. *Штифтом*, или *элементом*, называется величина, которая подлежит связыванию, однако сама не возникла с помощью связи, и которая, поэтому, должна быть полагаема в качестве первоначальной.
4. *Буква* есть знак величины. Одна и та же буква в одном и том же параграфе учения о формах всегда обозначает единственную, притом одну и ту же величину, следовательно, имеет только одно значение. Впрочем, каждая буква обозначает любую величину.

Каждое предложение, доказанное для некоторой буквы, имеет силу для всех величин, которые эта буква может обозначать, т.е. для произвольной величины[33*]. Если буква должна обозначать только один определенный вид величин, то об этом следует ясно сказать в этом параграфе и точно и недвусмысленно указать, какие величины мы хотим обозначить таким способом, ибо иначе данное предложение имело бы силу для любых возможных величин.

В учении о формах знаки e_1, e_2 [, ...] являются знаками штифтов, а буквы (a, b, c,...) – знаками произвольных величин.

Если дан ряд величин (например, состоящий из n величин), то величины этого ряда обычно обозначают одной и той же буквой с нижними индексами, например: a_1, a_2, a_3, ..., a_{n-1}, a_n.
В этом случае a_1 обозначает первую, a_n – последнюю величину ряда, a_α – произвольную, $a_{\alpha+1}$ – непосредственно следующую величину ряда.

5. *Связью* величин называется любое возможное для человеческого ума сопоставление или взаимосвязь величин, коль скоро она имеет одно, а не несколько значений.

Целостностью, или *результатом*, связи называется то, что возникает посредством связи двух величин. Поскольку целостность имеет только одно значение и является предметом мышления, она, в свою очередь, есть некоторая величина и может быть связываема снова.

Знаком связи может стать любой знак. Один и тот же связующий знак в одном и том же параграфе учения о формах обозначает всегда единственную, причем одну и ту же связь. Впрочем каждый связующий знак может обозначать любую из возможных связей.

Каждое предложение, доказанное для некоторого связующего знака, справедливо, следовательно, для всех связей, которые может обозначать этот знак. Если некоторый связующий знак должен обозначать только один определенный вид связи, то при его введении об этом следует ясно сказать и недвусмысленно установить, какая связь должна таким способом обозначаться.

Общим знаком для обозначения произвольной связи является кружок $\circ$, помещаемый между связываемыми вещами (например, $a \circ b$, читается: «*a* кружок *b*, или «*a* связано с *b*», или «*a* с *b*»).

Особыми знаками связи являются знак равенства = и знак неравенства $\gtrless$; Первый означает, что связываемые величины равны (например, $a = b$, что читается «*a* равно *b*»), а второй означает, что связываемые величины неравны (например, $a \gtrless b$, читается «*a* не равно *b*»).

Связь двух величин посредством знака = называется равенством. Величина, стоящая слева, называется его левой частью, а стоящая справа – его правой частью.

6. Каждая связь величин имеет место *только между двумя величинами*, ибо только такая связь имеет одно, а не несколько значений[34*]. Если требуется связать больше величин, то необходимо точно и недвусмысленно установить, какова третья величина, с которой должен быть непосредственно связан результат упомянутой связи и т.д.

Скобка есть знак того, что величины, в ней заключенные, сначала должны быть связаны в некоторую целостность, прежде чем допустимо связать их с величиной, находящейся вне скобки.

В каждой скобке могут стоять только две величины. Если же в ней содержится больше величин, то все они одна за другой должны быть заключены в другую скобку, и прежде чем находящаяся в этой скобке целостность может быть связана с величиной, стоящей вне этой скобки, все величины, в ней находящиеся, должны быть связаны в некоторую целостность.

Если необходимо связать n величин, то в соответствующем выражении потребуется $n - 2$ скобки, ибо не должно быть никакого сомнения относительно порядка следования связей (например, в случае 5 величин требуется 3 скобки:

$[a \circ ([b \circ c] \circ d)] \circ e])$[35*].

7. *Последовательно связать* ряд величин значит сначала связать первую величину со второй, целостность, возникающую из этой связи, связать с третьей величиной. Всякий раз целостность, возникающая в результате связи всех предшествующих величин, связывается с непосредственно следующей величиной[36*].

Если последовательно связаны несколько величин, то мы можем опустить скобки, так как относительно очередности данной связи не может быть никаких сомнений. Скобки должны стоять только там, где происходит отклонение от последовательной связи; однако их можно снова ввести в последовательную связь.

Целостность, представляющую собой последовательную связь величин $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$, будем обозначать посредством $G_{1,n}$.

8. *Формулой* называется любая связь величин; характер формулы определяется видом данной связи.

Формулой от a называется формула, содержащая величину a. Она обозначается посредством $F(a)$, читается: «формула от a». Знак $F(a)$ в одном и том же параграфе учения о формах обозначает единственную формулу от a. В иных случаях он может обозначать любую формулу от a. Если требуется, чтобы этот знак обозначал только один вид формул, то об этом следует четко сказать.

Равнозвучными называются две формулы, содержащие одни и те же связи между одними и теми же величинами[37*].

Две формулы называются различными, если у них не совпадают связи или величины. Две различные формулы равны между собой, если одна из них может быть преобразована в другую без изменения значения.

Соответствующими называются две формулы, которые становятся равнозвучными, если в одну из этих формул поставить величины из второй формулы.

Часть первая:

ВИДЫ СВЯЗИ

Раздел 2

РАВЕНСТВО ВЕЛИЧИН

9. $a = a$, или словами: каждая величина равна самой себе.

Доказательство. Следует непосредственно из Определения 2, или словесно: Согласно № 2, две величины называются равными, если без изменения значения одну из них можно заменить другой. Каждую величину, поскольку она, согласно № 2, обладает только одним значением, можно заменить ею самой без изменения значения, следовательно, каждая величина равна самой себе.

10. $a \circ b \circ c \circ d = ((a \circ b)\ c) \circ d$; или словами: В каждой последовательной связи величин скобки можно как угодно удалять или последовательно расставлять.

Доказательство. Следует непосредственно из № 7, или словами: Обе части равенства различны по форме связи. Однако, в соответствии с № 7, в последовательной связи скобки можно удалить; если сделать это в правой части, то обе части станут равнозвучными, следовательно, согласно № 9, они равны.

10 b. $G_{1,n+1}(a_\alpha) = (G_{1,n}(a_\alpha)) \circ a$ и

$$G_{1,n}(a_\alpha) = a_1 \circ a_2 \circ a_3 \circ, \ldots, a_n$$ [38*].

Целостность, состоящая из $n + 1$ величин $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{n+1}$, равна целостности, состоящей из n первых величин, связанной с величиной a_{n+1}.

Доказательство: непосредственно следует из № 7.

11. $(a = b) = (b = a)$, или словесно: обе части равенства можно поменять местами.

Доказательство: в виде формул:

$(a = b) = (a = a)$ (согласно № 2)

$ = (b = a)$ (согласно № 2).

Словесно: две величины равны друг другу, если в каждой связи одну из них можно заменить другой, не меняя значения, стало быть, первую величину можно подставить вместо второй, а вторую – вместо первой.

12. Определение: Две величины называются условно равными, или равными относительно некоторого условия, если эти величины равны, коль скоро выполняется это условие[39*].

Знаком условного равенства является $\overset{*}{=}$; звездочка служит для присоединения условия, при котором наступает равенство. Еще одним знаком условного равенства является связь двух равенств, из которых одно называется допущением, или условием (гипотезой), а другое заключением (тезисом).

13. $a \circ b \overset{*}{=} a \circ c$ * – условие $b = c$, или

допущение $b = c$, заключение [следствие] $a \circ b = a \circ c$, или словесно: равенство остается верным, если обе его стороны одинаковым образом связаны с равными величинами.

Доказательство: Непосредственно получается из № 2, или словесно: величина b равна c означает, согласно № 2, что одну из них можно заменить другой без изменения значения; поэтому, и в связи $a \circ b$ без изменения значения вместо b можно подставить c т.е., используя № 9, получаем $a \circ b = a \circ c$.

14. Допущение: $(a = b)$. Заключение: $F(a) = F(b)$, или словесно: Если две величины равны между собой, то и каждая формула или функция первой величины равна соответствующей формуле или функции второй величины.

Доказательство: непосредственно получается из № 2, или словесно: Формулы двух величин называются соответствующими, если они становятся равнозвучными, когда во второй формуле вместо второй величины поставить первую. Но, согласно допущению, $a = b$, поэтому одну из этих величин можно, не изменяя значения, заменить другой во всякой связи, следовательно, и в формуле $F(a)$; тогда обе формулы становятся равнозвучными или равными, поэтому $F(a) = F(b)$.

15. Допущение: $a = c$, $b = c$. Заключение: $a = b$. Если две величины равны некоторой третьей величине, то они равны между собой.

Доказательство. В формулах: допущение $b = c$, заключение: $(a = c) = (a = b)$ (согласно 13), или словесно: равенство $c = b$, согласно 13, остается верным, если обе его части одинаковым способом связать с одной и той же величиной a; поэтому $(a = c) = (a = b)$.

16. Допущение: $a = b$, $b = c$. Заключение: $a = c$, или словесно: если одна величина равна другой, а другая равна третьей, то первая равна третьей.

Доказательство: Получается непосредственно из 13. Допущение: $b = c$. Заключение: $(a = b) = (a = c)$, или словесно: согласно 13, равенство $b = c$ остается верным, если обе его части одинаковым способом связать с одной и той же величиной a, поэтому имеем: $(a = b) = (a = c)$[40*].

17. Предложение о прямом (непосредственном) доказательстве для величин:

допущение: $a_1 = a_2, a_2 = a_3, \ldots, a_{n-1} = a_n$ или $a = b$ — заключение $a_1 = a_n$,

или словесно: Если в некоторой последовательности величин каждая предшествующая величина равна непосредственно следующей, то первая величина последовательности равна ее последней величине.

Доказательство в виде формул:

Допущение: $a_1 = a_2, a_2 = a_3$. Заключение: $a_1 = a_3$ (согласно 16).

Допущение: $a_1 = a_3, a_3 = a_4$. Заключение: $a_1 = a_4, a_3 = a_4$. (согласно 16), и т.д.

Допущение $a_1 = a_{n-1}, a_{n-1} = a_n$. Заключение: $a_1 = a_n$ (согласно 16).

Доказательство словесное: Согласно предположению, первая величина равна второй. Но поскольку, далее, каждая предшествующая величина равна непосредственно последующей, то в каждом равенстве можно заменить непосредственно предшествующую величину непосредственно следующей величиной. Поэтому в правой части первого равенства вторую величину можно заменить третьей, третью – четвертой и так поступать до тех пор, пока первая величина не будет заменена последней величиной последовательности, и таким образом, первая величина равна последней.

18. Предложение о поступательном (индуктивном) доказательстве для величин[41*].

Допущение: $F(a_1) = \mathcal{F}(a_1)$, $[F(a_\alpha) = \mathcal{F}(a_\alpha)] = [F(a_{\alpha+1}) = \mathcal{F}(a_{\alpha+1})]$. Заключение: $F(a_n) = \mathcal{F}(a_n)$, или словесно: Каждое равенство учения о формах, справедливое для первой величины последовательности и такое, что если оно справедливо для некоторой произвольной величины последовательности, то оно имеет силу также для непосредственно последующей величины последовательности, справедливо для всех следующих одна за другой величин последовательности.

Доказательство в виде формул:

Имеет место $F(a_1) = \mathrm{F}(a_1)$ и $[F(a_1) = \mathcal{F}(a_1)] = [F(a_2) = \mathcal{F}(a_2)]$.

Заключение: $F(a_2) = \mathcal{F}(a_2)$ (согласно № 2)

Имеет место: $F(a_2) = \mathcal{F}(a_2)$ и $[F(a_2) = \mathcal{F}(a_2)] = [F(a_3) = \mathcal{F}(a_3)]$.

Заключение: $F(a_3) = \mathcal{F}(a_3)$ (согласно № 2)

и т.д.

Имеет место: $F(a_{n-1}) = \mathcal{F}(a_{n-1})$ и $[F(a_{n-1}) = \mathcal{F}(a_{n-1})] = [F(a_n) = \mathcal{F}(a_n)]$.

Заключение: $F(a_n) = \mathcal{F}(a_n)$ (согласно № 2).

Доказательство словесное: Согласно допущению, равенство $F(a_1) = \mathcal{F}(a_1)$ справедливо для первой величины последовательности. Далее, если это равенство справедливо для некоторой произвольной величины последовательности a_α, то оно справедливо и для непосредственно следующей величины последовательности $a_{\alpha+1}$; значит, в этом равенстве a_α можно заменить на $a_{\alpha+1}$; или, в соответствии с полученным равенством, $a_\alpha \overset{*}{=} a_{\alpha+1}$, следовательно, согласно № 17, справедливо и равенство $a_1 \overset{*}{=} a_n$, т.е. в этом равенстве первую величину последовательности, a_1, можно заменить последней величиной этой последовательности, a_n, или иначе: поскольку данное равенство справедливо для первой величины, оно справедливо также и для последующих величин последовательности.

19. Предложение о доказательстве для штифтов (относящемся к элементам [elementaren] доказательства).

Каждое равенство учения о формах, справедливое для одного штифта, или элемента, и такое, что если оно справедливо для некоторой произвольной величины, то оно справедливо и для всякой величины, содержащей на один штифт больше, тогда это предложение справедливо для всех величин, строящихся посредством последовательной связи.

Доказательство: Получается непосредственно из 18, если в качестве первой величины взять данный штифт, а в качестве непосредственно следующей каждый раз брать величину, содержащую на один штифт больше, чем величина, полученная на предшествующем шаге.

Раздел 3

ПРИСОЕДИНЕНИЕ ВЕЛИЧИН

20. Определение. Присоединением называется такая связь величин, при которой нельзя, не изменив значения целостности, ни удалить скобку, ни изменить расположение величин.

Примеры: Любая научная конструкция, любой словарь[42*].

Раздел 4

ОБЪЕДИНЕНИЕ ВЕЛИЧИН

21. Определение. *Объединением* называется связь величин, которая позволяет, без изменения значения целостности, вместо того чтобы связывать вторую величину со штифтом, или элементом, связать обе величины в целостность, а затем связать этот элемент с полученной целостностью[43*].

Примеры: Вариации [Geänder] в учении о соединениях, ибо в случае вариации справедливо $a(bc) = abc$, но не $ab = ba$, т.е. имеет место объединение без перестановки.

22. $a \circ (b \circ c) = a \circ b \circ c$, или словами: Вместо того чтобы объединять некоторый штифт, или элемент, со второй из данных величин, его можно объединить с целостностью, состоящей из обеих этих величин; и, наоборот, вместо того чтобы объединять некоторый штифт с целостностью, состоящей из двух величин, его можно соединить со второй величиной.

23. Целостность, состоящая из двух таких величин, что содержащиеся в них штифты связаны последовательно, в свою очередь есть некоторая величина, штифты которой связаны последовательно.

Доказательство в виде формул: для штифтов, или основное относительно b.

1. Данное предложение справедливо, если b содержит только один штифт e, ибо, согласно 7, $a \circ e$ есть величина, штифты которой связаны последовательно.

2. Если данное предложение справедливо для величины $a \circ b$, так, что $a \circ b$ есть величина, штифты в которой связаны последовательно (допущение), то оно справедливо также и для величины $a \circ (b \circ e)$, где b содержит больше на один штифт e, – так, что $a \circ (b \circ e)$ тоже есть величина, штифты в которой связаны последовательно (заключение); ибо имеет место

$$a \circ (b \circ e) = a \circ b \circ e \qquad \text{(согласно 22)},$$

т.е., поскольку $a \circ b$ есть величина, штифты которой связаны последовательно, таково же и $a \circ b \circ e$, поэтому $a \circ (b \circ e)$ тоже есть величина, штифты которой связаны последовательно.

3. Следовательно, данное предложение, в соответствии с № 19, справедливо для всех величин b.

24. $a \circ (b \circ c) = a \circ b \circ c$, или словесно:

В объединении трех величин скобки можно удалять или расставлять любым способом.

Доказательство в виде формул: для штифтов, или основное относительно c.

1. Равенство справедливо, если c содержит только один штифт (согласно 22).
2. Если равенство справедливо для величины c (допущение), то оно справедливо также и для величины $c \circ e$, которая содержит на один штифт больше (заключение); ибо

$$\begin{aligned} a \circ [b \circ (c \circ e)] &= a \circ [b \circ c \circ e] && \text{(согласно 22)} \\ &= a \circ [b \circ c] \circ e && \text{(согласно 22)} \\ &= a \circ b \circ c \circ e && \text{(согласно допущению)} \\ &= a \circ b \circ (c \circ e) && \text{(согласно 22).} \end{aligned}$$

3. Стало быть, данное предложение, в соответствии с 19, справедливо для всех величин.

Доказательство словесное: Повторяется все доказательство номера 23. Если в третьей величине c расставить все скобки, а ее штифты, двигаясь снаружи внутрь, изымать из данной скобки, то из этой скобки можно изъять все штифты, входящие в c, и, следовательно, удалить эту скобку.

25. *Закон объединения* (закон относительно скобок).

В любой связи произвольных величин, для которой имеет место объединение, любую скобку можно произвольно удалить или ввести, и целостность данной связи будет величиной, штифты, или элементы, которой связаны последовательно[44*].

Доказательство в виде формул – поступательное (индуктивное) относительно $G_{1,n}b_{\mathfrak{b}}$

Дано $a \circ (G_{1,n}b_{\mathfrak{b}}) = a \circ (b_1 \circ b_2 \circ \ldots \circ b_n)$;

Требуется доказать $a \circ (b_1 \circ b_2 \circ \ldots b_n) = a \circ b_1 \circ b_2 \circ \ldots \circ b_n$.

1. Требуемое равенство справедливо, если $G_{1,n}b_{\mathfrak{b}}$ содержит только две величины $b_1 \circ b_2$ (согласно № 24).

2. Если это равенство справедливо для некоторой целостности $G_{1,n}b_{\mathfrak{b}}$ (допущение), то оно справедливо также и для целостности $G_{1,n+1}b_{\mathfrak{b}}$, которая содержит на одну величину b_{n+1} больше (заключение); ибо

$$\begin{aligned} a \circ (G_{1,n+1}b_{\mathfrak{b}}) &= a \circ (G_{1,n}b_{\mathfrak{b}} \circ b_{n+1}) && \text{(согласно 10 в)} \\ &= (a \circ G_{1,n}b_{\mathfrak{b}}) \circ b_{n+1} && \text{(согласно 24).} \end{aligned}$$

3. Следовательно, согласно № 18, данное равенство справедливо в общем случае.

Доказательство словесное: следует сначала восстановить все скобки. После этого в каждой скобке должно содержаться, согласно 6, только две величины, а целостность, заключенная в этой скобке, окажется связанной только с одной третьей величиной, стоящей вне скобки. Следовательно, согласно № 24, мы можем каждый раз удалять самую внешнюю скобку, и так, шаг за шагом, удалить все скобки; тогда формула станет величиной, все штифты которой связаны последовательно.

26. В любой связи величин, для которой имеет место объединение, вместо штифтов, или элементов, можно подставлять произвольные величины, составленные из штифтов, рассматривая их как штифты; для полученных таким способом новых величин имеют место все законы объединения.

Доказательство: Основная формула объединения – это $a \circ (b \circ e) = a \circ b \circ e$; из нее выводимы все законы объединения. Но эта формула будет справедлива, если вместо штифта e ввести некоторую произвольную величину c, и т.д.[45*]

Раздел 5

ПЕРЕСТАНОВКА ВЕЛИЧИН

27. Определение. *Перестановкой* называется такая связь величин, для которой, кроме объединения, справедлива и перестановка двух штифтов, или элементов.

28. $= e_1 \circ e_2 = e_2 \circ e_1$.

Если имеет место перестановка, то два штифта, или элемента, можно поменять местами.

29. *Закон перестановки* (*закон упорядочения*).

В любой связи произвольных величин, для которых имеет место перестановка, не меняя значения целостности, можно как угодно расставлять или удалять скобки, и произвольным образом менять порядок связываемых величин; целостность при наличии такой связи представляет собой величину, штифты, или элементы, которой связаны последовательно.

Доказательство с помощью формул распадается на три части, а именно следует доказать:

1) что величину и штифт можно поменять местами, или

2) что две величины можно поменять местами, т.е. что

$a \circ b = b \circ a$, и

3) что в случае нескольких величин, каждая из них может занять любое место, или что $a \circ b \circ c \circ d = a \circ d \circ c \circ b$[46*].

a. *Доказательство* для штифтов, или основное относительно a.

1. Равенство $a \circ e_1 = e_1 \circ a$ выполняется, если a представляет собой один штифт e_2, ибо $e_2 \circ e_1 = e_1 \circ e_2$ (согласно 28).

2. Если рассматриваемое равенство справедливо для некоторой произвольной величины a (допущение), то оно справедливо и для величины $a \circ e_2$, которая содержит на один штифт e_2 больше (заключение); ибо

$$\begin{aligned}
(a \circ e_2) \circ e_1 &= a \circ (e_2 \circ e_1) && \text{(согласно 22)}\\
&= a \circ (e_1 \circ e_2) && \text{(согласно 28)}\\
&= (a \circ e_1) \circ e_2 && \text{(согласно 22)}\\
&= (e_1 \circ a) \circ e_2 && \text{(согласно допущению)}\\
&= e_1 \circ (a \circ e_2) && \text{(согласно 22).}
\end{aligned}$$

3. Следовательно, рассматриваемое равенство справедливо в общем случае.

b. Доказательство для штифтов, или основное относительно b.

1. Равенство $a \circ b = b \circ a$ верно, если b представляет собой только один штифт e (согласно 29 a).

2. Если рассматриваемое равенство верно для некоторой произвольной величины b (допущение), то оно верно и для каждой величины $b \circ e$, которая содержит на один штифт больше; ибо

$$\begin{aligned}
a \circ (b \circ e) &= (a \circ b) \circ e && \text{(согласно 22)}\\
&= (b \circ a) \circ e && \text{(согласно допущению)}\\
&= b \circ (a \circ e) && \text{(согласно 22)}\\
&= b \circ (e \circ a) && \text{(согласно 29 a)}\\
&= (b \circ e) \circ a && \text{(согласно 24).}
\end{aligned}$$

4. Следовательно, согласно 19, данное предложение справедливо в общем случае.

c. Поскольку имеет место объединение, величины, находящиеся между переставляемой величиной d и тем местом, на которое она должна быть поставлена, можно заключить в скобку; тогда мы имеем:

$$\begin{aligned}
a \circ b \circ c \circ d &= a \circ [(b \circ c) \circ d] && \text{(согласно 25)}\\
&= a \circ [(c \circ b) \circ d] && \text{(согласно 29 b)}\\
&= a \circ [d \circ (c \circ b)] && \text{(согласно 29 b)}\\
&= a \circ d \circ c \circ b && \text{(согласно 25).}
\end{aligned}$$

Словесное доказательство: a. Поскольку имеет место перестановка, то, согласно 27, имеет место и объединение, стало быть, согласно 25, скобки можно любым способом расставлять или удалять, не меняя значения целостности.

b. Но любой штифт можно поместить на любое произвольно взятое место. Ибо, согласно закону объединения, № 25, произвольный штифт вместе с соседним с ним, например предшествующим, штифтом можно заключить в скобку, затем эти штифты поменять метами, затем снова удалить скобку. Таким же образом тот же штифт можно снова поменять местами с соседним, например предшествующим, штифтом, заключить эти штифты в скобку, снова переставить штифты, затем удалить скобку, и так далее. Стало быть, любой штифт без изменения значения можно поместить на произвольное предшествующее или последующее место.

c. Равным образом, любую величину можно поместить на произвольное место, шаг за шагом помещая на это место все штифты, содержащиеся в данной величине, значение ее при этом не меняется. Следовательно, порядок связываемых величин можно любым образом изменять, значение целостности при этом не будет меняться. Эта целостность, в соответствии с 25, в свою очередь, будет некоторой величиной, штифты которой связаны последовательно.

30. В каждой связи величин, для которой справедлива перестановка, вместо штифтов, или элементов, можно подставлять в качестве штифтов, или элементов, произвольные величины, построенные из этих штифтов, и получить таким способом новые величины, для которых будут иметь место все законы перестановки.

Доказательство: Все законы перестановки выводимы из двух основных формул $a \circ (b \circ e) = a \circ b \circ e$ и $e_1 \circ e_2 = e_2 \circ e_1$, а последние, в соответствии с 29, справедливы для произвольных величин; стало быть, и т.д.

Раздел 6

ОТНОШЕНИЕ ВЕЛИЧИН[47*]

31. Определение. Связь двух величин называется отношением, а результат отношения *изделием* [Erzeugniss] , если:

1) изделие из двух штифтов, или элементов, в свою очередь является штифтом и
2) вместо того чтобы каким-либо способом соединять некоторый штифт с некоторой величиной, можно другим способом соединить изделие из обеих величин с изделием из данного штифта и другой величины[48*].

Для обеих, относящихся друг к другу величин, могут иметь место различные виды отношения и, соответственно этому, – различные виды объединения. Соответственно для каждого из двух отношений мы различаем два вида соединения и соответствующим образом называем оба вида, которые встречаются в одном и том же отношении.

Знаки этих видов соединения будут $\circ$ и $\odot$, которые читаются «перво-соединенные» и «второ-соединенные» (например, $a \odot b$ означает a втор. b, «a вторым способом объединено с b»). Тем самым осуществлено различие и видов отношений, в силу чего для обоих видов можно использовать один и тот же знак. Знак отношения состоит в том, что относящиеся друг к другу величины выписываются рядом, не будучи разделены каким-нибудь знаком (например, $a\ b$ читается «$a\ b$» или «a на b»).

Связь посредством отношения по сравнению с другими видами связи называется более высоким уровнем связи.

Скобка называется скобкой, выражающей отношение, если величины в скобке связаны посредством объединения, а величина вне скобки связана с ними посредством отношения (например, $(a \circ b)\ c$).

32. $(a \circ e)b = a\ b \odot e\ b$[49*]

$$a(b \circ e) = a\ b \odot a\ e.$$

Вместо того чтобы объединять некоторую величину со штифтом, или элементом, можно соответствующим образом объединить изделие из двух величин с изделием из этого штифта и второй величины.

33. Изделие $a\ e$ и $e\ b$ из некоторого штифта, или элемента, и величины, штифты которой связаны последовательно, в свою очередь является величиной, штифты которой связаны последовательно.

Доказательство для штифтов, или основное относительно a.

1. Данное предложение справедливо, если a содержит только один штифт; ибо $e_1\ e_2$ есть некоторый штифт (в соответствии с 31.1).
2. Если это предложение справедливо для a (допущение), то оно справедливо и для величины $a \circ e_1$, которая содержит на один штифт больше (заключение); ибо справедливо $(a \circ e_1)e = ae \odot e_1e$ (в соответствии с 32). Но ae есть величина, штифты которой, согласно допущению, связаны последовательно, $e_1\ e$ – некоторый штифт (в соответствии с 31.1),

связанный последовательно, стало быть, $ae \odot e_1\, e$ – есть некоторая величина, штифты которой также связаны последовательно.

3. Следовательно, в силу 19, данное предложение справедливо в общем случае.

Таким же путем выводится, что eb есть некоторая величина, штифты которой связаны последовательно.

34. Изделие $a\, b$, состоящее из двух величин, штифты, или элементы, которых связаны последовательно, в свою очередь есть величина, штифты которой связаны последовательно, и для этого изделия выполняются все законы объединения.

Доказательство для штифтов, или основное относительно b.

1. Согласно 33, данное предложение справедливо, если b содержит всего один штифт.
2. Если это предложение справедливо для некоторой произвольной величины b (допущение), то оно справедливо также и для величины $b \circ e$, которая содержит на один штифт больше (заключение); ибо, согласно 32, имеет место $a(b \circ e) = ab \odot a\, e$.

   Но здесь $a\, b$ есть некоторая величина, штифты которой связаны последовательно (согласно допущению), и $a\, c$ – такая же величина (согласно 33). Но целостность, состоящая из двух величин, штифты которых связаны последовательно, согласно 25, в случае объединения, опять-таки есть величина, штифты которой связаны последовательно. Поэтому $a(b \circ e)$ – величина, штифты которой также связаны последовательно.
3. Итак, данное предложение на основании 19 справедливо в общем случае.

35. $(a \circ b)c = a\, c \odot b\, c$

$c(a \circ b) = c\, a \odot c\, b$, или словесно:

Изделие из некоторой величины и целостности, содержащей 2 величины, равно целостности, содержащей, соответственно, изделия из упомянутой величины [c] и двух данных величин.

Доказательство посредством формул, или основное относительно b.

1. Согласно 32, равенство верно, если b содержит только один штифт.

2. Если данное равенство верно для некоторой произвольной величины b (допущение), то оно выполняется и для величины

$b \circ e$, содержащей на один штифт e больше; ибо

$$[a \circ (b \circ e)]c = [(a \circ b) \circ e]c \quad \text{(согласно 25)}$$
$$= (a \circ b)c \circ e\, c \quad \text{(согласно 32)}$$
$$= a\, c \odot b\, c \odot e\, c \quad \text{(согласно допущению)}$$
$$= a\, c \odot (b\, c \odot e\, c) \quad \text{(согласно 25)}$$
$$= a\, c \odot (b \circ e)c \quad \text{(согласно 32).}$$

3. Следовательно, согласно 19, данное предложение справедливо в общем случае.

Таким же образом выводится $c(a \circ b) = c\, a \odot c\, b$.

Доказательство словесное: Если имеет место объединение, то всякая целостность, состоящая из двух величин, равна соответствующей целостности, состоящей из последовательно связанных штифтов двух величин (согласно 25). Если члены этой последовательной связи, кроме последнего штифта e, свести в некоторую величину F, то изделие из первичной целостности и некоторой величины c равно соответственно вторичной целостности из изделий $F\, c$ и $e\, c$[50*].

Таким же образом можно всякий раз выделять из первичной целостности последний штифт и шаг за шагом преобразовывать все изделие, состоящее из первичной целостности и величины c, в соответствующую вторичную целостность, в которой соединяемые величины представляют собой изделия из единственного штифта и этой величины. Наконец, эти соединенные величины можно снова так свести воедино, что все изделия, содержащие штифт a, составят изделие из a и c, равным образом, все [изделия], содержащие штифты из b, сведутся в изделие, состоящее из b и c, а затем вторично объединить два последних результата[51*].

36. $[G_{1,n} \circ a_\alpha]b = G_{1,n} \odot b$

$b[G_{1,n} \circ a_\alpha] = G_{1,n} \odot b\, a_\alpha$.[52*]

Изделие из некоторой величины b и некоторой целостности, состоящей из произвольного числа величин, равно соответствующей целостности, состоящей из изделий, образованных указанной величиной и этими отдельными величинами, составляющими исходную целостность. Или: скобку, выражающую отношение, можно удалить, устанавливая отношение каждой величины, находящейся в скобке, с величиной вне скобки и производя соответствующее соединение возникающих таким способом изделий.

Доказательство посредством формул – поступательное, или индуктивное, относительно $G_{1,n}a_{\mathfrak{a}}$.

1. Согласно 35, данное равенство справедливо, если $G_{1,n} \circ a_{\mathfrak{a}}$ содержит только две величины.

2. Если данное равенство выполняется для целостности $G_{1,n} \circ a_{\mathfrak{a}}$, состоящей из произвольного числа величин (допущение), то оно выполняется и для целостности $G_{1,n+1} \circ a_{\mathfrak{a}}$, которая содержит на одну величину a_{n+1} больше (заключение). Ибо:

$$
\begin{aligned}
[G_{1,n+1} \circ a_{\mathfrak{a}}]b &= [(G_{1,n} \circ a_{\mathfrak{a}}) \circ a_{n+1}]b && \text{(согласно 10 b)}\\
&= [G_{1,n} \circ a_{\mathfrak{a}}]b \odot a_{n+1}\, b && \text{(согласно 35)}\\
&= (G_{1,n}\, a_{\mathfrak{a}}\, b) \odot a_{n+1}\, b && \text{(согласно допущению)}\\
&= G_{1,n+1} \odot a_{\mathfrak{a}}\, b && \text{(согласно 10 b).}
\end{aligned}
$$

4. Следовательно, согласно 18, данное предложение справедливо в общем случае.

Таким же способом выводится, что $b[G_{1,n} \circ a_{\mathfrak{a}}] = G_{1,n} \odot \mathfrak{b}\, a_{\mathfrak{a}}$.

Доказательство словесное: Если в данной целостности расставить все скобки, – в соответствии с 25, поскольку имеет место объединение, – то каждая целостность окажется составленной из двух величин. Изделие из некоторой величины b и этой целостности равно соответствующей целостности, содержащей оба изделия, состоящие из этой величины b и каждой из двух величин по отдельности. Если теперь одна из двух величин все еще является целостностью, то изделие, состоящее из величины b и этой целостности, совершенно так же преобразуется в соответствующую целостность из двух изделий, состоящих из той же самой величины b и отдельных величин. И так до тех пор, пока ни одна из величин больше не будет целостностью, состоящей из других величин и, следовательно, вся совокупность [этих величин] превращается в соответствующую целостность, состоящую из величины b и отдельных величин.

37. В любой связи величин, для которой справедливы законы отношения, вместо штифтов, или элементов, можно подставлять в качестве штифтов любые построенные из них величины и таким способом получать новые величины; для полученных величин также будут справедливы все законы отношения.

Доказательство. Все законы отношения выводимы из основной формулы объединения $a \circ (b \circ e) = a \circ b \circ e$ и из аналогичных формул для отношения $(a \circ e)\, c = ac \odot ec$ и $a(b \circ e) = ab \odot ae$; но [эти формулы], в соответствии с 25 и 35, справедливы и для произвольных величин, и т.д.

38. Определение. Если объединения в обеих частях равенства имеют один и тот же вид, то отношение называется *простым отношением*, а если они различного вида, – то *двойным отношением* [составным отношением – die Doppelbeziehung].

39. Закон *простого отношения*

$(G_{1,n}\, a_\mathfrak{a})(G_{1,m}\, b_\mathfrak{b}) = G_{1,n.1,m}\, a_\mathfrak{a}\, b_\mathfrak{b}.$

Если ввести в простое отношение друг к другу каждую величину некоторой целостности с каждой величиной другой целостности и объединить полученные таким способом изделия, то получится изделие, состоящее из двух целостностей. Полученная целостность, в свою очередь, есть некоторая величина, штифты, или элементы, которой связаны последовательно.

Доказательство посредством формул:

$$\begin{aligned}(G_{1,n}\, a_\mathfrak{a})(G_{1,m}\, b_\mathfrak{b}) &= G_{1,n}\ a_\mathfrak{a}\,(G_{1,m}\, b_\mathfrak{b}) && \text{(согласно 36)}\\ &= G_{1,n.1,m}\, a_\mathfrak{a}\, b_\mathfrak{b}. && \text{(согласно 36).}\end{aligned}$$

Доказательство словесное: Рассмотрим сначала в качестве величины вторую целостность; тогда изделие из обеих целостностей будет равно целостности из изделий, которые получаются, если каждую величину первой целостности ввести в отношение со второй целостностью (согласно 36). Но каждое такое изделие равно целостности, состоящей из изделий, которые получаются, если соответствующую величину первой целостности ввести в отношение с каждой величиной второй целостности. Полученная целостность, согласно 34, в свою очередь есть некоторая величина, штифты, или элементы, которой связаны последовательно.

40. $(G_{1,n}\, a_\mathfrak{a})(G_{1,m}\, b_\mathfrak{b})\,(G1{,}p\ c_\mathfrak{c}) = G_{1,n.1,m.1,p} \dots a_\mathfrak{a} b_\mathfrak{b} c_\mathfrak{c} \dots .$

Если ввести в простое отношение каждую величину первой целостности с каждой величиной второй целостности, каждое полученное изделие – в простое отношение с каждой величиной третьей целостности и т.д. и объединить полученные изделия, то получится изделие из нескольких целостностей. Полученное изделие в свою очередь есть некоторая величина, штифты которой связаны последовательно.

Доказательство:

$$\begin{aligned}(G_{1,n}a_\mathfrak{a})\,(G_{1,m}b_\mathfrak{b})\,(\,G_{1,p}c_\mathfrak{c}) \dots &= [(G_{1,n}a_\mathfrak{a})\,(G_{1,m}b_\mathfrak{b})]\,(G_{1,p}c_\mathfrak{c}) \dots\\ &= (G_{1,n.1,m}a_\mathfrak{a}b_\mathfrak{b})\,(G_{1,p}c_\mathfrak{c}) && \text{(согласно 39)}\\ &= (G_{1,n.1,m.1,p}a_\mathfrak{a}b_\mathfrak{b}c_\mathfrak{c}) \dots && \text{(согласно 39)}\end{aligned}$$

и т. д.

Часть вторая:

УРОВНИ СВЯЗИ

Раздел 7

ПРИБАВЛЕНИЕ (ИЛИ СЛОЖЕНИЕ), НИЗШИЙ УРОВЕНЬ СВЯЗИ

41. Определение. *Прибавлением* (или сложением в широком смысле) называется низший уровень связи величин, поскольку для этой связи выполняется основная формула объединения, т.е. поскольку вместо того чтобы к целостности из двух величин прибавлять штифт, или элемент, его можно прибавить ко второй величине.

Складываемые величины называются *штуками* [Stucke] или слагаемыми [Summanden], а целостность, возникающая в результате сложения, называется *суммой.*

Знаком прибавления [сложения – Fügung] является вертикально поставленный крест, который читается «плюс» или «к». Скобка, перед которой стоит крест, называется *плюсовой скобкой.* Знаком суммы n величин a_1, a_2, ..., a_n является знак $S_{1,n}\, a_\alpha$.

Нулем[1] называется такая величина, которую можно прибавить к любой величине, не изменяя значения последней; знаком нуля является 0.

Штифтовыми, или элементарными [исходными], *величинами* называются штифты, или элементы, и величины, строящиеся путем последовательного прибавления, а также нуль.

42. *Основная формула прибавления (сложения в широком смысле)*

$a + (b + e) = a + b + e$, или словесно:

Вместо прибавления ко второму слагаемому штифта, или элемента, его можно прибавить к сумме, и вместо прибавления штифта к сумме его можно прибавить ко второму слагаемому.

43. $a + 0 = 0 + a = a$.

Прибавление нуля к произвольной величине не меняет эту величину.

---

[1] *Null* происходит от латинского nullum, а это последнее состоит из корневой формы отрицания ne и указателя [Deuter] ullum, уменьшительной формы unulum, от unus – один. Он, следовательно, обозначает то, что не является хотя бы чем-то, т.е. обозначает то, чего нет даже в самом малом количестве.

44. *Закон прибавления (сложения в широком смысле)*

В любой связи, образованной посредством прибавления, можно, не меняя ее значения, произвольно расставлять или удалять скобки. Сумма при этом снова является штифтовой величиной.

Доказательство: Согласно 42, справедлива основная формула объединения[53*], значит, в соответствии с разделом 4, справедлив и закон объединения; иначе говоря, можно произвольно расставлять или удалять скобки, в результате получится некоторая величина, штифты которой прибавляются последовательно, т.е., в соответствии с 41, – штифтовая величина.

45. Определение. Прибавление, для которого имеет место только объединение, а не перестановка, называется *прикреплением* [die Einfügung]; если же имеет место и перестановка, оно называется *добавлением* [die Zufügung] (сложением в узком смысле).

46. *Основная формула добавления (сложения в узком смысле)*

$e_1 + e_2 = e_2 + e_1.$

В случае добавления два штифта, или элемента, можно менять местами[54*].

47. *Закон добавления (сложения в узком смысле).*

В любой связи величин, образованной путем добавления, не изменяя значения, можно произвольно расставлять или удалять плюсовые скобки, а порядок штук произвольно изменять; такая сумма, в свою очередь, является штифтовой величиной.

Доказательство: Согласно 44, для любого прибавления выполняется закон объединения, т.е., не меняя значения, можно произвольно вводить или удалять плюсовые скобки, и сумма будет, в свою очередь, штифтовой величиной. Далее, согласно 46, справедлива основная формула перестановки, и стало быть, в соответствии с разделом 5, и закон перестановки, т.е. порядок штифтов можно как угодно менять, не изменяя значения. Следовательно, справедлив закон добавления в целом.

Раздел 8

ПЕРЕПЛЕТЕНИЕ (ИЛИ УМНОЖЕНИЕ), СРЕДНИЙ УРОВЕНЬ СВЯЗИ

48. Определение. *Переплетением* (или *умножением* в широком смысле) называется средний уровень связи величин, коль скоро для нее справедлива основная формула отношения, т.е.

в случае двух величин, вместо того чтобы к одной из них прибавлять штифт, или элемент, можно к изделию из обеих величин прибавить изделие из данного штифта и другой величины.

Переплетаемые величины называются *отделами*, или *сомножителями*, изделие, полученное в результате переплетения, называется *тканью*, или *продуктом*.

Знаком переплетения является точка или просто написание отделов друг за другом; этот знак читается «раз» [«mal»]. Скобка называется *факторной скобкой*[55*] [die Malklammer][2], если величины вне и внутри скобки связаны посредством переплетения.

Единичностью [Eins] называется такой штифт, или элемент, который может быть переплетен с любым штифтом, не меняя значения последнего.

49. *Основная формула переплетения (умножения в широком смысле)*

$$(a + e)\, b = ab + eb \quad a(b + e) = ab + ae.$$

Вместо прибавления штифта к одному из отделов, или сомножителей, можно к продукту обоих отделов прибавить продукт этого штифта и другого отдела.

50 a. $e \cdot 1 = e \quad 1 \cdot e = e.$

Единичность, переплетенная с произвольным штифтом, не меняет его значения.

50 b. $1.1 = 1$

Единичность есть такая величина, которая не меняется от переплетения с самой собой.

51. $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$

Единичность, переплетенная с произвольной величиной (или перемноженная с ней), не меняет ее значения.

Доказательство: Для штифтов, или основное относительно a.

1. Данное предложение справедливо, если a содержит только один штифт (согласно 50).

2. Если это предложение справедливо для произвольной величины a (допущение), то оно справедливо и для величины $a + e$, содержащей на один штифт больше (заключение); ибо

$$(a + e) \cdot 1 = a \cdot 1 + e \cdot 1 \qquad \text{(согласно 49)}$$
$$= a + e \qquad \text{(согласно допущению и в силу 50).}$$

---

[2] *Mal* готское mēl, древневерхненемецкое māl; слово происходит от корневого глагола māl, санскритское mal, греческое myl=jō, латинское mol-es, готское mal-an – mahlen [молоть], mahlmen [дробить, растирать], затем Farben reiben – растирать краски, рисовать. Оно обозначает нарисованный знак.

3. Итак, в соответствии с 19, данное предложение справедливо в общем случае.

52. *Закон переплетения (умножения в широком смысле).* В любой связи величин посредством переплетения (умножения в широком смысле) можно, не меняя значения, как угодно ввести или удалить плюсовую скобку и удалить все скобки, выражающие отношение.

Если ввести отношение каждой штуки одного отдела, или сомножителя, с каждой штукой другого и сложить полученные продукты, то в результате получится снова штифтовая величина.

Доказательство: В силу 49 справедлива основная формула простого отношения; следовательно, в силу раздела 6 справедлив закон отношения в той форме, как он сформулирован в № 52, но поскольку, кроме того, действует прибавление, то, согласно разделу 7, плюсовые скобки также можно произвольным образом расставлять и удалять.

53. $0 \cdot a = 0$ и $a \cdot 0 = 0$.

Нуль, переплетенный с любой величиной, дает нуль.

Доказательство:

$$ab = a(b + 0) \qquad \text{(согласно 43)}$$

$$= ab + a0 \qquad \text{(согласно 52).}$$

Следовательно, a 0 есть величина, которая, будучи прибавлена к величине ab, не меняет ее, т.е. a 0 есть нуль (согласно 41).

54. Определение. Переплетение называется:

приплетением [Anweben], если имеет место отношение, но не объединение отделов, или сомножителей,

заплетением [Einweben], если помимо отношения имеет место объединение трех штифтов, являющихся отделами, или сомножителями,

сплетением [Verweben], если, кроме отношения, имеет место как объединение, так и перестановка штифтов, являющихся отделами, или сомножителями.

55. *Основная формула заплетения (умножения в среднем смысле)*

$$e_1(e_2\, e_3) = e_1\, e_2\, e_3$$

В продукте трех штифтов (произведении трех элементов) в случае заплетения факторную скобку можно как поставить, так и удалить.

56. $a(e_1\ e_2) = a\ \ e_1\ e_2$

В продукте, или произведении, одной величины и двух штифтов в случае заплетения факторную скобку можно как ввести, так и удалить, или: вместо заплетения некоторой величины в продукт из двух штифтов (произведение двух элементов) ее можно заплести последовательно со штифтами.

Доказательство посредством формул: для штифтов, или основное относительно a.

1. Данное равенство справедливо, если a состоит ровно из одного штифта (согласно 55).
2. Если это равенство справедливо для некоторой произвольной величины a (допущение), то оно справедливо и для величины $a + e_3$, которая содержит на один штифт больше (заключение); ибо:

$$(a + e_3)\ (e_1\ e_2) = a(e_1\ e_2) + e_3(e_1\ e_2) \qquad \text{(согласно 52)}$$
$$= a\ e_1\ e_2 + e_3\ e_1\ e_2 \qquad \text{(согласно допущению и в соответствии 55)}$$
$$= (a + e_3)e_1\ e_2.$$

3. Следовательно, согласно 19, это равенство справедливо в общем случае. Доказательство словесное: Величина a есть сумма штифтов, продукт $(e_1\ e_2)$ есть штифт, согласно 31. Тогда, в соответствии с 52, продукт $a(e_1\ e_2)$ есть сумма, все штуки (слагаемые) которой являются продуктами трех штифтов. В каждом из них, в соответствии с 55, скобки можно как поставить, так и удалить, поэтому удалим их. Наконец, во всех этих продуктах два последних штифта $e_1\ e_2$ одинаковы, в соответствии с 52, их первые штифты можно снова свести в сумму [т.е. вынести $e_1\ e_2$ за скобку], и они дадут исходную величину a. Но тогда эта величина оказывается последовательно заплетенной с обоими штифтами.

57. $a\ (b\ e) = a\ b\ e.$

В продукте, или произведении, двух величин и одного штифта (элемента) в случае заплетения факторную скобку можно как ввести, так и удалить, или: вместо заплетения некоторой величины с продуктом, или произведением, состоящим из одной величины и одного штифта, ее можно последовательно заплести с величиной и штифтом.

Доказательство посредством формул: для штифтов, или основное относительно b.

1. Данное равенство справедливо, если b состоит из одного штифта (согласно 56).

2. Если данное равенство справедливо для некоторой величины b (допущение), то оно справедливо и для величины $b + e_1$, которая содержит на один штифт больше (заключение); ибо:

$$a\,[(b + e_1)\,e] = a[b\,e + e_1\,e]$$
$$= a(b\,e) + a(e_1\,e)$$
$$= a\,b\,e + a\,e_1\,e \quad \text{(согласно допущению и в соответствии с 52)}$$
$$= (a\,b + a\,e) \quad \text{(согласно 52).}$$
$$= a(b + e_1)e \quad \text{(согласно 52).}$$

3. Стало быть, в силу 19, данное равенство справедливо в общем случае.

Словесное доказательство совершенно аналогично доказательству, проведенному в № 56.

58. *Закон заплетения (умножения в среднем смысле).*

Во всякой связи величин, образованной посредством заплетения, факторные скобки можно сразу ввести или удалить, а скобки для отношения стереть, если каждую штуку одного отдела, или сомножителя, заплести с каждой штукой другого, и продукты сложить. Полученный продукт, в свою очередь, будет штифтовой величиной.

Доказательство. В силу 57 основная формула объединения справедлива для отделов, или сомножителей, поэтому, в соответствии с разделом 4, для отделов, или сомножителей, справедлив также и закон объединения. Остальные части данного предложения справедливы в соответствии с законом переплетения № 52.

59. *Основная формула для сплетения (умножения в узком смысле)*

$$e_1\,e_2 = e_2\,e_1.$$

В случае сплетения два штифта или элемента можно поменять местами.

60. *Закон сплетения (умножения в узком смысле).*

В каждой связи величин, образованной посредством сплетения, не изменяя ее значения, можно как угодно вводить или удалять плюсовые скобки, менять порядок отделов, или сомножителей, стирать скобки для отношений, сплетая каждую штуку одного отдела с каждой штукой другого и складывая продукты. Полученный продукт, в свою очередь, будет некоторой штифтовой величиной.

Доказательство: В соответствии с 59 справедлива основная формула перестановки, поэтому, согласно разделу 5, справедлив и закон перестановки. Остальная часть предложения справедлива в силу закона заплетения из № 58.

Раздел 9

ВОЗВЫШЕНИЕ (ИЛИ ВОЗВЕДЕНИЕ В СТЕПЕНЬ), НАИВЫСШИЙ УРОВЕНЬ СВЯЗИ ВЕЛИЧИН

61. Определение. *Возвышением* [die Höhung] (или *возведением в степень* в широком смысле) называется третий и самый высокий уровень связи [двух] величин. Первая величина при этом называется *основанием* [die Base], вторая – *ступенью* [die Stufe], или показателем [степени, der Exponent], результат *высотой* [die Höhe], или *степенью* [die Potenz], при условии, что вторым уровнем связи служит объединение [die Einigung], а для связи величин справедлива основная формула двойного отношения [die Doppelbeziehung]. Иными словами,

поскольку вместо прибавления штифта к величине данной ступени можно заплести между собой высоту данной величины и высоту, образованную базой и штифтом.

поскольку вместо прибавления штифта к показателю данной степени можно перемножить степени, образованные основанием и данной величиной и основанием и штифтом соответственно.

В качестве знака возвышения сверху справа от основания пишут ступень, читают этот знак «вверху» [hoch], или «в ст.» (например, a^b читается: «a и вверху b» или «a в ст. b»; здесь a – основание, b – ступень, или показатель степени, a^b – высота, или степень). Если скобка охватывает основание, то она называется базовой скобкой, если же она охватывает ступень, или показатель степени, то она называется степенной скобкой. Высота, которая получается при возведении произвольной величины a в единичную степень, полагается равной величине a.

62. $a^{b+e} = a^b \cdot a^e$

Вместо прибавления штифта к данной ступени, можно заплести высоту, состоящую

Вместо сложения показателя степени и штифта, можно перемножить степень, сосиз основания и данной величины, с высотой, состоящей из данного основания и штифта.

тавленную из данных основания и величины, со степенью, составленной из основания и данного штифта.

63. $a^1 = a$

Возведение величины в степень, равную единице, не меняет величины.

64. $1^1 = 1$.

Единица есть такая величина, которая не изменяется при возведении в степень, равную ей самой.

65. $a^0 = 1$

Любая величина, возведенная в нулевую степень, равна единице.

Доказательство: Имеем, $a^c = a^{0+c}$ (согласно 43)

$= a^0 \cdot a^c$ (согласно 62)

Следовательно, a^0 есть величина, которая не меняет величину, сплетенную с ней, отсюда, $a^0 = 1$ (согласно 48).

66. Высота, или степень, двух штифтовых величин есть снова штифтовая величина.

Доказательство: следует непосредственно из № 34.

67. $a^{b+c} = a^b \cdot a^c$

Вместо сложения двух величин, образующих ступень, можно заплести две высоты, состоящие из основания и одной из величин, и, наоборот, две высоты с одним и тем же основанием можно переплести, сложив ступени этого основания.

Вместо суммирования двух величин в показателе степени, можно перемножить две степени, состоящие из этого основания и величин – слагаемых показателя степени, и, наоборот, две степени с одним и тем же основанием можно перемножить, сложив показатели степени этого основания.

Доказательство: непосредственно следует из № 35.

68. *Закон возвышения (возведения в степень в широком смысле)*

$$a^{S_{1,n} b_\mathfrak{b}} = P_{1,n}(a^{b_\mathfrak{b}})$$

Во всякой связи величин, полученной возвышением, сумму, составляющую данную ступень, можно разложить,

возвысив данное основание на отдельные слагаемые, из которых состоит данная ступень, и переплетя полученные высоты. Полученная высота снова будет некоторой штифтовой величиной.	возвысив данное основание в степени слагаемых, составляющих в сумме показатель степени, и перемножив полученные степени. Полученная в результате степень снова будет основной величиной [die Elementergrose].

Доказательство непосредственно следует из № 36.

69. Определение. Возвышение называется *повышением*, если имеет место только отношение; повышение называется *завышением*, если выполняются равенства

$$(ab)^e = a^e \cdot b^e \quad a^{e_1 e_2} = (a^{e_1})^{e_2},$$

если

1) вместо возвышения на один штифт изделия из двух величин эти величины можно возвысить порознь, а полученные высоты заплести, и 2) вместо возвышения некоторой величины на продукт двух штифтов, ее можно последовательно возвысить на штифты, образующие данную ступень;	1) вместо того чтобы возводить в степень, равную некоторому элементу, произведение двух величин, эти величины можно по отдельности возвести в эту степень, а полученные степени перемножить, и 2) вместо того чтобы некоторую величину возводить в степень, являющуюся произведением двух элементов, эту величину можно последовательно возвести в такую степень, показателями которой являются элементы, составляющие исходный показатель.

Наконец, завышение называется *превышением* [die Erhohung], если для основания и ступени, или показателя степени, выполняется сплетение.

70. $(ab)^e = a^e b^e$.

Продукт из двух величин завышают на один штифт, завышая на этот штифт каждую величину основания по отдельности и сплетая полученные высоты.

Произведение двух величин возводят в степень, равную некоторому элементу, возводя в эту степень по отдельности каждую величину и перемножая полученные степени.

72. $a^{e_1 e_2} = (a^{e_1})^{e_2}$

Величину завышают на продукт двух штифтов, последовательно завышая основание на эти штифты.

Величину возводят в степень, показатель которой есть произведение двух элементов, последовательно возводя основание в степени, равные этим элементам.

72. Основные формулы завышения всегда справедливы, если в ступени в качестве штифта, или элемента, выступает единица.

Доказательство: 1. Имеет место

$(ab)^1 = a\ b$ (согласно 63)

$= a^1 b^1$ (согласно 63)

2. Имеет место

$a^{1 \cdot 1} = a^1$ (согласно 50 b)

$= (a^1)^1$ (согласно 63)

Итак, в случае единицы справедливы обе основные формулы завышения.

73. $= a^{bc} = (a^b)^c$

Величину завышают на продукт двух величин, последовательно завышая ее на величины, составляющие исходную степень.

Величину возводят в степень, показатель которой есть произведение двух величин, последовательно возводя основание в степени, равные сомножителям исходной степени.

Доказательство: подразделяется на две части, а именно:

a) если некоторая величина завышена на продукт величины и штифта, т.е.

$a^{be} = (a^b)^e$

b) если некоторая величина завышена на продукт двух величин, т.е.

$a^{bc} = (a^b)^c$.

a. [Доказательство] для штифтов, или основное относительно b.

1. Равенство $a^{be} = (a^b)^e$ справедливо, если b является только одним штифтом (согласно 71).

2. Если это равенство выполняется для некоторой произвольной [величины] b (допущение), то оно выполняется и для [величины] $b + e_1$, содержащей на один штифт больше (заключение); ибо

$a^{(b+e_1)e} = a^{be+e_1e}$	(согласно 52)
$= a^{be+e_1e}$	(согласно 67)
$= (a^b)^e(a^{e_1})^e$	(согласно допущению и в соответствии с 71)
$= (a^b a^{e_1})^e$	(согласно 70)
$= (a^{b+e_1})^e$	(согласно 67).

3. Итак, в соответствии с 19, это равенство справедливо в общем случае.

b. В соответствии с 73 a, справедлива основная формула объединения; поэтому, в полном соответствии с разделом 4, справедлив и закон объединения; стало быть, также справедливо $a^{bc} = (a^b)^c$ (согласно 24).

74. *Закон завышения (возведения в степень в среднем смысле).*

В любой связи величин, полученной посредством завышения, ступень, представляющую собой сумму, можно разложить, завысив основание на отдельные штуки ступени и заплетя полученные высоты. Можно также разложить ступень, представляющую собой про-

В любой связи величин, полученной посредством возведения в степень в среднем смысле, показатель степени которой является суммой, можно разложить, возводя основание в степени, показателями которых являются слагаемые, составляющие указанную сумму, и передукт ступеней, последовательно завышая основание на величины, составляющие ступень. Полученная величина, в свою очередь, является штифтовой величиной.

множить полученные таким образом степени. Можно также разложить произведение, являющееся показателем степени, последовательно возводя основание в степени, равные сомножителям указанного произведения. Полученная таким образом степень в свою очередь является элементарной величиной.

Доказательство. Непосредственно следует из № 73, в соответствии с разделом 4, и из № 68.

75. *Главная формула превышения (возведения в степень в узком смысле)*

$(ab)^c = a^c b^c$

Продукт двух величин превышают на некоторую величину, превышая каждую величину на данную ступень и сплетая полученные таким образом высоты.

Произведение двух величин возводят в степень, показателем которой является некоторая величина, возводя в данную степень каждый из сомножителей и перемножая полученные степени.

Доказательство: Для штифтов, или основное относительно c.

1. В соответствии с 72 данное равенство справедливо, если c является единственным штифтом.
2. Если это равенство справедливо для произвольной величины c (допущение), то оно справедливо и для величины $c + e$, содержащей на один штифт больше (заключение); ибо

$(ab)^{c+e} = (ab)^c \cdot (ab)^e$	(согласно 67)
$= a^c\, b^c\, a^e\, b^e$	(согласно допущению и в соответствии с 72)
$= (a^c\, a^e)(b^c\, b^e)$	(согласно 60, так как, согласно 69, место переплетение)
$= a^{c+e}\, b^{c+e}$	(согласно 67).

Итак, в соответствии с 19, данное равенство справедливо в общем случае.

76. $= (a^b)^c = (a^c)^b$

Порядок, в котором производится последовательное превышение, или возведение в степень, можно произвольно изменять.

77. *Закон превышения (возведения в степень в узком смысле)*

В любой связи величин, полученной превышением, любое основание, являющееся продуктом, можно разложить, превышая отделы, составляющие основание, на данную ступень, и сплести полученные высоты; каждую ступень, являющуюся суммой, можно разложить, превышая основание на каждую штуку ступени и сплетая полученные высоты; каждую ступень, являющуюся продуктом, можно разложить, последовательно превышая основание на отделы, составляющие ступень. Порядок последовательного превышения может быть любым. Полученная таким образом высота в свою очередь является штифтовой величиной.

В любой связи величин, полученной возведением в степень в узком смысле, основание, представляющее собой произведение, можно разложить, возводя в степень с данным показателем каждый сомножитель основания и перемножив полученные степени; любой показатель степени, являющийся суммой, можно разложить, последовательно возводя основание в степени, представляющие собой слагаемые показателя, и перемножив полученные степени; любой показатель степени, являющийся произведением, можно разложить, последовательно возводя основание в степени, являющиеся сомножителями данного показателя. Порядок, в котором производится последовательное возведение в степень, может быть произвольным. Полученная таким образом степень в свою очередь является элементарной величиной.

78. *Границы учения о величинах.*

Возвышение, или возведение в степень, представляет собой самый высокий уровень связи величин, и не может существовать никакого более высокого уровня связи величин.

Доказательство: Если бы существовал уровень связи величин, более высокий, чем возвышение (возведение в степень), то [он] должен был бы иметь место для первого отношения [den ersten Beziehung] (в соответствии с 31). Если бы имело место некоторое отношение, то – в соответствии с 31 – для более низкого уровня связи должно было бы выполняться, по крайней мере, объединение. Но для основания и ступени не имеют места ни объединение, ни перестановка; ибо, если бы имело место объединение, то было бы справедливо равенство

$$a^{(b^{c+d})} = (a^b)^{c+d},$$

однако справедливо

$$a^{(b^{c+d})} = a^{(b^c)(b^d)} = (a^{(b^c)})^{(b^d)},$$

в сравнении с этим,

$(a^b)^{c+d} = ((a^b)^c)\,((a^b)^d)$, точно так же различны a^b и b^a. Итак, для основания и ступени не имеет места [ни] объединение, [ни перестановка], поэтому не существует никакого более высокого уровня связи величин, для которого могло бы иметь место отношение, а наоборот, возвышение – самый высокий уровень связи величин.

Раздел 10

ЧЕТЫРЕ ВЕТВИ УЧЕНИЯ О ФОРМАХ

79. Учение о величинах учит нас всеобщим связям величин; поэтому оно представляет собой подлинную основу всего учения о формах, тот ствол, от которого отходят отдельные ветви. Прочие ветви могут появиться лишь тогда, когда, кроме этих общих законов связи, для каждой из них справедливы еще и частные [особые] законы.

Основные формулы, касающиеся этих частных связей, получаются из соотношений связей двух одинаковых штифтов, или элементов. Если связь двух одинаковых штифтов равна этому же штифту, т.е. справедливо $e \circ e = e$, то такую связь мы будем называть *внутренней*, а если она этому штифту не равна, т.е. имеет место $e \circ e \gtrless e$, то мы будем называть ее *внешней*.

В соответствии со сказанным, мы различаем четыре вида связи:

Внутреннее прибавление [innere Zufügung] (сложение – [die Addition]) $e + e = e$.

Внешнее прибавление [aeusere Zufügung] (сложение) $e + e \gtrless e$.

Внутреннее переплетение [innere Webung] (умножение – [die Multiplication]) $e\, e = e$.

Внешнее переплетение [aeusere Webung] (умножение) $e\, e \gtrless e$.

Тем самым мы получаем четыре ветви учения о формах:

1) *учение о понятии*, или *логику*, коль скоро $e + e = e$, $e \cdot e = e$

2) *учение о соединениях* [die Bindelehre], или систематику [Systematik] (учение о сочетаниях [die Combinationslehre]), коль скоро $e + e = e$, $e \cdot e \gtrless e$.

3) *учение о числах* [die Zahlenlehre], или *арифметику*, коль скоро $e + e \gtrless e$, $e \cdot e = e$

4) *учение о внешнем* [die Ausenlehre], или *учение о протяженности* [die Ausdehnungslehre][56*], коль скоро

$$e + e \gtrless e, e \cdot e \gtrless e.$$

Если требуется со всей определенностью подчеркнуть, что равенство справедливо только для одной из этих ветвей, то над знаком равенства ставится *b*, *i*, *z*[57*] или *a* (например, $aa = a$, что читается: *a a* для понятий равно *a*, или *a a* понятийно [равно] *a*). Если для штифтов, или элементов, выполняется внешнее добавление [die Zufügung], то такие штифты называются единицами [Einheiten][58*].

УЧЕНИЕ О ПОНЯТИЯХ, ИЛИ ЛОГИКА

ВВЕДЕНИЕ[1*]

Отцом *учения о понятиях*[1], или логики, является грек *Aristotélēs*[2*], который еще за 350 лет до Р.Х. в своем *órganon'e* сформулировал наиболее важные предложения учения о понятиях. Он же в книге *katēgoríai* рассматривает классы слов в учении о языке; в книге *perí hermēneías* – учение о предложениях; в книге *perí sophistikôn elénchōn* – ошибочные умозаключения; в восьми книгах *tôn topikôn* – рассуждения или рассудочное [reflektierende] мышление; и, наконец, в четырех книгах *tôn analytikôn* – учение о понятиях и умозаключениях, логику в нынешнем смысле[3*]. Это учение об умозаключениях, включая обращение суждений, о преобразовании фигур умозаключений и т.д. представляет собой, как говорит сам Аристотель, его собственное достижение, для которого он не обнаружил у предшествовавших философов никаких подготовительных работ[4*], и развито оно было с проницательностью, достойной восхищения. Аристотель исходит из опыта и исследует вопрос о том, как рассудок расчленяет и анализирует его; труд Аристотеля стал поэтому, как говорит Гегель, естественной историей мышления, которая сохранит свою ценность на все времена. Вывода отдельных форм умозаключений с помощью формул он не дает[5*].

После Аристотеля у его *учеников* – комментаторов: Александра Афродизийского и Боэция, из числа древних, у Авиценны и Аверроэса из числа арабов, Альберта Великого, Дунса Скота и Фомы Аквинского – из числа схоластиков, Петра Рамуса и Филиппа Меланхтона в эпоху Реформации – учение о понятиях продвинулось вперед несущественно, скорее оно все более и более увязало в бесполезных дистинкциях[6*].

---

[1] *Begriff* – понятие – происходит от корневого глагола grabh, grab, санскритское grabh, grah, литовское grèb-iù – fassen [хватать], zusammenfassen [охватывать], готское greip-an, grip-an, англосаксонское grip-an, gra-pan, древневерхненемецкое guf-an, нововерхненемецкое greifen [схватывать], zusammenfassen [охватывать]. Der Begriff, таким образом, – это то, что охвачено, сумма многих представлений.

Лишь с пробуждением философской мысли в Германии для логики снова начинается живое развитие[7*]. Сначала Хр[истиан] Вольф в своей «Логике» 1728 года попытался ввести в логику метод доказывания; но его так называемые доказательства не содержали ничего, кроме формул и фраз, которые обходили вопрос, вместо того, чтобы вносить в него ясность, которые не проясняли, а затемняли его. Они заслужили то порицание, которое им вынес Гегель в своей «Истории философии» (т. 3, с. 480)[8*].

Более значительно было то, что представил *Иммануил Кант* в своей логике 1800 года[9*]. Он, как и Аристотель, следует описываемому пути и перечисляет различные виды понятий, суждений и умозаключений, не обосновывая этого; однако здесь он стоит гораздо ниже Аристотеля, так как его толкования не всегда обладают требуемой четкостью и ясностью, поскольку он часто смешивает языковую и понятийную форму и вносит в логику предвзятые взгляды, сбивающие ее с правильного пути. В качестве примера его манеры я приведу определение, которое он дает суждению: суждение есть представление единства сознания различных представлений или представление о соотношении последних, поскольку они составляют понятие[10*]. Как пример смешения языкового и понятийного различий я укажу на различение им общих ⟨allgemeinen⟩, частных ⟨besondern⟩ и единичных ⟨einzelnen⟩ суждений, суждений категорических, гипотетических и дизъюнктивных.

Еще меньше пользы своей «Логикой» 1812 г. принес *Гегель*[11*], ошибочные умозаключения и произвольные утверждения которого нанесли науке безмерный вред. Тот, кто хочет ознакомиться с результатами существующей на сегодня логики, может найти их в «Новом Органоне» Ламберта 1764 года[12*], а также в «Логике» Твестена 1825 года[13*].

Все эти разработки логики, однако, ограничиваются перечислением уже установленных различий, вместо того чтобы их обосновывать; все они ограничиваются определениями, сформулированными словесно и потому допускающими разные истолкования, а часто являющимися неясными и неопределенными. Все они таковы, что когда с их помощью предлагается доказательство, то получается ошибочное умозаключение, так как они уже предполагают словесное доказательство того, что должно быть доказано с помощью логики. Наконец, все они упускают из виду чисто формальную сущность логики, а также то, что она есть не что иное, как часть учения о формах, или математики. Только Аристотель в этом пункте составляет замечательное исключение, и еще теперь его следует настоятельно рекомендовать каждому, кто желает отточить остроту своего мышления.

Чтобы научно обосновать учение о понятиях, или логику, мы должны вступить на новый путь, а именно на путь чистых формул, и все доказательства представить уравнениями, преобразуемыми согласно законам учения о величинах. Ибо только этот способ доказательств не предполагает никакой логики, никакой грамматики, только он в состоянии придать мышлению строгую форму, так как при этом способе каждая величина и каждое соединение обладают единственным значением, только он является общим для всего мышления, поскольку при этом каждая величина может обозначать все то, что есть или может стать предметом мышления[a].

Учение о понятиях, или логика, образует вторую ветвь учения о формах, или математики; стало быть, оно уже ссылается на определения и законы учения о величинах. Однако если предположить, что простые законы прибавления, или сложения, и переплетения, или умножения, которым каждый научился в примене-

---

[a] Профессор Шрёдер [в сочинении «Сфера операций логического исчисления», с. 1–2] отказывается от термина «величина». Для объекта логики, подлежащего соединению [с другими объектами], он вводит термин «символ класса» и обозначает его буквой. Под этим он всегда подразумевает класс или род объектов мышления. Число содержащихся в классе индивидов может быть, согласно его взгляду, и ограниченным, и неограниченным, оно может сводиться и к одному-единственному индивиду. По Шрёдеру, в языке символ класса, как правило, выражается общим именем, в последнем же случае – именем собственным.

Я не могу не признать подобное определение ошибочным. Господин Шрёдер определяет одно неизвестное – «объект логики» – с помощью трех неизвестных, а именно: «класс или род», «число» и «индивид». Каждое из этих трех неизвестных труднее определить, чем то, что они определяют, да и сами они неясны. Ибо что такое индивид? Почти все вещи в мире состоят из частей; поэтому понятие индивида не ясно и разными мыслителями понимается поразному. Кроме того, существуют такие вещи, как движение или полет, есть линии, которые делимы на части, такие делимые явления, как пространство, время и т.п. – все это вряд ли можно назвать индивидами. Тем не менее, представления и понятия о них, соответствующие области величин могут стать объектами мышления и величинами логики. И понятие класса неясно и тоже не годится для логики, ибо, например, что за класс представляет собой величина a, когда $a = aa = a$? Термин «символ» также неясен. И последнее: у предлагаемого определения отсутствует единственно важное – то, что в логике каждая величина должна иметь только одно, а не много значений. Господин, Шрёдер, прекрасный и очень проницательный математик, пришел к своему определению, потому что пожелал вывести величины логики, опираясь на интуицию, вместо того чтобы выводить их из понятия мышления («Логика», 1890, с. 4).

нии к числовым вычислениям, распространяются и на буквы, то логику можно излагать, не возвращаясь к учению о величинах.

А именно в логике также действуют все законы прибавления или сложения. Так, понятия «Карл и Генрих» и «Генрих и Карл» одинаковы; стало быть, и в логике действует закон перестановки $a + b = b + a$. Так, понятия «Карл, Генрих и Август» и «Карл вместе с Генрихом и Августом» одинаковы; стало быть, и в логике действует закон объединения, или удаления скобок $a + b + c = a + (b + c)$, т.е. действуют все законы прибавления, или сложения.

Но в логике действуют также все законы переплетения, или умножения. Ибо понятия «старый, храбрый король» и «старый король и храбрый король» одинаковы, поэтому в логике действует и закон отношения $(a + b)\, c = ac + bc$; аналогично одинаковы понятия «зеленые поля и луга» и «зеленые поля и зеленые луга» и, стало быть, действует закон $a(b + c) = ab + ac$. Одинаковы также понятия «великий человек» и «человек, который велик», стало быть, для переплетения, или умножения, также имеет место перестановка: $ab = ba$. Наконец, одинаковыми являются понятия «большое млекопитающее животное» и «большое млекопитающее, которое является животным», и, стало быть, для переплетения, или умножения, имеет место и объединение $a(bc) = abc$. Следовательно, в учении о понятиях, или логике, справедливы все законы прибавления, или сложения, и переплетения, или умножения, установленные в учении о величинах. Впрочем, в языке знак прибавления обозначается запятой или словом «и», а знак переплетения, или умножения, – определением (именем прилагательным) или определительным придаточным приложением, которое согласовано с именем существительным, обозначающим вещь, в роде, числе и падеже[14*].

Однако учение о понятиях, или логика, кроме этих общих законов прибавления и переплетения, которые у нее одинаковы [с соответствующими законами] во всех [других] ветвях учения о формах, или математики, имеет еще особые законы, благодаря которым она отличается от других ветвей. Эти особые законы логики состоят в том, что два равных, одинаковых понятия, прибавленные друг к другу или перемноженные друг с другом, дают то же самое понятие. Так, понятие «Карл и Карл» равно понятию «Карл», одинаково с ним, т.е. имеет место то, что $a + a = a$; аналогично понятие «человек, который является человеком», равно понятию «человек», т.е. имеет место $aa = a$. Логика, таким образом, есть особая ветвь учения о формах, а именно ветвь первая и самая внутренняя.

Учение о понятиях, или логика, развертывается поэтому – так же как и любая другая ветвь учения о формах – только лишь в формулах. Однако, если для какой-нибудь ветви учения о формах и необходимы многочисленные упражнения и примеры, так это именно для логики: они нужны для того, чтобы каждый смог бы научиться переводить ее законы на обычный язык и облекать их в мыслительную форму, плодотворно используя эти законы в обычном мышлении и познании. Примеры, приводимые в связи с каждым предложением [логики], служат тому, чтобы показать, каковы эти упражнения, и побудить уважаемого читателя образовывать многочисленные примеры из своей области мышления с тем, чтобы законы логики являлись для него чем-то живым, а не какими-то мертвыми формами.

Что касается развертывания учения о понятиях, то оно подразделяется на три раздела: образование понятий, образование суждений и образование умозаключений. Первый раздел, или *образование понятий*, начинается с определения, устанавливающего, что для штифтов, или элементов, $e + e = e$, $ee = e$ и $e_1e_2 = 0$[15*]; далее из этого выводится, что любая сумма или произведение одинаковых понятий, в свою очередь, является тем же самым понятием; что, в отличие от этого, произведение двух понятий, которые не имеют общего штифта, или элемента, есть нуль.

Вслед за этим выводится, что сумма двух понятий есть сумма *различных* штифтов, или элементов, содержащихся в обоих понятиях; что, в отличие от этого, произведение двух понятий есть сумма всех элементов, которые являются *общими* для обоих понятий, и на этом основании *объем* понятия определяется как сумма его элементов, а *содержание* понятия – как произведение его признаков или отличий [отличительных черт][16*].

Затем следует определение *взаимнопокрывающих*, *тождественных*, или равных, понятий, когда одно понятие равно другому; *включающихся*, или *инцидентных*, понятий, когда одно понятие есть часть [Stück][17*], входящая в другое понятие; *пересекающихся*, или *секантных*, понятий, когда два понятия содержат как общие, так и только им присущие штифты, или элементы; и *внеположных*, или *дизъюнктных*, понятий, когда два понятия не имеют ни одного общего элемента. Далее следуют определения: *всеобщности*, или *тотальности*, которая содержит все элементы, понятия *Не-а*, которое содержит все элементы, которые отсутствуют у *а*, а также *главного понятия* и *дополнения* к главному понятию. Большое число предложений служат выведению из этих определений тех свойств и законов, которым подчиняются эти понятия, что происходит строго математическим образом с помощью формул, и это демонстрирует плодотворность избранного пути.

Во втором разделе – *образование суждений* – вначале производится сведение суждения, например «Карл есть человек», к уравнению $a = xb$, где каждая величина имеет определенное значение; благодаря этому становится возможной строго научная трактовка суждений и отграничение предложений, облеченных в языковую форму, от предложений в понятийной форме. Понятие a называется понятием о вещи, или *понятием о субъекте*, а понятие b – *понятием о действии*, или *понятием о предикате*.

Что касается подразделения суждений, выведения законов для них, *образования умозаключений* и форм вывода, то всех желающих ознакомиться с предметом я должен отослать к самой логике. Здесь стоит лишь заметить, что в логику должны быть включены также суждения и умозаключения с отрицательными субъектами, так как они допускают столь же верные умозаключения, что и любое другое суждение, и что лишь благодаря их введению логика приобретает ту общность и научную четкость, которые должны быть ей присущи.

Все искусственные выражения в учении о понятиях, или логике, образуются тоже в соответствии с чисто немецкими [языковыми] формами.

Раздел 1

ОБРАЗОВАНИЕ ПОНЯТИЙ

1. *Определение.* Учение о понятиях, или логика (logikē), есть одна из частей учения о формах, и для нее справедливы следующие определения учения о величинах.

Величиной называется все, что есть или может стать предметом мышления, коль скоро оно имеет только одно, а не несколько значений. Знаком величины является *буква*. Одна и та же буква в одном и том же параграфе учения о понятиях всегда обозначает одну и ту же величину; в остальном каждая буква может обозначать любую, произвольно взятую величину. Следовательно, предложение, доказанное для некоторой буквы, справедливо для любой величины, которую может обозначать эта буква, т.е. для любой, произвольно взятой величины.

Штифтом, или *элементом*, называется величина, полагаемая в качестве исходной, которая, стало быть, не возникла посредством связывания с другими величинами. Буква e есть знак элемента. (Исходные элементы Вселенной – это созданные Богом физические тела, вечные существа и одухотворенные существа; из их комбинаций состоит вся Вселенная)[18*].

Связью [связыванием, сочленением – Knüpfung] называется любая комбинация или соединение величин, поскольку оно имеет только одно, а не много значений. Один и тот же связующий знак в одном и том же параграфе учения о понятиях всегда обозначает одну и ту же связь; в остальном связующий знак, если для него не установлено ничего другого, может обозначать произвольно взятый вид связи. Предложение, доказанное для некоторого связующего знака, справедливо поэтому для любого, произвольно взятого вида связи[19*].

Скобка есть знак того, что величины, заключенные в скобку, должны быть связаны в некоторую целостность, прежде чем их можно будет связать с величиной, находящейся вне скобки. Если налицо много величин без скобок, то они должны считаться связанными последовательно, одна за другой[20*], т.е. предполагается, что сначала первая величина связана со второй, а потом каждый раз получаемая целостность сочленена непосредственно с последующей.

Две величины называются *равными*, если в любой связи одну из них можно заменить другой без изменения данного значения. Знаком равенства является знак =. Две величины называются *неравными*, если ни в одной связи одну нельзя заменить другой, не вызвав изменения данного значения. Знаком неравенства является знак $\gtrless$[21*].

Штифтовые, или элементарные величины, т.е. величины, образованные посредством последовательного прибавления (суммирования), называются в учении о *понятиях* – понятиями (*hóros*, *katálēpsis*, *notio*, *conceptus*). Отделения, или сомножители, называются *признаками*, или отличиями (*nota*, *differentia*)[22*]. Знак прибавления (суммирования) в учении о понятиях читается «и», а знак умножения, которое здесь понимается как добавление новых признаков, читается «раз» [«mal»] [«жды»][b]; в языке признак выра-

[b] *Определение*. Понятием называется логическая величина, для которой выполняются все основные формулы логики.

Признак, или *определяющая черта* [*определение* понятия, называется отделением или сомножителем данного понятия ⟨...⟩

Определение. Различные части, составляющие понятие, образуют его содержание.

Понятие называется большим но объему или более широким по сравнению с некоторым другим понятием, если оно имеет больше элементов, чем это жается определительной формой (именем прилагательным) или определительным предложением (придаточным предложением – определением)[23*].

2. В учении о понятиях, или логике, тоже действуют основные формулы и выводимые из них законы учения о величинах; это значит, что без изменения значения:

1) каждую плюсовую и факторную скобку можно любым образом вводить или удалять, а порядок частей (слагаемых) и признаков (сомножителей) любым образом изменять[24*];
2) каждую скобку, выражающую отношение[c] можно удалить, перемножив каждую часть [каждое слагаемое] одного признака с каждой частью [слагаемым] другого[25*];
3) нуль (0) можно прибавить к любой величине (сложить с любой величиной), а единичность (1) – перемножить с любой величиной без изменения данного значения; продукт, или произведение, любой величины и нуля есть ноль;
4) результат любого соединения снова является понятием, или элементарной величиной.

3. В учении о понятиях, или логике, действуют следующие особые законы:

1) сумма и произведение двух равных штифтов (элементов) в свою очередь есть тот же самый элемент, и
2) произведение, двух различных штифтов, или элементов, есть нуль[d].

4. $e + e = e, \quad e \cdot e = e, \quad e_1 \cdot e_2 = 0.$

Понятийная сумма и понятийное произведение[26*] двух равных элементов в свою очередь есть элемент, причем тот же самый.

последнее – меньшее по объему или более узкое понятие. Понятие называется более богатым по содержанию, чем некоторое другое понятие, если оно определяется меньшим количеством признаков, и более бедным – в противном случае (Die Logik, 1890. S. 51).

[c] *Определение* 55. *Скобка* называется *факторной*, если величины в скобке перемножаются; скобка называется выражающей отношение, если величины внутри скобки связаны сложением, сама же скобка умножена на величину, находящуюся вне скобки.

Примеры. Факторная скобка: $a(bc)$; скобки, выражающие отношения, – $a(b + c)$, $(a + c)b$, $(a + b)(c + d)$ (Die Logik, 1890. S. 28).

[d] *Определение*. В любом соединении, где относительно какой-либо связки говорится, что она является логической, она заключается в скобку и тут же указывается значение этого, т.е. что заключенная в скобке связка «логическая». В «Логике», где всякая связка является логической, это указание отбрасывается как нечто само собой разумеющееся (Die Logik, 1890. S. 41).

Понятийное произведение двух различных элементов есть нуль[e].

5. Закон, относящийся к равенству, или тождеству:

$$a = a, \quad a + a = a, \quad a \cdot a = a.$$

Каждое понятие равно самому себе. Сумма и произведение двух равных [одинаковых] понятий есть то же понятие[f].

Доказательство a. Пусть $a = e_1 + e_2 + \ldots + e_n$,

тогда $a + a = (e_1 + e_2 + \ldots + e_n) + (e_1 + e_2 + \ldots + e_n)$

$= (e_1 + e_1) + (e_2 + e_2) + \ldots + (e_n + e_n)$ (согласно **2**)

$= e_1 + e_2 + \ldots + e_n$, (согласно **4**)

$= a$.

Доказательство b. Пусть $a = e_1 + e_2 + \ldots + e_n$,

тогда $a \cdot a = (e_1 + e_2 + \ldots + e_n)\,(e_1 + e_2 + \ldots + e_n)$

$$\left.\begin{array}{l} = e_1e_1 + e_1e_2 + \ldots + e_1e_n \\ + e_2e_1 + e_2e_2 + \ldots + e_2e_n \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ + e_ne_1 + e_ne_2 + \ldots + e_ne_n \end{array}\right\} \text{(согласно 2 или № 50 учения о величинах)}$$

$= e_1e_1 + e_2e_2 + \ldots + e_ne_n$ (согласно **4**, так как $e_1e_2 = 0$)

$= e_1 + e_2 + \ldots + e_n$ (согласно **4**, так как $e \cdot e = e$)

$= a$.

Примеры. Понятие человека не изменится, если я присоединю к нему понятие человека, – оно остается тем же понятием человека.

Аналогично, человек, который есть человек, есть не что иное, как человек: иначе говоря, понятие человека не изменится, если ввести определение, что человек должен быть человеком, – оно остается тем же понятием человека.

---

[e] *Предложение* 51. $e_1 + e_2 \gtrless 0$ (Die Logik, 1890. S. 27).

[f] *Предложение* 50. Допущение: $a + b = 0$, следствия: $a = 0$ и $b = 0$ ⟨...⟩

Доказательство. Имеет место

$a = a + 0$	[по свойству нуля]
$= a + (a + b)$	согласно допущению
$= (a + a) + b$	[в силу ассоциативности сложения]
$= a + b$	[в силу № 5]
$= 0$	(согласно допущению).

[Аналогично доказывается и следствие $b = 0$]. (Die Logik, 1890. S. 27).

Гербарт выражает это предложение так: «Два понятия не могут быть совершенно одинаковы [равны], но каждое наличествует как бы только в единственном экземпляре. Однако в мышлении одно и то же понятие может повторяться; его можно вызывать много раз, при самых различных обстоятельствах, воспринимать исходящим от бесчисленных разумных существ, и в результате этого не происходит воспроизведения понятия во множестве экземпляров». «Введение в философию», 4-е издание, § 35[27*].

6. $S_{1,n}a = a \qquad P_{1,n}a = a.$

Каждая сумма и каждое произведение равных понятий в свою очередь являются понятием, причем тем же самым.

Доказательство a. Поступательное, или индуктивное, относительно $S_{1,n}a$.

1. Если $S_{1,n}a$ содержит только две части [два слагаемых], то $a + a = a$ (согласно **5**)[28*].

2. Если $S_{1,n}a$ содержит n частей [слагаемых], то, поскольку $S_{1,n}a = a$ (допущение), окажется что и $S_{1,n}a + a = a$ (заключение); ибо:

$$S_{1,n}a + a = a + a \qquad \text{(согласно допущению)}$$

$$= a \qquad \text{(согласно 5)}$$

3. Стало быть, предложение в соответствии с № 18 учения о величинах справедливо для всех сумм $S_{1,n}a = a$.

Доказательство b. Совершенно аналогично п. 2 получаем, что $P_{1,n}a = a$.

7. (Закон противоречия). Если a и b не имеют ни одного общего штифта (элемента), то имеет место:

$$a \cdot b = 0.$$

Произведение двух понятий, у которых нет ни одного общего элемента, есть нуль.

Доказательство. Поскольку понятия a и b не имеют ни одного общего элемента, то положим

$$a = e_1 + e_2 + \ldots + e_n \qquad b = e_1' + e_2' + \ldots e_m',$$

где все элементы различны; тогда имеем:

$$a \cdot b = (e_1 + e_2 + \ldots + e_n)(e_1' + e_2' + \ldots + e_n')$$

$$\left.\begin{aligned} &= e_1e_1' + e_1e_2' + \ldots + e_1e_m' \\ &+ e_2e_1' + e_2e_2' + \ldots + e_2e_m' \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &+ e_ne_1' + e_ne_2' + \ldots + e_ne_n' \end{aligned}\right\} \quad \text{(согласно 2 или № 50 учения о величинах)}$$

$$= 0 \qquad \text{(согласно 4)}$$

Пример. Жук, который является млекопитающим, – это ничто; аналогично, животное, являющееся растением, – это ничто, и таково же млекопитающее, являющееся рыбой. Поэтому кита (Balaena L.)[29*] нельзя назвать китрыбой – Wallfisch, а черепаху – Schildkröte нельзя назвать жабой – Kröte и т.д. Множество искусственно образованных выражений и названий нуждаются, поэтому, в преобразовании, так как в выражаемых ими понятиях содержится противоречие. В томе моей «Системы знания», в котором рассматривается описание природы[30*], все эти ошибочные названия удалены и вместо них введены названия, которые построены правильно.

8. Сумма двух понятий есть сумма всех различных штифтов, или элементов, в этих понятиях содержащихся[g], или:

Если c обозначает сумму тех элементов из b, которые не содержатся в a, а принадлежат только b, то $a + b = a + c$, и наоборот, если $a + b = a + c$, то все элементы, которые не содержатся в a,

[g] *Предложение* 52. В логических науках, поскольку суммируются одинаковые величины, не может быть никакого вычитания и никаких отрицательных величин.

Доказательство. Допустим такую отрицательную величину a, что $a - a = 0$ (допущение); мы получим:

$a = a + 0$ [по свойству нуля]
$= a + (a - a)$ (согласно допущению)
$= (a + a) - a$ [по ассоциативности сложения]
$= (a - a)$ (согласно № 5)
$= 0$ (согласно допущению).

Все математики, трактовавшие логику с помощью формул, – все, кроме Р. Грассмана, – вводили в логику вычитание и отрицательные величины. Однако это введение было чревато заблуждениями и открывало путь каким угодно логическим ошибкам, например, отождествлению любой величины a с любой, произвольно выбранной величиной b, так как согласно предложению 52 получалось, что $a = 0 = b$. Вдобавок к этому согласно 52 все величины логики становились нулями. Следовательно, получалось, что по своей силе логика есть нуль, т.е. что она вообще несостоятельна. Введение в логику отрицательных величин воэтому недопустимо с научной точки зрения (Die Logik, 1890. S. 27)[31*].

а принадлежат только либо величине b, либо величине c, являются общими обеим величинам b и c[32*].

Примеры. Понятие «необразованные и безнравственные люди» охватывает в точности те же самые существа, что и понятие «необразованные [и] безнравственные образованные люди». [Понятие] «Имущие и знатные» охватывает в точности тех же людей, что и «имущие и неимущие знатные».

Доказательство. Если понятие d содержит все элементы, которые являются общими для a и b, и никаких других, то положим:

$$a = a_1 + d \qquad b = d + c,$$

где a_1, d и c не имеют общих элементов; тогда имеем:

$$\begin{aligned} a + b &= (a_1 + d) + (d + c) \\ &= a_1 + (d + d) + c && \text{(согласно 2)} \\ &= a_1 + d + c && \text{(согласно 5)} \\ &= a + c && \text{[согласно допущению]} \end{aligned}$$

9. Произведение двух понятий есть сумма всех штифтов, или элементов, общих обоим понятиям. Если понятия a и b имеют общую часть [слагаемое] c, а других общих частей не имеют, то $ab = c$, и наоборот.

Если $ab = c$, то понятия a и b имеют общую часть c и не имеют никаких общих элементов, кроме тех, что содержатся в c.

Пример. Художники, которые являются поэтами; млекопитающие, которые имеют плавники, т.е. плавниковые, или киты. Сюда же относятся все отличительные черты, передаваемые прилагательными; последние выражают тем более тонкие характерные черты, чем меньшим является круг, который охватывает обе сферы, например, «моложавый старец» или «мудрый юноша». Если хотят обозначить нечто неподобающее или удивительное, то охотно прибегают к наименованиям, которые кажутся полностью исключающими сами себя; так, к людям применяют слово «нечеловек», «ангел» или названия животных: корова, петух, голубь.

Доказательство. Пусть понятие c содержит все элементы, которые являются общими для a и b, и никаких других; тогда положим:

$$a = a_1 + c \qquad b = b_1 + c,$$

где a_1, b_1 и c не имеют общих элементов; тогда

$$
\begin{aligned}
a \cdot b &= (a_1 + c)(b_1 + c) & \\
&= a_1 b_1 + a_1 c + c b_1 + cc & \text{(согласно \textbf{2})} \\
&= cc & \text{(согласно \textbf{7})} \\
&= c & \text{(согласно \textbf{5})}
\end{aligned}
$$

10. $$a + ab = a$$

К каждому понятию без изменения его значения можно прибавить произведение, в котором упомянутое понятие является признаком, и:

сумма понятия и произведения, в котором это понятие является признаком, равна этому понятию[h].

Доказательство. Непосредственно из **9** и **5**.

11. *Определение*. Различные части [слагаемые], которые содержатся в некотором понятии, образуют его объем (*periochē, complexus, summa*), а признаки, которые определяют понятие, – его содержание (*pretium*).

Объем понятия называется *более широким*, или *большим* (major), чем объем другого понятия, если оно содержит больше штифтов, или элементов, чем последнее; он называется *более узким*, или меньшим (minor), если он содержит их меньше. Содержание понятия называется *более богатым*, чем содержание другого, если оно определено с помощью большего числа признаков, и более бедным, если оно определено с помощью меньшего числа таковых.

Более широкое понятие беднее, чем более узкое; более богатое у́же, чем более бедное.

Примеры. Животное царство шире понятия «позвоночное животное», «позвоночное животное» – более широкое понятие, чем «млекопитающее животное», «млекопитающее животное» – более широкое понятие, чем «копытное», «копытное» – более широкое понятие, чем «лошадь», а «лошадь» более широкое понятие, чем «животное, называемое ослом». Наоборот, «осел» есть более богатое понятие, чем «лошадь»; ибо осел есть лошадь с черным крестом на спине [Kreuz auf dem Rücken] и с пучком волос на конце хвоста. Аналогично, «лошадь» есть более богатое понятие, чем «копытное»; ибо лошадь есть непарно-

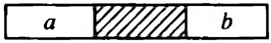
---

[h] [Двойственно] *Предложение* 80.

$a = a(a + b)$.

Доказательство непосредственно на основании [№ 8] и [№ 5].

Наглядное представление $a = a + ab$ (Die Logik, 1890. S. 52):

$a = a + ab$ 

$a(a + b)$

копытное. А «копытное» – более богатое понятие, чем «млекопитающее», и т.д.

12. *Определение*. Два понятия называются:

1) *покрывающими друг друга – взаимнопокрывающими, тождественными понятиями* (*n*[*omina*] *identicae s*[*ive*][33*] *aequipollentes*), если они равны, обозначение: $a = b$.

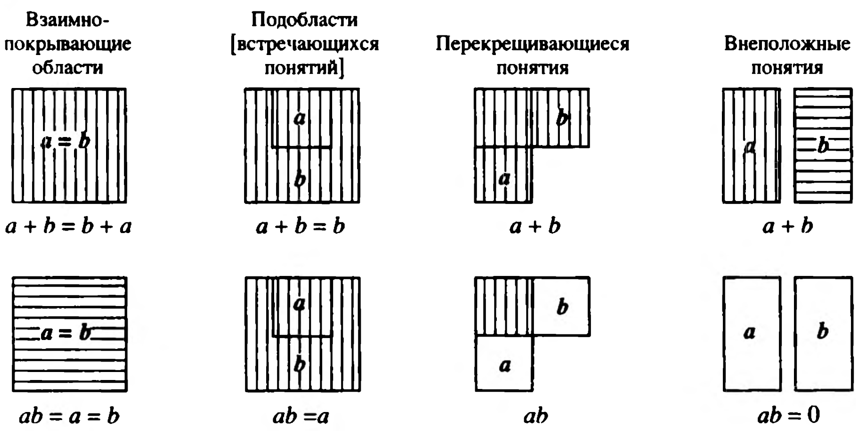
2) *встречающимися понятиями*[34*], *инцидентными понятиями* (*n. incidentes s. subordinatae*), если одно является частью [слагаемым] другого, обозначения: $a < b$ (читается: a ниже b) или $b > a$ (читается: b выше a). Сумма b называется *более высоким* или *более широким* понятием (*n*[*omen*] *superior, latior*), а часть [слагаемое] a называется *более низким* или *более узким* понятием (*n. inferior, angustior*).

3) *пересекающимися понятиями* (*n. secantes*), если оба имеют частью общие друг другу, а частью различные, присущие только каждому из них в отдельности штифты, или элементы. Общие элементы образуют общее для обоих понятий (*n*[*omen*] *communis*), различные элементы – понятия, присущие только каждому из них (*n*[*omena*] *propria*)[35*]. Сумма всех элементов, принадлежащих обоим пересекающимся понятиям, составляет соединенное ⟨verbindender⟩ понятие.

4) *внеположными, дизъюнктными понятиями* (*n*[*omina*] *disjunctae*), если у обоих нет ни одного общего им элемента. Внеположные понятия образуют исключающую (conträrer) противоположность, пересекающиеся понятия – частичную (disparater) противоположность[i]).

---

[i] *Наглядное изображение* областей понятий



(Die Logik, 1890. S. 53).

Пример. Понятия «человек» и «млекопитающее, наделенное разумом», а также «Луна» и «спутник Земли» являются покрывающими друг друга, тождественными понятиями.

Понятия «болотная птица» и «аист», а также «гусь» – «домашний гусь» и «фиалка» – «ночная фиалка» являются встречающимися понятиями (инцидентными понятиями), а именно в первом примере «болотная птица» является более высоким, «аист» – более низким понятием.

Аналогично «земледелец» и «кавказец» являются пересекающимися (секантными) понятиями, ибо среди земледельцев много таких, которые не являются кавказцами, например, китайцы, а среди кавказцев много таких, которые не являются земледельцами. Каждое из этих двух понятий содержит, следовательно, только ему присущую часть [слагаемое], при этом большая часть кавказцев являются земледельцами, и, стало быть, оба понятия имеют также и общую часть [слагаемое].

Наконец, «насекомое» и «позвоночное животное», «животное» и «растение» являются внеположными (дизъюнктными) понятиями.

Примечание. В случае встречающихся (инцидентных) понятий более высокое понятие обыкновенно называют также родом (*génos, genus*), а более низкое понятие – видом (*eîdos, species*); однако оба названия в науке о природе, или естествознании, получили уже более узкое значение, поэтому здесь должны быть отвергнуты.

13. *Сумма* двух взаимнопокрывающих (тождественных) понятий есть то же самое понятие; сумма двух встречающихся (инцидентных) понятий есть более высокое понятие; сумма двух пересекающихся (секантных) понятий есть соединенное понятие; сумма двух внеположных (дизъюнктных) понятий есть сумма всех элементов, принадлежащих обоим понятиям.

Доказательство. Непосредственно из **5** и **8**.

Пример. Так, сумма «человек и наделенное разумом млекопитающее» равна понятию «человек»; сумма «болотная птица и аист» равна понятию «болотная птица»; сумма «земледелец и кавказец» равна понятию «земледелец и кавказец, не занимающийся хлебопашеством»; сумма «животное и растение» равна понятию «животные и растения, или то, что совпадает с многоклеточными существами».

14. Любая часть – слагаемое суммы – равна или подчинена сумме.

15. $[a + b = b] \doteq [a \leq b]$[36*].

К каждому понятию без изменения его значения можно прибавить взаимнопокрывающее или подчиненное ему понятие и:

Каждое понятие, которое, будучи прибавленным к некоторому другому понятию, не меняет значения последнего, является для него взаимнопокрывающим или подчиненным.

Доказательство. Непосредственно из **5** и **8**.

Примеры. В связи с первым предложением смотри примеры к параграфу **13**. Если понятие «люди и одухотворенные существа» равно понятию «одухотворенные существа», то «люди» и «одухотворенные существа» либо покрывают друг друга (являются тождественными), либо «люди» составляют некоторый вид «одухотворенных существ». Если понятие «болотные птицы и длинноногие птицы» равно понятию «птица, имеющая длинные ноги», то «болотная птица» и «птица, имеющая длинные ноги» либо покрывают друг друга (являются тождественными), либо «болотные птицы» составляют вид «птиц, имеющих длинные ноги».

16. Если $a + b = b$, то $ab = a$.

Если сумма двух понятий равна одному из этих понятий, то произведение обоих понятий равно другому понятию[j].

Доказательство. $ab = a(a + b)$	(согласно допущению)
$= aa + ab$	(согласно **2**)
$= a + ab$	(согласно **5**)
$= a$	(согласно **10**)

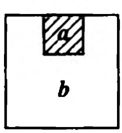
17. ***Произведение*** двух взаимнопокрывающих (тождественных) понятий есть то же самое понятие; произведение двух встречающихся (инцидентных) понятий есть более низкое понятие; произведение двух пересекающихся (секантных) понятий есть

---

[j] [Имеет место и обратное] *Предложение 81*. Допущение: $a + b = b$, следствие $a \cdot b = a$

Доказательство: $a + b = ab + b$	(согласно допущению)
$= ab + bb$	[согласно № 5]
$= (a + b)b$	[согласно № 2]
$= b$	

Наглядное представление:



(Die Logik, 1890. S. 39).

часть [слагаемое], общая обоим понятиям; произведение двух внеположных (дизъюнктных) понятий есть нуль.

Доказательство. Непосредственно из **5**, **9** и **7**.

Примеры. Земля, которая есть планета, населенная людьми, есть Земля. Водоплавающая птица, которая является гусем, есть гусь. Женщина, которая является героиней, есть героическая женщина; столяр, который является мастером, есть мастерский столяр. Животного, которое было бы растением, не существует.

18. Произведение равно или подчинено каждому признаку (*ist gleich oder untergeordnet*).

19. $[a = a \cdot b] \doteq [a \leq b]$, или:

каждое понятие не меняет своего значения, если в качестве определяющего признака использовать взаимнопокрывающее или подчиненное ему понятие и:

понятие, которое определяет некоторое другое понятие, но не изменяет его значения, является в отношении него взаимнопокрывающим или подчиненным.

Доказательство. Непосредственно из **5** и **9**.

Примеры. [Понятие] «человек, который является одухотворенным существом», равно понятию «человек», поэтому [понятия] «человек» и «одухотворенное существо» либо покрывают друг друга (являются тождественными), либо человек есть вид одухотворенных существ. Поскольку «живописец, который работает с цветом и красками» равен «живописцу», постольку понятия «живописец» и «тот, кто работает с цветом и красками» либо покрывают друг друга (являются тождественными), либо «живописец» есть некоторый вид «тех, кто работает с цветом и красками». Но помимо последнего существуют и другие виды [людей, занятых той же работой], например, «оптики». В обычной логике встречающиеся и взаимнопокрывающие понятия, с помощью которых можно определить некоторое понятие, называются родственными, совместимыми или согласующимися понятиями (*n. affines, convenientis, consentientis*). А внеположные (дизъюнктные) и пересекающиеся понятия, с помощью которых нельзя охарактеризовать понятие, так как их продукт становится другим понятием, называются противными понятиеми (*n. contrariae s. contrarie oppositae*)[37*].

20. $[a + b = b] \dot{+} [ab = b] \doteq [a \dot{+} b]$.

Если понятие, которое, будучи прибавлено к некоторому другому понятию и определяя его, не изменяет это понятие, то оно с этим понятием является взаимнопокрывающим, или ему тождественным[38*].

Доказательство. Поскольку $b = a + b$ [допущение, или первая посылка]

$a = ab$	(согласно 16)
$= a$	согласно допущению [вторая посылка]

Примеры. «Болотная птица и птица, имеющая длинные ноги» есть «болотная птица», и «болотная птица, которая имеет длинные ноги», есть «болотная птица»; стало быть, понятия «болотная птица» и «птица, имеющая длинные ноги» равны, или тождественны[k].

21. Если из двух понятий первое подчинено второму и, кроме того, второе подчинено первому, то оба понятия покрывают друг друга, или являются тождественными, или

$$[a < b] \dot{+} [b < a] \doteq [a = b].$$

Доказательство[39*]. Если $a < b$, то $a + b = b$; если $b < a$, то $a + b = a$ (согласно **15**), следовательно, $b = a + b = a$.

22. Из понятия a получается подчиненное, или более узкое, понятие, если a определить с помощью подчиненного ему либо пересекающегося с ним понятия b, или перемножить a с таким понятием; или:

$ab < b$, если $a < b$[l], или если a и b являются перекрещивающимися понятиями[40*].

Доказательство. Непосредственно из **17**.

Примеры. Из понятия «земное существо и существо одухотворенное» получается более узкое понятие «земное одухотворенное существо», из понятия «существо, обладающее стеблем и являющееся растением» получается более узкое понятие «стеблевое растение».

В науке это соотношение часто используется, чтобы из простого родового названия с помощью некоторого пересекающегося с ним понятия образовывать сложные видовые названия. Так, из «живущих на деревьях» и «жаворонка» образуется название «жаворонок, живущий на деревьях», из «хохлатой птицы» и «зяб-

---

[k] *Предложение* 85. *Закон логически противоположного отношения*: $(a + b)c = ac + bc$; $ab + c = (a + c)(b + c)$.
[Доказывается путем использования № 2 и № 5]. (Die Logik, 1890).

[l] *Предложение 177.* Если $a < u$, то $ac < u$, каким бы ни было понятие c.
Предложение 178. Если $a < u$, то $a < u + c$, каким бы ни было понятие c (Die Logik, 1890). [Доказательство этих теорем мы предоставляем читателю.]

лика» – «хохлатый зяблик», из «паровой машины» и «судна» – «паровое судно» и т.д.

23. Ни одно понятие нельзя определить [указав его отличительные черты], с помощью внеположного, или дизъюнктного, понятия и:

если продукт, или произведение, двух понятий есть нуль, то эти понятия внеположны, или дизъюнктны.

Доказательство. Непосредственно из **17**.

24. *Определение.* Сумма всех штифтов, или элементов, называется всеобщностью, или *тотальностью.* Ее знаком является Т.

25. Всеобщность, или тотальность, есть наивысшее понятие, которому подчинены все понятия, или:

Каким бы ни было понятие a, имеет место

$$a + \mathrm{T} = \mathrm{T}, \quad a\mathrm{T} = a.$$

Доказательство. Поскольку всеобщность содержит вообще все элементы, постольку она содержит все элементы любого понятия a; следовательно, также

$a < \mathrm{T}$	(согласно **14**), следовательно,
$a + \mathrm{T} = \mathrm{T}$	(согласно **15**) и
$a\mathrm{T} = a$	(согласно **19**).

26. Нуль есть наинизшее понятие, которое подчинено всем понятиям, или:

Каким бы ни было понятие a, имеет место

$$a + 0 = a, \quad a \cdot 0 = 0.$$

Доказательство. $a + 0 = a$ (согласно **2**), следовательно, также $a \geq 0$ (согласно **15**).

27. *Определение.* Если сумма двух внеположных (дизъюнктных) понятий есть всеобщность, то одно из них называется *отрицанием*, или *негацией* (*negatio, contradictio*) другого. Отрицание, или негация, некоторого понятия обозначается горизонтальной чертой, которая ставится над этим понятием; например, отрицание [понятия] a обозначается $\bar{a}$ (читается: не-a). Отрицание, или негация, называется также *отрицательным* понятием, а неотрицаемое понятие – *положительным*, или самим собой.

Каждое понятие и его отрицание образуют *строгую* (*contradictorischer*) *противоположность.*

Примеры. Отрицание, или негация, понятия «бытие» есть «небытие»; отрицание [понятия] «человек» есть «нечеловек», отрицание «я» есть «не-я».

28. $$a+\bar{a}=\mathrm{T}, \quad a\bar{a}=0.$$

Для любого понятия сумма, состоящая из него и его отрицания, есть всеобщность; произведение, состоящее из него и его отрицания, есть нуль[m].

Примеры. Начиная с Гегеля, естественный – или, скорее, неестественный – характер приобрела манера говорить о конечной бесконечности[42*] – так, будто эта бессмыслица имеет какой-то смысл. Бесконечное есть отрицание, или негация, конечного. То есть, если оно должно обозначать то, чему нельзя положить никакого предела, никакого ограничения, то это есть нечто, не ограниченное ничем, или неопределенное. У него, поэтому, нельзя указать никакой отрицательной черты и, значит, о нем вообще нельзя ни мыслить, ни говорить. Если же, в отличие от этого, бесконечное обозначает только отрицание конечного в отдельной сфере (например, пространство, время, скорость или количество движения), то оно вполне оправдано, но только относится оно тогда к §§ 99 и 100, или к областям главного понятия[43*].

29. $$\mathrm{T}=0, \quad 0=\mathrm{T}.$$

Отрицание всеобщности есть нуль, отрицание нуля есть всеобщность, или:

отрицание тотальности есть нуль, отрицание нуля есть тотальность.

---

[m] *Предложение* 74. В логике нет деления и дробей (частного).

Доказательство. Если мы допустим дробь $1/a$, для которой $a \cdot 1/a = 1$ (допущение), то получится:

$a = a \cdot 1$	[согласно № 25, где 1 есть T]
$= a \cdot (a \cdot 1/a)$	(согласно допущению)
$= (a \cdot a) \cdot 1/a$	[согласно № 5]
$= a \cdot 1/a$	
$= 1.$	

Все математики, трактовавшие логику с помощью формул, – все, кроме Р. Грассмана, – вводили в нее деление и дроби. Здесь они впадали в ошибку. С одной стороны, они допускали любые ошибочные умозаключения, так как после введения деления каждая величина становилась равной любой другой, так как, согласно предложению **74**, $a = 1 = b$, какими бы величинами ни были a и b. Получается, что логика тогда имеет дело только с единицей, значит, она вообще недееспособна. Наконец, если все эти математики допускают как деление, так и вычитание, то все величины логики становятся равными и нулю и единице; а поскольку $1 \gtrless 0$, это невозможно. Поэтому введение в логику вычитания и деления недопустимо (Die Logik, 1890. S. 35)[41*].

Доказательство. Имеет место

$T + 0 = T$ (согласно **2**)

$T \cdot 0 = 0,$ (согласно **2**),

следовательно, $\overline{T} = 0$ и $\overline{O} = T$ (согласно **28**)[44*].

30. Закон исключенного среднего (*principium exclusi medii*):

$a \leq u + \overline{u}.$

Каждое понятие подчинено сумме любого другого понятия и его отрицания.

Это предложение обычно формулируется так: *a* есть либо *u*, либо не-*u*. Однако эта форма данного закона ошибочна, так как любое понятие, которое подчиняется *u* или с ним пересекается, не подпадает ни под *u*, ни под не-*u*.

Доказательство. $a \leq T$ (согласно **25**)

$\leq u + \overline{u}$ (согласно **28**).

31. Все отрицания, или негации, одного и того же понятия равны друг другу, или для каждого понятия существует только одно отрицание, только одна негация[45*].

Доказательство. Пусть $\overline{a}$ и $\overline{a}_1$ – два отрицания, или негации, понятия *a*; тогда:

$\overline{a} = \overline{a}T$ (согласно **25**)

$= \overline{a}(a + \overline{a}_1)$ (согласно **28**)

$= \overline{a}a + \overline{a}\overline{a}_1$ (согласно **2**)

$= \overline{a}\overline{a}_1$ (согласно **28**, так как, $\overline{a}a = 0$),

и, аналогично, $\overline{a}_1 = (\overline{a}\overline{a}_1) = \overline{a}$.

32. Отрицание отрицания, или негация негации, некоторого понятия *a* есть снова это понятие, или

$\overline{\overline{a}} = a.$

Доказательство. $\overline{a} = \overline{a}T$ (согласно **25**)

$= \overline{\overline{a}}(a + \overline{a})$ (согласно **28**)

$= \overline{\overline{a}}a + \overline{a}\overline{a}$ (согласно **2**)

$= \overline{\overline{a}}a$ (согласно **28**),

и, аналогично[46*], $a = (\overline{\overline{a}}a) = \overline{\overline{a}}$.

Примеры. Каждое существо, которое не является бесконечным, является конечным; каждое существо, которое не есть не-человек, есть человек; все, что не есть не-я, есть я[n].

33. $$[au=0] \doteq [u \leq \bar{a}] \text{ и } \doteq [a \leq \bar{u}]$$

Каждое понятие [u] равно или подчинено отрицанию внеположного ему понятия [a] (или подчинено негации дизъюнктного с ним понятия [a]), а также:

если некоторое понятие [u] равно или подчинено отрицанию некоторого другого понятия [a], то оно внеположно, или дизъюнктно понятию a[47*].

Доказательство a.

$$u = u\mathrm{T} \quad \text{(согласно } \mathbf{25}\text{)}$$
$$= u(a+\bar{a}) \quad \text{(согласно } \mathbf{28}\text{)}$$
$$= ua + u\bar{a} \quad \text{(согласно } \mathbf{2}\text{)}$$
$$= u\bar{a}; \quad \text{(согласно допущению, что } ua = 0\text{)};$$

стало быть, [на основании **19**] $u \leq \bar{a}$; аналогично доказывается $a \leq u$.

Доказательство b. Если $u \leq a$, то имеет место $\bar{a} = \bar{a} + u$ (согласно **15**); стало быть,

$$0 = a\bar{a} \quad \text{(согласно } \mathbf{28}\text{)}$$
$$= a(\bar{a} + u) \quad \text{(согласно } \mathbf{15}\text{)}$$
$$= a\bar{a} + au \quad \text{(согласно } \mathbf{2}\text{)}$$
$$= au. \quad \text{(согласно } \mathbf{28}\text{)}.$$

Примеры. Так, растение есть не-животное; так, тот, к кому я обращаюсь, есть не-я; так, становление не есть небытие.

34. $$[a \leq u] = [a\bar{u} = 0].$$

Если некоторое понятие равно или подчинено другому понятию, то оно внеположно его отрицанию (негации).

Доказательство[48*]. Непосредственно на основе **33**.

---

[n] *Предложение* 73. Допущение: $ab = \mathrm{T}$, следствия: $a = \mathrm{T}$, $b = \mathrm{T}$

Доказательство: $a = a \cdot \mathrm{T}$ [согласно **25**]
$= a \cdot (a \cdot b)$ (согласно допущению)
$= (a \cdot a) \cdot b$ [согласно **2**]
$= \mathrm{T}$. (согласно допущению).

(Die Logik, 1890. S. 35).

Примеры. Понятие «лошадь» подчинено понятию «копытное», поэтому понятия «лошадь» и «некопытное» внеположны, или дизъюнктны. Так, наличное бытие подчинено бытию, стало быть, наличное бытие и небытие внеположны, или дизъюнктны. Так, «человек» подчинен «одухотворенному существу», поэтому человек и неодухотворенное существо внеположны, или дизъюнктны[o].

35. Отрицания, или негации, взаимнопокрывающих (тождественных) понятий покрывают друг друга; отрицания соподчиненных (инцидентных) понятий являются соподчиненными понятиями, а именно отрицание более высокого понятия подчинено отрицанию более низкого понятия:

$$[a = u] \doteq [\bar{a} = \bar{u}]$$

$$[a < u] \doteq [\bar{u} \leq \bar{a}]$$

Доказательство a. Если $a = u$, то как $\bar{a}$, так и $\bar{u}$ являются отрицаниями a; стало быть, $\bar{a} = \bar{u}$ (согласно **31**).

Доказательство b. Если $a < u$, то $a + u = u$ (согласно **15**); поэтому

$$\begin{aligned} 0 &= \bar{u}u && \text{(согласно 28)} \\ &= \bar{u}(a+u) && \text{(согласно 15)} \\ &= \bar{u}a + \bar{u}u && \text{(согласно 2)}^{49*} \\ &= \bar{u}a && \text{(согласно 28);} \end{aligned}$$

следовательно, $\bar{u} \leq \bar{a}$ (согласно **33**).

Примеры. Растения и растительность покрывают друг друга, или тождественны; стало быть, нерастения и нерастительность покрывают друг друга, они тождественны. Но понятие о моем «я» подчинено понятию «человек», стало быть, понятие «не-человек» подчинено понятию «не-я». [Понятие] «человек» подчинено [понятию] «одухотворенное существо», следовательно, «неодухотворенное существо» подчинено «нечеловеку», то есть [понятие] «нечеловек», кроме «неодухотворенных существ», включает еще все неземные одухотворенные существа.

Аналогично, абсолютное бытие подчинено бытию, и именно поэтому небытие подчинено отрицанию абсолютного бытия; отрицание абсолютного бытия охватывает кроме небытия также и

---

[o] *Предложение* 116. $[ab = 0] \doteq [b < \bar{a}]$ и $[ab = 0] \doteq [a < b]$.

Предложение 117. $[\bar{a}b = 0] \doteq [a < b]$ и $[ab = 0] \doteq [\bar{a} < b]$.

(Die Logik, 1890. S. 55) [Мы предоставляем доказательства этих теорем читателю.]

чистое бытие. Этого не заметил Гегель в своей «Логике»[50*]. Он объявляет чистое бытие, с одной стороны, отвечающим некоторому роду бытия, а с другой стороны, – понятием, подчиненным небытию или некоторому виду небытия. Однако это заблуждение. Хотя чистое бытие и подчинено отрицанию абсолютного бытия, оно не подчинено небытию, а наоборот, подчиняет его; поэтому чистое бытие подчинено не небытию, а напротив, внеположно, или дизъюнктно, ему[р]

36. $$[a < u] + [\bar{a} < \bar{u}] \doteq [a = u].$$

Если отрицание, или негация, более низкого понятия подчинено отрицанию более высокого понятия, то оба понятия покрывают друг друга, или тождественны.

Пример. Конь подчинен лошади, а не-конь подчинен не-лошади; стало быть, конь и лошадь тождественны.

Доказательство: Поскольку $\bar{a} < \bar{u}$, поскольку и $u < a$ (согласно **35**); стало быть, вместе получается $[a < u] + [u < a] \doteq [a = u]$ (согласно **21**)[ч].

37. $$a + u + \bar{a}\bar{u} = \mathrm{T}.$$

Для любых двух понятий сумма этих понятий и произведения их отрицаний равна всеобщности, или:

[р] *Предложение* 97. Допущение $(a + \bar{b}) + (\bar{a} + b) = \mathrm{T}$; следствие $a = b$.

Доказательство: Если $(a + \bar{b}) + (\bar{a} + b) = \mathrm{T}$, то $(a + \bar{b}) = \mathrm{T}$ и $(\bar{a} + b) = \mathrm{T}$ [в силу свойства тотальности]; тогда:

$a = a \cdot \mathrm{T}$
$= a \cdot (\bar{a} + b)$
$= a\bar{a} + ab$ [согласно № 2]
$= ab$ [согласно № 28]
$= ab + \bar{b}b$ [согласно № 28]
$= (a + \bar{b})b$ [согласно № 2]
$= b$ [согласно второму допущению из № 5]

[Аналогично доказывается:] *Предложение* 98. Допущение: $ab + \bar{a}b = 0$, следствие: $a = b$ (Die Logik, 1890. S. 44).

[ч] *Предложение* 101. $a0 + b = ab + ab + \bar{a}b$

Доказательство: $a + b = a \cdot \mathrm{T} + \mathrm{T} \cdot b$ [согласно № 25]
$= a(b + \bar{b}) + (a + \bar{a}) \cdot b$ [согласно № 28]
$= ab + a\bar{b} + ab + \bar{a}b$ [согласно № 2]
$= ab + a\bar{b} + \bar{a}b$ [согласно № 5]

(Die Logik, 1890).

для любых двух понятий сумма, состоящая из обоих понятий и произведения их отрицаний, равна тотальности.

Доказательство:

$\mathrm{T} = \mathrm{TT}$	(согласно **5**)
$= (a+\bar{a})(u+\bar{u})$	(согласно **28**)
$= au + a\bar{u} + \bar{a}u + \bar{a}\bar{u}$	(согласно **2**)
$= au + au + a\bar{u} + \bar{a}u + \bar{a}\bar{u}$	(согласно **5**)
$= a(u+\bar{u}) + (a+\bar{a})u + \bar{a}\bar{u}$	(согласно **2**)
$= a\mathrm{T} + \mathrm{T}u + \bar{a}\bar{u}$	(согласно **28**)
$= a + u + \bar{a}\bar{u}$	(согласно **25**).

38. $$[au = 0] \doteq [\bar{a} + \bar{u} = \mathrm{T}].$$

Сумма отрицаний двух внеположных понятий (отрицаний двух дизъюнктных понятий) есть всеобщность, и наоборот, если сумма двух понятий есть всеобщность, то отрицания понятий внеположны[51*].

Доказательство **a.** Если $au = 0$, то имеем

$\mathrm{T} = \bar{a} + \bar{u} + au$	(согласно **37**)
$= \bar{a} + \bar{u}$	(согласно допущению).

Доказательство **b.** *Если* $\bar{a} + \bar{u} = \mathrm{T}$, то имеем

$a = a\mathrm{T}$	(согласно **25**)
$= a(\bar{a} + \bar{u})$	(согласно допущению)
$= a\bar{a} + a\bar{u}$	(согласно **2**)
$= a\bar{u}$	(согласно **28**),

т.е. $a \le \bar{u}$ (согласно **19**); стало быть, $au = 0$ (согласно **33**).

Пример. Так, нерастения и неживотные вместе составляют всеобщность, и то же самое относится к тому, что не одухотворено и не существует[г].

39. $$[a < u] + [a < \bar{u}] \doteq [a = 0]$$

$$[a > u] + [a > \bar{u}] \doteq [a = \mathrm{T}]$$

[г] *Предложение* 99. Допущение: $(a+b)+(\bar{a}+\bar{b}) = \mathrm{T}$; следствия: $a = \bar{b}$, $\bar{a} = b$.

Предложение 100. Допущение: $ab + \bar{a}b = 0$, следствия: $a = b$, $\bar{a} = b$. Доказательства следуют непосредственно из предложений **97** и **98**.

(Die Logik, 1890).

Понятие, подчиненное некоторому другому понятию и его отрицанию, или негации, есть нуль, и:

понятие, подчиняющее некоторое другое понятие и его отрицание, есть всеобщность.

Доказательство **a.** $a < u$, поэтому $a\bar{u} = 0$; и $a < \bar{u}$, поэтому $au = 0$ (согласно **33**); стало быть,

$$a = a\mathrm{T} = a(u + \bar{u}) \qquad \text{(согласно 25 и 28)}$$
$$= au + a\bar{u} \qquad \text{(согласно 2)}$$
$$= 0.$$

Доказательство **b.** $a > u$, поэтому $a + u = a$; и $a > \bar{u}$, поэтому $a + \bar{u} = a$ (согласно **15**); стало быть,

$$a = a + a \qquad \text{(согласно 5)}$$
$$= a + u + a + \bar{u} \qquad \text{(согласно допущению)}$$
$$= a + a + (u + \bar{u}) \qquad \text{(согласно 2)}$$
$$= a + \mathrm{T} \qquad \text{(согласно 5 и 28)}$$
$$= \mathrm{T} \qquad \text{(согласно 25)[52*]}$$

Примеры. Вещи, которая была бы подчинена как бытию, так и небытию, не существует. Аналогично, становление, которое есть переход от небытия к бытию, не может быть вначале бытием, поскольку оно вначале есть небытие; ибо если бы оно вначале было бытием, то оно больше не было бы становлением, а было бы бытием или наличным состоянием. Поэтому начало гегелевской «Логики» представляет собой полное пренебрежение всеми логическими законами, как и вообще гегелевская «Логика» столь же заслуживает своего названия, как *lucus a non lucendo*[53*]. Конечно, отдельный вид бытия, например, чистое бытие, может быть подчинен некоторому другому виду небытия, например, небытию абсолютного бытия, как это мы видели в № **35**; ибо отрицание более узкого понятия как раз шире, чем отрицание более широкого понятия; поэтому в данном случае небытие абсолютного бытия кроме чистого небытия охватывает также и все не абсолютное бытие, т.е. чистое бытие.

Единственное, что подчиняет себе бытие и небытие, есть всеобщность.

40. *Для взаимнопокрывающих* (*тождественных*) и *встречающихся* (*инцидентных*) понятий a и u имеют силу следующие восемь равенств, и если справедливо одно из них, то понятия являются либо взаимнопокрывающими друг друга, либо встречающимися:

1. $a \leq u$ 3. $a + u = u$ 5. $au = a$ 7. $a\bar{u} = 0$

2. $\bar{u} \leq \bar{a}$ 4. $\bar{a} + \bar{u} = \bar{a}$ 6. $\bar{a}\bar{u} = \bar{u}$ 8. $\bar{a} + u = \mathrm{T}$

Доказательство: 1 следует из **12**, 2 – из **35**, 3 и 4 – из **15**, 5 и 6 – из **19**, 7 – из **34** и 8 – из **38**[s].

41. Для *внеположных* (*дизъюнктных*) *понятий a* и *u* имеют силу следующие восемь уравнений, и если справедливо место одного из них, то данные понятия внеположны.

1. $a \leq \bar{u}$ 3. $a + \bar{u} = \bar{u}$ 5. $a\bar{u} = a$ 7. $au = 0$

2. $u \leq \bar{a}$ 4. $\bar{a} + u = \bar{a}$ 6. $\bar{a}u = u$ 8. $\bar{a} + \bar{u} = \mathrm{T}$

Доказательство. Непосредственно из **40**, путем преобразования *u* в $\bar{u}, \bar{u}$ – в *u*, ибо если *a* и *u* дизъюнктны, то *a* подчинено $\bar{u}$.

42. Если обозначить с помощью $(a + u)^-$ отрицание, или негацию, того, что $a + u$, а с помощью $(au)^-$ – отрицание, или негацию, того, что *au*, то общезначимо будет:

$$(a+u)^- = \bar{a}\bar{u} \quad \text{и}$$

$$(au)^- = \bar{a} + \bar{u}.$$

Доказательство a. Имеет силу:

$(a + u) + (a + u)^- = \mathrm{T}$ (согласно **28**)

и $(a+u) + \bar{a}\bar{u} = \mathrm{T}$ (согласно **37**)

Имеет силу также:

$(a + u) \cdot (a + u)^- = 0$ (согласно **28**)

$(a+u)\bar{a}\bar{u} = a\bar{a}\bar{u} + u\bar{a}\bar{u}$

$= 0$ (согласно **28**)

Доказательство b. Имеет силу:

$au + (au)^- = \mathrm{T}$

и $au + (\bar{a} + \bar{u}) = \mathrm{T}$.

Далее, $(au)\,(au)^- = 0$

и $au(\bar{a} + \bar{u}) = au\bar{a} + au\bar{u}$

$= 0.$

---

[s] *Предложение* 123. $[a + c = u + c] \dotplus [a \leq c] + [u \leq c] \doteq [a = u]$.

Доказательство. Из $a \leq \bar{c}$ и $u \leq \bar{c}$ следует, что $ac = 0$ и $uc = 0$, поэтому $ac = uc$ и, значит, поскольку $a + c = u + c$, предложение 123 верно. [*a* и *u* являются *взаимнопокрывающими* понятиями] («Логика», 1890, с. 57–58)[54*].

43. *Определение.* Если понятие *а* есть сумма двух внеположных, или дизъюнктных, понятий *и* и *с*, то первое называется *главным понятием*, а каждое из обоих упомянутых понятий – *дополнением* другого до главного понятия.

Дополнение понятия *и* до *а* обозначается $\bar{u}_a$ (читается: не-*и*, относящееся к *а*.

Примеры. Позвоночные животные и беспозвоночные животные вместе образуют главное понятие животного; они внеположны, или дизъюнктны; каждое из них дополняет другое до понятия животного; стало быть, каждое из них есть дополнение другого до главного понятия. Однако следует четко различать не являющееся позвоночным животным и животное, которое не является позвоночным. Ибо первое есть отрицание, или негация, и обозначает все, что не есть позвоночное животное, т.е. как любое неживотное, так и любое беспозвоночное животное, в то время как второе является дополнением до животного и обозначает только любое животное, не имеющее позвоночника.

Аналогично млекопитающее и немлекопитающее, или позвоночное животное, не выкармливающее детенышей молоком, вместе образуют главное понятие позвоночного животного, а животное, имеющее руки и не имеющее рук – главное понятие млекопитающего.

Всеобщность посредством дополнений распадается на ряд подчиненных главных понятий. Каждое более низкое главное понятие у́же по числу штифтов, или элементов, но богаче по числу своих отличительных свойств. Всеобщность содержит все простые штифты [элементы] без каких-либо их отличий. Первая же отличительная черта, появляющаяся во всеобщности, образует первое подчиненное главное понятие; оно сдержит понятия, обладающие единственной отличительной чертой. Вторая появляющаяся во всеобщности отличительная черта образует второе подчиненное главное понятие; оно содержит понятия, обладающие двумя отличительными чертами, и т.д.

Например, всеобщность подразделяется на главные понятия вещь и деятельность, или – на конкретное и абстрактное; главное понятие вещь – на духовный и физический миры; физический мир – на неклеточные (неорганические) структуры и структуры клеточные (органические), клеточные организмы – на царства растений и животных. Животное царство – на типы беспозвоночных и позвоночных животных; тип позвоночных животных – на классы немлекопитающих и млекопитающих животных; класс млекопитающих – на отряды не имеющих рук и животных, имеющих руки. Каждый отряд, в конце концов, делится на семейства (семьи), роды и виды.

Среди отличительных черт различают такие, которые присущи некоторому роду вещей, родовые признаки (*differentia generica*), и такие, которые присущи только одному виду, видовые признаки (*differentia specifica*); кроме того, различают существенные отличительные свойства (*differentia essentialis, constitutiv*) и производные особенности (*d. consecutiva, attributiva*)[1].

44. К понятиям, подчиненным главному понятию, полностью применимы те же законы, что и для всеобщности, или тотальности, – при условии, что вместо всеобщности берется главное понятие, вместо отрицания, или негации, – дополнение до главного понятия; в частности, это делает применимыми к главному понятию все законы от № **24** до № **42**.

Доказательство. Непосредственно путем преобразования доказательств, содержащихся в параграфах № **24–42**.

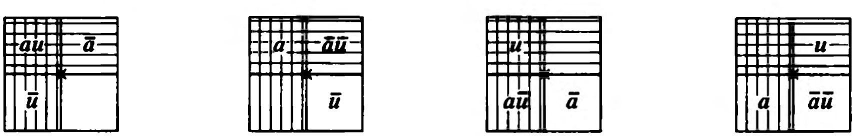
Для различных главных понятий, охватываемых всеобщностью, нетрудно привести примеры и произвести подразделение [понятий] по образцу того, как это было сделано для всеобщности. В своих сферах деятельности и мышления каждый найдет для этого богатый материал; эта работа не бесполезна для его ума и приобретения знаний.

45. Понятия, с которыми мы познакомились в логике, представляют собой чистые понятийные формы, которые в строго научном виде представляют то, что дано в явлениях и что служит предметом мышления. Сущность вещей не постигается с помощью этих понятийных форм. Если мы хотим постичь сущность вещей, мы должны образовать сущностные понятия, однако сущ-

---

[1] *Правило деления* ⟨...⟩ *Предложение* 160. В случае правила деления рассматриваются только понятия, лежащие в области делимого главного понятия ⟨...⟩ для перекрещивающейся противоположности $(а+\bar{а})+(и+\bar{и})$: $аи$, $а\bar{и}$, $\bar{а}и$, $\bar{а}\bar{и}$ [члены деления] ⟨...⟩ Отрицания членов деления: $\bar{а}+\bar{и}$, $а+\bar{и}$, $\bar{а}+и$, $а+и$. *Наглядное представление* членов деления и их отрицаний:

$аи$; $\bar{а}+\bar{и}$ $\bar{а}и$; $а+\bar{и}$ $а\bar{и}$; $\bar{а}+и$ $\bar{а}\bar{и}$; $а+и$



(Die Logik, 1890. S. 66–67).

ностные понятия составляют предмет уже не логики, а учения о сущностях, которое образует определенную часть учения о знании, где оно и подлежит рассмотрению[55*].

Раздел 2

ОБРАЗОВАНИЕ СУЖДЕНИЙ

46. *Определение.* Уравнение формы $a = xu$ называется *суждением* (*krisis, judicium*); *a* называется *вещью* или *субъектом* (*hypostasis, subjectum*), *xu* – *действием* или *предикатом* (*katēgorēma, praedicatum*) суждения; *x* называется *неопределенным указателем*, или *артиклем*. Суждение читается: *a* есть [некое] *u*.

Языковая форма суждения называется предложением (*logos, propositio*). Однако не всякое предложение есть суждение, существуют *неопределенные* предложения (*pr*[*opositio*] *indesignata, indeterminate, indefinita*), которые не содержат никакого определенного высказывания и поэтому совершенно чужды учению о понятии. Языковая форма предложения (*lógos*) может быть двоякой.

1. *Приписывающее*, или *категорическое, предложение* (*lógos katēgorikós*) имеет форму простого предложения, состоящего из вещи (субъекта) и действия (предиката), например, человек есть одухотворенное существо[56*].
2. *Условное*, или *гипотетическое*, предложение (*logos hypothetikós*) имеет форму сложного предложения, где предшествующее предложение (*antecedent*) содержит *допущение*, или *предположение*, а последующее предложение (*consequens*) – *заключение* [следствие] (*thésis, conditionatum*), например, если он есть человек, то он есть также и некое одухотворенное существо. Тогда предшествующее предложение есть вещь, или субъект, а последующее предложение – действие, или предикат, суждения.

Это различие в форме не оказывает, однако, никакого влияния на учение о понятиях; оно является только языковым, а не понятийным. Каждое предложение учения о понятиях столь же справедливо для одной формы, сколь и для другой, поскольку сочленение понятий является в обоих случаях одним и тем же.

Примеры приписывающих, или категорических, суждений. Бог есть дух; человек есть тварь; мысль есть умственное действие; суждение есть связь понятий.

Примеры условных, или гипотетических, суждений. Если ты есть [некое] разумное существо, то ты есть дитя Божие. Если ты грешен, то ты есть падшая душа. Если ты ограбил кого-то, то ты преступник. Условные, или гипотетические, суждения, преобразованные в приписывающие, или категорические суждения, гласят: Разумное существо есть дитя божие, грешник – это падшая душа, грабитель является преступником.

47. Неопределенный указатель, или артикль, x, может обозначать любое, произвольно взятое понятие, которое с u имеет общую часть a, но не больше,чем часть a, или: в суждении $a = xu$ артикль x равен $a + y$, то есть $x = a + y$, при условии, что $yu = 0$.

Доказательство. Непосредственно на основе **9**.

Примеры. В суждении «Человек есть некое одухотворенное существо» неопределенный указатель «некое» может обозначать любое, произвольно взятое понятие, которое среди одухотворенных существ охватывает только людей. Так, он может обозначать земное существо, существо, воспринимаемое зрением, род Адама; например, человек есть земное одухотворенное существо, или одухотворенное существо, воспринимаемое зрением, или род Адама.

48. $$[a = xu] \doteq [a \leq u].$$

Во всяком суждении вещь (субъект) равна или подчинена действию (предикату) и:

если из двух понятий первое равно или подчинено второму, то оба они могут быть соединены в суждение, в котором первое понятие есть вещь (субъект), а второе – действие (предикат).

Доказательство a. Если дано $a = xu$, то $x = a + y$ и $yu = 0$ (согласно **47**); стало быть,

$a = xu = (a + y)u$ (согласно **47**)

$= au + yu$ (согласно **2**)

$= au$ (согласно **47**);

следовательно, $a \leq u$ (согласно **19**).

Доказательство b. Если дано, что $a \leq u$, тогда [согласно **19**] имеем:

$a = au$

$= au + yu$, где $yu = 0$ (согласно **2**)

$= (a + y)u$ (согласно **2**) и если $x = a + y$, то

$= xu$, где $yu = 0$,

как согласно **47** и должно быть для каждого суждения.

49. Вместо двойного знака ≤ вводится простой знак <, и вместо $a \leq u$ пишется $a < u$ (что читается: *a* [включается] в *u*). Стало быть, форма суждения *a* [включается] в *u* означает, что, *a* либо равно, либо подчинено *u*. Тогда форма суждения $a = xu$ в соответствии с № **48** имеет то же значение, что и $a < u$; эту более краткую форму я в дальнейшем и ввожу для суждений. Итак, $[a < u] \doteq [a = xu]$.

50. *Определение. Деление* суждений.

Суждения делят либо по *объему вещи* [субъекта] (*quanitas subjecti*), либо по *знаку вещи* [субъекта] (*qualtitas subjecti*), либо по *знаку действия* [предиката] (*qualitas praedicati*).

1. По объему вещи (*qualitas subjecti*) суждения бывают либо:

суждениями о всей вещи [о всем субъекте], *общими суждениями* (*krísis kathólou, judicium universalis sc*[*ilicet*] *subjecti*), в которых высказывается нечто о вещи в целом, или обо всем субъекте: суждениями формы $a < u$, либо:

суждениями о части вещи [о части субъекта], частными суждениями (*kr*[*ísis*] *en mérei, j*[*udicium*] *particularis*), в которых высказывается нечто о некоей части вещи или субъекта суждения: формы $xa < u$.

2. По знаку вещи [субъекта] (*qualitas subjecti*) суждения бывают либо:

суждениями о самой вещи (*kr. tinós, j. positi sc. subjecti*), в которых высказывается нечто о самих вещах: суждения формы $a < u$, либо:

суждениями об отрицании вещи (*kr. oudenós, j. negati*), в которых высказывается нечто об отрицании вещи: суждениями формы $\bar{a} < u$.

Таким образом, по [характеру] вещи, или субъекта, имеется четыре вида суждений:

полные суждения (*kathólou tinós*), в которых высказывается нечто о самой вещи: суждения формы $a < u$,

отрицающие суждения (*kathólou oudenós*), в которых высказывается нечто о всем отрицании вещи: суждения формы $\bar{a} < u$,

частичные суждения (*en mérei tinós*), в которых высказывается нечто о части [слагаемом] самой вещи: суждения формы $xa < u$,

разделяющие суждения (*en mérei oudenós*), в которых высказывается нечто об отрицании вещи: суждения формы $x\bar{a} < u$.

3. По знаку действия [предиката] (*qualitas praedicati*) суждения бывают либо:

утверждающими, утвердительными суждениями (*katáphasis, affirmatio*), в которых [вещи] приписывается действие как таковое: суждениями вида $a < u$, либо:

отвергающими, отрицающими суждениями (*apophasis, stérēsis, abjudicatio, privatio*), в которых [вещи] приписывается отрицание [отсутствие] действия, или отвергается само действие: суждениями формы $a < \bar{u}$ [u].

51. В соответствии с этим имеется восемь суждений, четыре общих и четыре частных.

Общие.

1. *Полное утверждение*, или утверждение о всей вещи как таковой (*katáphasis kathólou tinós*). Его форма: $a < u$.
2. Полное отрицание, или отрицание, касающееся всей вещи – вещи как таковой (*kathólou tinós*). Его форма: $a < \bar{u}$.
3. *Неутверждение*, или утверждение о всем отрицании вещи (*katáphasis kathólou oudenós*). Его форма: $\bar{a} < u$.
4. *Неотрицание*, или отрицание всей не-вещи (*stérēsis kathólou oudenós*). Его форма: $\bar{a} < \bar{u}$.

Частные:

1. *Частичное утверждение*, или утверждение о части [слагаемом] самой вещи [субъекта] (*katáphasis en mérei tinós*). Его форма: $xa < u$.
2. *Частичное отрицание*, или отрицание, относящееся к части самой вещи (*stérēsis en mérei tinós*). Его форма: $xa < \bar{u}$.
3. *Разделяющее утверждение*, или утверждение о части отрицания вещи (*katáphasis en mérei oudenós*). Его форма: $x\bar{a} < u$.

---

[u] С точки зрения приписывания действия (предиката) [вещи, или субъекту] существует четыре вида суждений:

утверждение (положительное суждение), в котором [вещи] приписывается само [действие]; его форма $a < u$;

отвержение (бесконечное суждение), в котором [вещи] приписывается отрицание [действия]; его форма $a < \bar{u}$;

исключение (отрицательное суждение), в котором [относительно вещи] отклоняется действие. Здесь следует заметить, что если исключению подлежат все понятия вещи, то возникает форма $0a < u$. В отличие от этого форма $a < u$ исключает только какую-то часть [понятий вещи] и поэтому имеет смысл частного суждения. Итак, формой общего суждения оказывается [в этом случае] $0a < u$, а частного $a < u$;

включение, в котором отклоняется приписывание вещи отрицания, и поэтому a включается в u. Для общих суждений формой тогда будет $0a < \bar{u}$, а для частных $a < \bar{u}$ (Die Logik, 1890. S. 77).

Предложение 171. $[0a < u] \doteq [a < \bar{u}]$

$$[a \leq u] \doteq [xa < \bar{u}]$$

(Die Logik, 1890. S. 80) [Мы не приводим доказательств этих теорем; заметим только, что при этом используются свойства нуля $0a = a0 = 0$].

4. *Разделяющее отрицание*, или отрицание, относящееся к части отрицания вещи (*stérēsis en mérei oudenós*). Его форма: $x\bar{a} < \bar{u}$.
Примеры. Полные.
1. Каждый человек есть некое разумное существо.
2. Каждое животное есть некое неразумное существо.
3. Каждое неразумное существо есть некая физическая вещь.
4. Каждая неорганическая сущность есть некое неживотное.
Частичные:
1. Некоторые люди суть талантливые существа.
2. Некоторые животные суть беспозвоночные существа.
3. Некоторые неразумные существа суть животные.
4. Некоторые неорганические сущности суть не-камни[v].

Весьма целесообразно образовывать примеры каждого из этих восьми видов суждений.

В данной классификации суждений следует совершенно оставить в стороне обычную логику, так как она в этом пункте впадает в ошибку. Равным образом следует отказаться от подразделения суждений на общие, частные и единичные; на положительные, отрицательные и бесконечные; на категорические, гипотетические и дизъюнктивные, так же как и на проблематические, ассерторические и аподиктические[57*].

Дело в том, что в обычной логике смешаны не только языковые и понятийные взаимоотношения, но также и взаимоотношения внешнего мира и взаимоотношения понятий. Так, различие между категорическими и условными суждениями, как это мы видели в **№ 46**, является чисто языковым, а различия между проблематическими, ассерторическими и аподиктическими суждениями, или между возможностью, действительно-

---

[v] *Предложение* 170. Существует шестнадцать видов суждений. [Перечислив восемь приведенных выше форм, Р. Грассман добавляет к ним:] ⟨...⟩ *Общие разделяющие суждения*: исключение вещи – $0a < u$; включение вещи: $0a < \bar{u}$; неисключение – $0\bar{a} < u$; невключение – $0\bar{a} < \bar{u}$. *Частные разделяющие суждения*: частичное исключение – $a \leq u$; частичное включение – $a \leq \bar{u}$; неисключение – $\bar{a} \leq u$; невключение – $\bar{a} \leq \bar{u}$. ⟨...⟩ *Примеры* ⟨...⟩ *Общие разделяющие суждения*: 1. Ни одна бабочка не является жуком; 2. Ни один кит не есть немлекопитающее; 3. Ни одно не-насекомое не есть бабочка; 4. Ни одно неодухотворенное существо не является бестелесным. *Частные разделяющие суждения*: 1. Не каждое животное – человек; 2. Не каждый человек бездуховен; 3. Не каждое неразумное существо – балбес; 4. Не каждое не-животное является нерастением. (Die Logik, 1890. S. 78–79).

стью и необходимостью относятся исключительно к внешнему миру[w].

Вообще, различения, проводимые в обычной логике, нелогичны и ошибочны. Ибо единичное суждение, например «человек есть одухотворенное существо» общее, а не частичное суждение; поэтому лишь общее и частное суждения противоположны. И точно так же так называемое бесконечное суждение[61*] в свою очередь может быть как положительным, так и отрицательным, например, данная звезда есть ⟨некий⟩ неорганический объект и данная звезда не есть ⟨некий⟩ неорганический объект.

Нелогичным является, наконец, и различение положительных и отрицательных суждений. А именно суждение в обычной логике называют отрицательным, если отрицание приписывается связке, например, человек не есть раб своих страстей. Но ведь это

---

[w] Деление суждений по *модальности* уходит в глубокую древность. Уже Аристотель в книге «Об истолковании» (главы 12 и 13) различает для сложных предложений многообразные *trópoi*, модусы зависимости, а именно выделяет: необходимость, случайность, возможность и невозможность и сопоставляет их с [такими выражениями], как: «все», «некоторые», «один» и «ни один». Аристотель показывает взаимозависимость [модальностей], в частности, такие как: ***Возможно быть, Не возможно быть и Не невозможно быть***, а также: ***Возможно не быть*** и т.д.; он уже подмечает, что все это совпадает с тем, как если бы мы поставили вопрос: возможно ли бытие, невозможно ли бытие; не возможно ли не-бытие и не невозможно ли не-бытие – и то же относительно небытия[58*]. Таким образом, уже Аристотель осознавал, что тут только другая языковая форма, что на этом пути не получаются новые логические формы мысли[59*].

Каждое общее подчиняющее[60*] суждение логически есть нечто необходимое, каждое общее разделяющее суждение есть логически нечто невозможное, каждое частное подчиняющее суждение есть логически нечто возможное и каждое частное разделяющее суждение есть логически нечто не необходимое. Совершенно одно и то же, скажем ли мы: «Каждый человек есть некое животное» или «логически необходимо, что человек есть некое животное»; одно и то же, говорим ли мы «Ни один человек не свят» или «логически невозможно, чтобы какой-либо человек был свят». Одно и то же, когда мы говорим «Некоторые люди добры» и «логически возможно то, что некоторые люди добры». Наконец, совершенно одно и то же сказать «Не каждый человек прилежен» и «логически не необходимо то, что каждый человек прилежен».

В любом случае, далее, ясно, что логика имеет дело только с логическими взаимосвязями, а не с вопросами о том, как обстоит дело в реальности, произошло ли что-то случайно или в силу необходимости, заложенной в природе. Логике, и это совершенно очевидно, делать с этим нечего, на вопросы такого рода у нее нет ответов. Поэтому когда современные логики выдвигают категорию реальности в качестве логической, они совершают грубейшую ошибку; логике места тут нет (Die Logik, 1890. S. 90–91).

отрицание может иметь двоякий смысл: либо отрицается бытие, либо же утверждается небытие. В первом случае отрицание имеет следующий смысл: я отрицаю, что он есть раб; во втором случае оно имеет другой смысл: я утверждаю, что ему присуще небытие рабского состояния. Язык выражает суждения первого вида с помощью формы: «*а* есть не некое *и*» или «*а* не есть *и*»[62*], т.е. *а* есть не *и*, или имеет место $au \gtrsim a$. Так, например, предложение «Этот параллелограмм не есть прямоугольник» выражает только то, что данный параллелограмм не является равным или подчиненным прямоугольнику. В отличие от этого суждения второго вида язык выражает формой: «Ни одно *а* не есть *и*», т.е. «Не существует такого *а*, которое есть *и*», или не существует ни одного штифта (элемента), который был бы общим для понятий *а* и *и* – эти понятия внеположны, или дизъюнктны, т.е. $au = 0$. Обе формы, стало быть, различаются тем, что первая – «*а* есть не *и*» – исключает только равенство и подчинение понятия *а* понятию *и*, но отнюдь не их пересечение и не подчинение понятия *и* понятию *а*; в противоположность этому вторая форма – «Ни одно *а* не есть *и*», исключает всякое пересечение и всякое подчинение и требует полной внеположности, или дизъюнктности. Последнее предложение, согласно нашему определению, в точности совпадает с понятийной формой $a < \bar{u}$ (*а* есть некое не-*и*), или с полностью полагаемым отрицанием (отрицанием всей вещи) согласно нашему определению; первое предложение равно понятийной форме $xa < \bar{u}$ (Некоторые *а* суть не-*и*), или равно частично полагаемому отрицанию (отрицанию части вещи как таковой) (ср. **55**).

Если мы пройдем мимо этих ошибок обычной логики и отождествим положительные и отрицательные суждения с нашим утверждением и отрицанием, то получим четыре выделяемых в обычной логике вида суждений, исключив все суждения об отрицаниях вещей, или о негациях субъекта. Но поскольку они так же хорошо допускают преобразование и проведение умозаключений, как и любое другое суждение, наше построение, если бы мы захотели отбросить суждения о негациях субъекта, обнаружило бы существенные изъяны, и эти суждения пришлось бы снова вводить. Упомянутые выше четыре суждения о вещах как таковых или о положительных субъектах обычная логика обозначает с помощью четырех гласных (звуков) *a, e, i* и *o* в соответствии с правилом:

asserit a, negat e, sed universaliter ambo,
asserit i, negat o, sed particulariter ambo[63*].

52. *Определение. Обратить* (*antistréphein, convertere*) суждение значит поменять местами понятия вещи и действия, или субъекта и предиката. Заданное суждение называется *обращаемым* (*convertens*), а выводимое из него – *обращенным* (*conversum*).

Ослабить (*subalternate*) суждение значит из суждения о сумме вывести суждение о какой-то ее части.

Пример обращения. Луна есть спутник Земли. Спутник Земли есть Луна.

Пример ослабления. Все люди суть разумные существа. Некоторые люди суть разумные существа.

53. Каждое общее суждение можно обратить, произведя обращение знаков качества[64*] [понятий, входящих в] суждения; каждое частичное, или частное – произведя обращение объема или количества обоих понятий, и наоборот, т.е.:

1. $[a < u] \doteq [\bar{u} < \bar{a}]$
2. $[\bar{u} < \bar{a}] \doteq [u < a]$
3. $[a < \bar{u}] \doteq [u < \bar{a}]$
4. $[\bar{a} < u] \doteq [\bar{u} < a]$
5. $[xa < u] \doteq [xu < a]$
6. $[x\bar{a} < u] \doteq [x\bar{u} < \bar{a}]$
7. $[xa < \bar{u}] \doteq [x\bar{u} < a]$
8. $[x\bar{a} < u] \doteq [xu < \bar{a}]$.

Доказательство: Для 1 и 2 получается непосредственно на основании № **40**.

Для 3 и 4 – непосредственно на основании № **41**.

Для 5:

$$
\begin{aligned}
[xa < u] &\doteq [xa = yu] && \text{(согласно 48)}\\
&\doteq [yu = xa] && \text{(согласно 11 «Учения о величинах»)}\\
&\doteq [yu < a] && \text{(согласно 48)}
\end{aligned}
$$

Аналогично для 6–8.

Примеры[65*].

Обращаемое (*convertens*)	Обращенное (*conversum*)
1. Кит есть млекопитающее	Не-млекопитающее не есть кит.
2. Немлекопитающее есть не-кит.	Кит есть млекопитающее.
3. Жук есть беспозвоночное.	Позвоночное животное есть не-жук.
4. Неземной мир есть царство Божие.	То, что не есть царство Божие, есть наш мир.
5. Некоторые люди одухотворены.	Некоторые одухотворенные существа суть люди.
6. Некоторые неразумные [люди] безбожны.	Некоторые безбожные [люди] неразумны.
7. Некоторые плавниковые животные – не-рыбы.	Некоторые не-рыбы суть плавниковые животные.
8. Некоторые не-птицы крылаты.	Некоторые крылатые – не-птицы.

54. Каждое общее суждение можно ослабить, и получится соответствующее частичное суждение; в противоположность этому, частичное, или частное, суждение нельзя усилить и получить соответствующее общее; иначе говоря, имеет место:

1. Если $a < u$ или $\bar{a} < \bar{u}$, то $xa < u$, $x\bar{a} < \bar{u}$, $xu < a$, $x\bar{u} < \bar{a}$.

2. Если $a < \bar{u}$, то $xa < \bar{u}$ и $xu < \bar{a}$.

3. Если $\bar{a} < u$, то $x\bar{a} < u$ и $x\bar{u} < a$.

Доказательство для 1. Если $a < u$, то $a = au$ (согласно **19**); стало быть, и $xa = xau$, т.е. $xa < u$ и посредством обращения последнего получаем $xu < a$. Далее, если имеет место: $a < u$, то посредством общего суждения получается, что и $\bar{u} < \bar{a}$; следовательно, и $x\bar{u} < \bar{a}$, а обращение последнего дает $x\bar{a} < \bar{u}$.

Аналогично доказываются 2 и 3.

55. Для каждого из восьми видов суждений[66*] имеют силу следующие восемь формул; и наоборот, если верна одна из этих восьми формул, то имеет силу соответствующее ей суждение. Формулы, соответствующие друг другу, таковы:

Суждения	Равенства, содержащие сумму		
1. $a<u,\ \bar{u}<\bar{a}$	$\bar{a}+\bar{u}=\bar{a}$	$a+u=u$	$\bar{a}+u=\mathrm{T}$
2. $\bar{a}<\bar{u},\ u<a$	$a+u=a$	$\bar{a}+\bar{u}=\bar{u}$	$a+\bar{u}=\mathrm{T}$
3. $a<\bar{u},\ u<\bar{a}$	$\bar{a}+u=\bar{a}$	$a+\bar{u}=\bar{u}$	$\bar{a}+\bar{u}=\mathrm{T}$
4. $\bar{a}<u,\ \bar{u}<a$	$a+\bar{u}=a$	$\bar{a}+u=u$	$a+u=\mathrm{T}$
5. $xa<u,\ xu<a$	$\bar{a}+u\gtrless\bar{a}$	$a+\bar{u}\gtrless\bar{u}$	$\bar{a}+\bar{u}\gtrless\mathrm{T}$
6. $x\bar{a}<\bar{u},\ x\bar{u}<\bar{a}$	$a+\bar{u}\gtrless a$	$\bar{a}+u\gtrless u$	$a+u\gtrless\mathrm{T}$
7. $xa<\bar{u},\ xu<\bar{a}$	$\bar{a}+\bar{u}\gtrless\bar{a}$	$a+u\gtrless u$	$\bar{a}+u\gtrless\mathrm{T}$
8. $x\bar{a}<u,\ x\bar{u}<a$	$a+u\gtrless a$	$\bar{a}+\bar{u}\gtrless\bar{u}$	$a+\bar{u}\gtrless\mathrm{T}$

Равенства, содержащие произведение

1.	$au=a$	$\bar{a}\bar{u}=\bar{u}$	$a\bar{u}=0$
2.	$\bar{a}\bar{u}=\bar{a}$	$au=u$	$\bar{a}u=0$
3.	$a\bar{u}=a$	$\bar{a}u=u$	$au=0$
4.	$\bar{a}u=\bar{a}$	$a\bar{u}=\bar{u}$	$\bar{a}\bar{u}=0$
5.	$a\bar{u}\gtrless a$	$\bar{a}u\gtrless u$	$au\gtrless 0$
6.	$\bar{a}u\gtrless\bar{a}$	$a\bar{u}\gtrless\bar{u}$	$\bar{a}\bar{u}\gtrless 0$
7.	$au\gtrless a$	$\bar{a}\bar{u}\gtrless\bar{u}$	$a\bar{u}\gtrless 0$
8.	$\bar{a}\bar{u}\gtrless\bar{a}$	$au\gtrless u$	$\bar{a}u\gtrless 0$

Доказательство. Строки 1 и 2 получаются непосредственно на основании **№ 40**. Строки 3 и 4 – непосредственно на основании **№ 41**.

Строка 5. Если $xa<u$, то a и u имеют общую часть [слагаемое] xu; следовательно, a и u дизъюнктны; следовательно, $au\gtrless 0$, значит, справедливы все формулы строки 5.

Строки 6–8. Формулы строк 6–8 доказываются аналогично[67*].

Применение суждений к понятиям

Рассмотрим сначала полные, а затем частичные суждения. При соединении взаимнопокрывающих или подчиняющихся понятий имеют место формы 1 и 2, внеположных понятий – форма

3, пересекающихся понятий – формы 5, 7 и 8, наконец, при связывании отсекающихся понятий – форма 4, а перекрещивающихся понятий – форма 6.

56. Каждые два *взаимнопокрывающих* или *соподчиняющихся* (инцидентных) понятий могут быть соединяемы в полностью полагаемое утверждение (утверждение о всей вещи) или в полностью отрицаемое отрицание (отрицание всей не-вещи), причем в полностью полагаемом утверждении подчиненное понятие образует вещь, или субъект, а в полностью отрицаемом отрицании – действие, или предикат, или:

во всяком полностью полагаемом утверждении понятие вещи, или субъекта, равно или подчинено понятию действия, или предиката; во всяком полностью отрицаемом отрицании понятие действия, или предикат, равно или подчинено понятию вещи, или субъекта.

Доказательство[68*]. Непосредственно на основании **40**.

Примеры. Конь есть то же, что и лошадь; стало быть, отсюда следует:

Каждая лошадь есть конь и
Каждая нелошадь есть неконь.

Померанец подчинен немцу; стало быть, отсюда следует:

Каждый померанец есть немец и
Каждый не-немец есть непомеранец.

А если справедливо одно из этих суждений, то в обратном направлении действует отношение подчинения.

57. Каждые два внеположных, или дизъюнктных, понятия могут быть связываемы в некоторое полностью полагаемое отвержение (отвержение всей вещи как таковой), в котором любое из двух понятий само может быть вещью, или субъектом, и:

в каждом полностью полагаемом отвержении – понятия вещи и действия (или субъекта и предиката) внеположны, или дизъюнктны.

Доказательство[69*]. Непосредственно на основании **41**.

Примеры. Суждения «Угри суть не-змеи», «Киты суть не-рыбы», «Индюк есть не-петух», «Черепаха есть не-жаба» не выражают ничего отличного от выражаемого самими этими понятиями: что угорь и змея, кит и рыба и т.д. – внеположны, или дизъюнктны. Их языковая форма, как мы видели в № **51**, иная, а именно: Ни один угорь не есть змея, ни один кит не есть рыба, и т.д.

58. Каждые два пересекающихся понятия могут быть соединены в частично полагаемое отрицание и частично отрицаемое отрицание, в которых любое из двух понятий само может выступать как вещь, или субъект.

Но неверно, что в каждом частично полагаемом утверждении, частично полагаемом отрицании и частично отрицаемом утверждении понятия вещи и действия (субъекта и предиката) являются пересекающимися; напротив, для этого должны быть выполнены особые условия.

Доказательство. Два пересекающихся понятия a и u могут быть представлены в виде двух сумм: $a = a_1 + c$, $u = u_1 + c$, где a_1, c и u_1 попарно внеположны (дизъюнктны) и все они не равны нулю. Тогда всеобщность, или тотальность, $\mathrm{T} = a_1 + c + u_1 + d$, где понятие d не содержит никаких штифтов, или элементов, имеющихся в a_1, c и u_1, но может быть или равно, или не равно нулю.

Если $d = 0$, то $\mathrm{T} = a_1 + c + u_1 = a + u_1$, где a и u_1 внеположны (дизъюнктны); стало быть, $\bar{a} = \mathrm{T}\bar{a} = (a + u_1)\bar{a} = u_1\bar{a}$, и равным образом $u_1 = u_1\bar{a}$; следовательно, $\bar{a} = u_1$; стало быть, $\bar{a} < u$, и, благодаря обращению (согласно № 52), также $\bar{u} < a$. Следовательно, не может быть ни того, что $x\bar{a} < \bar{u}$, ни того, что $x\bar{u} < \bar{a}$.

Если, наоборот, $d \gtrless 0$, то $\mathrm{T} = a_1 + c + u_1 + d$; следовательно, $\bar{a} = u_1 + d$, а также $\bar{u} = a_1 + d$; следовательно, $\bar{a}$ и $\bar{u}$ имеют общей частью d, и справедливы формулы $x\bar{a} < \bar{u}$ и $x\bar{u} < \bar{a}$; напротив, в этом случае не может быть ни того, что $\bar{a} < u$, ни того, что $\bar{u} < a$.

Примеры. Понятия: животное и существо с четырьмя ногами пересекаются; стало быть, следует, что:

Некоторые животные суть существа с четырьмя ногами.
Некоторые животные суть не четырехногие существа.
Некоторые неживотные суть четырехногие существа (например, столы и стулья);

далее следует, что:

Некоторые четырехногие существа суть животные.
Некоторые четырехногие существа суть неживотные.
Некоторые не-четырехногие существа суть животные.

59. Существует два вида пересекающихся понятий – *собственно пересекающиеся* и *перекрещивающиеся* понятия; в первом случае имеет место полностью отрицаемое <vollnichtende> утверждение (утверждение о всей не-вещи), а во втором – частично отрицаемое отрицание (отрицание части отрицания вещи).

Первый вид пересекающихся понятий уместно назвать отсекающимися понятиями, потому что в этом случае, хотя и имеют место

$$xa < u,\ xa < \bar{u},\ xu < a,\ xu < \bar{a},\ x\bar{a} < u,\ x\bar{u} < a,$$

но не выполняются [суждения] $x\bar{a} < \bar{u}$ и $x\bar{u} < \bar{a}$; в противоположность этому в случае второго вида пересечения имеют силу все четыре отношения; стало быть, этот вид пересечения является перекрещиванием.

Если мы, например, назовем всех тех [людей], которые не являются померанцами, иностранцами, а померанцев – не-иностранцами, то понятия немец и иностранец окажутся отсекающимися, так как все не-иностранцы являются немцами, а все не-немцы – иностранцами; в отличие от этого понятия животное и четырехногое существо – перекрещивающиеся.

Раздел 3

ОБРАЗОВАНИЕ УМОЗАКЛЮЧЕНИЙ

60. *Определение.* Если даны два суждения, содержащие три понятия, то, соединив эти суждения, можно вывести новое суждение; заданные суждения называются *исходными предложениями*, или *посылками* (*protásis, praemissa*), выводимое суждение – *заключением* (*syllogismós, conclusio*), а форма такого соединения – *формой умозаключения*, или *фигурой умозаключения* (*schêma*)[x].

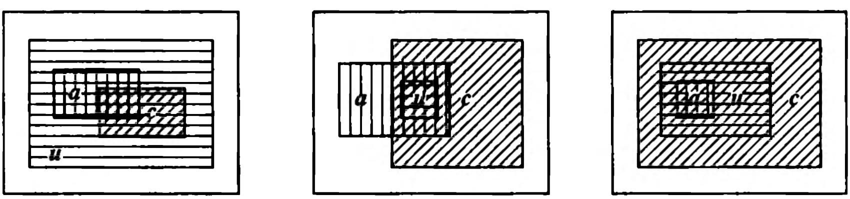
---

[x] *Определение* 195. *Умозаключением* (syllogismós, conclusio) называется соединение трех суждений и трех понятий, в котором из двух заданных суждений – *посылок* ⟨...⟩ выводится новое суждение – *заключение* (или из одного заданного суждения выводятся два [новых] суждения)[70*] и в заключении соединяются два понятия, которые в заданных суждениях еще не были соединены в одно суждение.

⟨...⟩ *Наглядное представление* видов умозаключений

$a < u \quad c < u \qquad u < a, u < c \qquad a < u, u < c$

$a + c < u \qquad u < ac \qquad a < c$



(Die Logik, 1890. S. 95).

То из трех понятий, которое присутствует в обоих заданных суждениях, называется *средним понятием* (*mésos hóros, terminus medius*), а те два, которые содержатся в заключительном предложении, – *заключительными понятиями* (*ákron, terminus conclusus*). При этом понятие о вещи (субъекте заключительного предложения) называется *меньшим понятием* (*eláttōn hóros, t. minor*), понятие о действии (предикате) заключительного предложения – *большим понятием* (*meízōn hóros, t. major*).

Из двух заданных предложений, или посылок, та, которая содержит меньшее понятие, называется меньшим предложением (*propositio minor*), а та, которая содержит большее понятие, называется большим предложением (*propositio major*). Основной формой умозаключения является форма: если $a < u$, $u < c$, значит, $a < c$. Здесь a есть меньшее, u – среднее, c – большее понятие; $a < u$ есть меньшее предложение, $u < c$ – большее предложение, $a < c$ – заключительное предложение.

Пример. Квадрат есть [некий] ромб, ромбы имеют по четыре равные стороны; стало быть, квадрат имеет четыре равные стороны.

61. Порядок заданных суждений произволен.

Доказательство. Поскольку оба исходных предложения (посылки) образуют сумму понятий, части [слагаемые], в нее входящие, можно как угодно менять местами.

62. Если для понятий, входящих в заключение, требуется построить умозаключение, то из двух заданных суждений одно должно быть общим, или:

Два частичных, или частных, суждения не позволяют построить никакого умозаключения для понятий, входящих в заключение.

Доказательство. Если даны два частичных, или частных, суждения, то их форма (согласно № **46**) такова: $xa = yu$ и $vu = zc$, где a, u и c имеют произвольные знаки; u в обоих уравнениях тоже может иметь различные знаки, а x, y, v и z – неопределенные понятия, отличные от нуля. Новое уравнение для a и c отсюда вывести нельзя, так как yu и vu могут представлять совершенно различные понятия.

Примеры. Некоторые млекопитающие имеют плавники, некоторые животные, имеющие плавники, суть щуки; отсюда *не следует*, что некоторые млекопитающие являются щуками. Некоторые люди суть незрячие существа, некоторые незрячие существа суть кроты; отсюда не следует, что некоторые люди – кроты.

63. В любом умозаключении вместо отрицания некоторого понятия можно ввести само это понятие; поэтому можно рассматривать формы умозаключений, содержащие только сами понятия (положительные понятия).

Доказательство a. Оно относится к случаю, когда среднее понятие в обоих исходных предложениях имеет один и тот же знак. Пусть заданы три понятия *a, u* и *c*, представляющие собой отрицания каких-то понятий; тогда положим $\bar{a} = a_1$, $\bar{u} = u_1$, $\bar{c} = c_1$ и введем в исходные предложения вместо отрицаний $\bar{a}$ и т.д. понятия a_1 и т.д., которые равны этим отрицаниям. После этого в исходных предложениях мы будем иметь только положительные понятия и сможем из них вывести заключительное предложение. Затем снова введем в заключительное предложение $\bar{a}$ вместо a_1, $\bar{c}$ вместо c_1, *a* вместо $\bar{a}_1$ и *c* вместо $\bar{c}_1$ (согласно № **31** и **32**); мы опять-таки получим умозаключение, связывающее заданные понятия.

Доказательство b. Оно касается случая, когда среднее понятие в обоих суждениях имеет различные знаки. Одно из исходных предложений (посылок) должно (в соответствии с № **62**) содержать какое-то общее суждение; поэтому мы можем обратить это суждение, но тогда (в соответствии с № **53**) вместе с обращением этого суждения произойдет обращение также и знаков понятий. Стало быть, среднее понятие в обоих суждениях будет иметь один и тот же знак. Значит, в соответствии с доказательством a из умозаключения могут быть удалены все отрицания понятий. Следовательно, в качестве исходных предложений можно рассматривать лишь такие, в которые входят только сами понятия (т.е. брать посылки с положительными понятиями).

Примеры. Если заданы посылки $\bar{a} < \bar{u}$, $u < c$, то, обратив первое суждение, мы получим $u < a$, $u < c$, т.е. все понятия окажутся положительными. Если заданы посылки $\bar{a} < u$, $\bar{u} < c$, то, обратив первое суждение, получим: $\bar{u} < a$, $\bar{u} < c$; положим теперь $\bar{u} = u_1$; стало быть, $u_1 < a$, $u_1 < c$; если $\bar{a} < \bar{u}$, $\bar{u} < c$, то обратив их оба, получим $c < u$, $u < a$ и т.д.

64. *Определение*. Форму умозаключения с двумя общими суждениями называют *полной* или *общей формой*, а форму умозаключения с одним общим и одним частичным суждением – *частичной* или *частной формой*.

Примеры. Полное умозаключение: Лисы суть млекопитающие, млекопитающие имеют в головном мозгу мостиковое соединение; стало быть, лисы имеют в головном мозгу мостиковое соединение.

Частичное умозаключение: Некоторые птицы суть плавающие птицы, плавающие птицы имеют плавательные перепонки; стало быть, некоторые птицы имеют плавательные перепонки. Некоторые ромбы (параллелограммы) имеют прямые углы, прямоугольные четырехугольники называются прямоугольниками; стало быть, некоторые ромбы – прямоугольники.

65. Для собственно понятий (положительных понятий) имеется четыре полных формы и четыре частичных формы [умозаключений], которые по положению среднего понятия подразделяются на внутреннюю, правую, левую и внешнюю формы.

Обзор форм умозаключений (фигур умозаключений)

	Полная форма		Частичная форма	
Первая, или внутренняя, форма умозаключений	$a < u$	$u < c$	$a < u$	$xu < c$
Вторая, или правая, форма умозаключений	$a < u$	$c < u$	$a < u$	$xc < u$
Третья, или левая, форма умозаключений	$u < a$	$u < c$	$u < a$	$xu < c$
Четвертая, или внешняя, форма умозаключений	$u < a$	$c < u$	$u < a$	$xc < u$

Аристотель различает только три первых полных формы в том порядке, в каком они здесь приведены.

66. Четыре формы умозаключений – полных умозаключений и умозаключений частичных – могут быть сведены к двум формам: к первой, или внутренней, форме и к третьей, или левой, форме.

	Полная форма		Частичная форма	
Внутренняя форма умозаключений:	$a < u$	$u < c$	$a < u$	$xu < c$
Левая форма умозаключений:	$u < a$	$u < c$	$u < a$	$xu < c$

Доказательство а. Для полных форм (для фигур общих умозаключений): во второй форме обратим оба суждения $a < u$, $c < u$; тогда (в соответствии с № **53**) получится $\overline{u} < \overline{a}$, $\overline{u} < c$; положив

$\bar{a} = a_1$, $\bar{u} = u_1$, $c = c_1$, получим $u_1 < a_1$, $u_1 < c_1$, т.е. левую, или третью, форму умозаключений. Равным образом, если в четвертой форме умозаключений обратить оба суждения $u < a$, $c < u$ (в соответствии с № 53), получив $\bar{a} < \bar{u}$, $\bar{u} < \bar{c}$, и положить $\bar{a} = a_1$, $\bar{u} = u_1$, $\bar{c} = c_1$, то получится $a_1 < u_1$, $u_1 < c_1$, т.е. внутренняя, или первая, форма умозаключений.

Доказательство b. Для частичных форм (фигур частных умозаключений): из второй формы умозаключений $a < u$, $xc < u$ посредством обращения второго суждения получается (в соответствии с № 53) $a < u$, $xu < c$, т.е. первая форма умозаключений. Из четвертой формы умозаключений: $u < a$, $xc < u$ таким же способом получается $u < a$, $xu < c$, т.е. третья, или левая, форма умозаключений.

67. ***Умозаключения относительно понятий, входящих в заключение.*** Для понятий, входящих в заключение, только внутренняя полная форма дает полные умозаключения; левая форма умозаключений дает частичные заключения; внутренняя частичная форма вообще не дает никаких заключений.

Доказательство a. Если задано $a < u$, $u < c$, то $a = xu$, $u = yc$ (согласно № 48); стало быть, $a = xu = xyc$, т.е. $a < c$ (согласно №№ 47–48).

Доказательство b. Если заданы суждения $u < a$, $u < c$, то, используя ослабление первого суждения (в соответствии с № 54), получаем $xa < u$, $u < c$, т.е. $xa < c$ (согласно доказательству a).

Доказательство c. Если $u < a$, $xu < c$, то, обращая второе суждение (согласно № 53), получаем $xc < u$, $u < a$; стало быть, $xc < a$ (в соответствии с доказательством a); следовательно, используя обращение, имеем $xa < c$.

Доказательство d. Если $a < u$, $xu < c$, то (в соответствии с №№ 46–48) имеем: $a = yu$, $xu = zc$, что ничего не говорит о взаимоотношении a и c.

Примеры. Внутренняя полная форма: кошки суть хищники, хищники имеют когти; стало быть, кошки имеют когти.

Левая полная форма: Орлы суть хищники, орлы суть птицы; стало быть, некоторые хищники – птицы.

Левая частичная форма: Коршуны суть птицы, некоторые коршуны похищают детей; стало быть, некоторые птицы похищают детей.

Внутренняя частичная форма: Орлы суть птицы, некоторые птицы имеют плавательные перепонки. Заключения об отношении орлов и птиц, имеющих плавательные перепонки, сделать нельзя.

68. Формы всех умозаключений, не сводимых к первой, или внутренней, форме ($а < и$, $и < с$), где *и* в обоих случаях имеет одинаковый знак, *а* может быть только частью [слагаемым] некоторого понятия или частным [понятием], а знаки трех понятий могут быть любыми, – не образуют для понятий, входящих в заключение, никакого умозаключения.

Доказательство и *примеры* следуют непосредственно из № 67.

69. Существует три разряда форм умозаключений:

Первый разряд (полная форма): если $а < и$, $и < с$, то $а < с$.

Второй разряд (с частичным меньшим предложением): если $ха < и$, $и < с$, то $ха < с$.

Третий разряд (с частичным большим предложением): если $и < а$, $хи < с$, то $ха < с$.

Доказательство получается непосредственно на основании № 67.

70. В каждом из этих разрядов с помощью обращения суждений можно вывести четыре формы умозаключений. В соответствии с этим имеется всего 12 форм умозаключений:

Таблица форм умозаключений

Первый разряд (полные формы)

Первая, или внутренняя, форма умозаключений:	$а < и$	$и < с$	$а < с$
Вторая, или правая, форма умозаключений:	$а < и$	$\overline{с} < \overline{и}$	
Третья, или левая, форма умозаключений:	$\overline{и} < \overline{а}$	$и < с$	
Четвертая, или внешняя, форма умозаключений:	$\overline{и} < \overline{а}$	$\overline{с} < \overline{и}$	

Второй разряд (меньшее предложение частично)

Первая, или внутренняя, форма умозаключений:	$ха < и$	$и < с$	$ха < с$
Вторая, или правая, форма умозаключений:	$ха < и$	$\overline{с} < \overline{и}$	
Третья, или левая, форма умозаключений:	$хи < а$	$и < с$	
Четвертая, или внешняя, форма умозаключений:	$хи < а$	$\overline{с} < \overline{а}$	

Третий разряд (большее предложение частично)

Первая, или внутренняя, форма умозаключения:	$\bar{\textit{а}} < \bar{\textit{и}} \quad \textit{хи} < \textit{с}$	
Вторая, или правая, форма умозаключения:	$\bar{\textit{а}} < \bar{\textit{и}} \quad \textit{хи} < \textit{с}$	$\textit{ха} < \textit{с}$
Третья, или левая, форма умозаключения:	$\textit{и} < \textit{а} \quad \textit{хи} < \textit{с}$	
Четвертая, или внешняя, форма умозаключения:	$\textit{и} < \textit{а} \quad \textit{хс} < \textit{и}$	

Примеры. Первый разряд

1. Осел есть лошадь, лошадь есть копытное животное,
2. Осел есть лошадь, ни одно некопытное животное не есть лошадь
3. Ни одна не – лошадь не есть осел, лошадь есть копытное животное,
4. Ни одна не – лошадь не есть осел, ни одно не – копытное животное не есть лошадь,

стало быть, осел есть копытное животное.

Второй разряд

1. Некоторые летающие животные суть летучие мыши, летучие мыши суть млекопитающие,
2. Некоторые летающие животные суть летучие мыши, ни одно не – млекопитающее не есть летучая мышь,
3. Некоторые мыши суть летающие животные, мыши суть млекопитающие,
4. Некоторые мыши суть летающие животные, ни одно не – млекопитающее не есть мышь,

стало быть, некоторые летающие животные суть млекопитающие

Третий разряд

1. Ни одно немлекопитающее не есть кит, некоторые киты имеют плавники, 2. Ни одно немлекопитающее не есть кит, некоторые животные, имеющие плавники, суть киты, 3. Киты суть млекопитающие, некоторые киты имеют плавники, 4. Киты суть млекопитающие, некоторые животные, имеющие плавники, суть киты.	стало быть, некоторые млекопитающие имеют плавники

71. Формы умозаключений, не содержащие отрицания вещи (отрицательного субъекта).

Поскольку старая логика игнорирует – хотя и без должных оснований – формы умозаключений, содержащие отрицания вещей, или негативные субъекты, постольку для того, чтобы непосредственно перейти к формам умозаключений старой логики, требуется совершенно устранить отрицания вещей, или отрицательные субъекты. Упомянутые формы умозаключений принимают тогда следующий облик.

Формы умозаключений, не содержащие отрицания вещи (отрицательного субъекта)

Форма умозаключения	*Первый разряд* (полная форма)	*Второй разряд* (с частичным меньшим предложением)
Первая, или внутренняя	$a < u$, $u < c$, следовательно, $a < c$	$xa < u$, $xu < c$, следовательно, $xa < c$
Вторая, или правая	$a < u$, $c < \bar{u}$, следовательно, $a < \bar{c}$	$xa < u$, $c < \bar{u}$, следовательно $xa < \bar{c}$
Третья, или левая	отсутствует	$xu < a$, $u < c$, следовательно $xa < c$
Четвертая, или внешняя	$u < \bar{a}$, $c < u$, следовательно, $a < \bar{c}$	$xu < a$, $c < \bar{u}$, следовательно, $xa < \bar{c}$.

Третий разряд (предложение частично большее)

Первая, или внутренняя	отсутствует
Вторая, или правая	отсутствует
Третья, или левая	$u < a$, $xu < c$, следовательно, $xa < c$
Четвертая, или внешняя	$u < a$, $xc < u$, следовательно, $xa < c$.

72. Третья форма умозаключений первого разряда, первая и вторая формы третьего разряда, в которых нельзя избежать отрицания вещи, или отрицательного субъекта, отсутствуют в старой логике. Это следующие формы:

$\bar{u} < \bar{a}$, $u < c$, следовательно, $a < c$; $\bar{a} < \bar{u}$, $xu < c$, следовательно, $xa < c$;

$\bar{a} < \bar{u}$, $xc < u$, следовательно, $xa < c$

73. *Формы умозаключений старой логики.*

Старая логика разделяет каждую форму на две фигуры в зависимости от знака действия, или предиката. Кроме того, она присоединяет к упомянутым выше умозаключениям еще четыре ослабленных, в которых предполагается больше, чем требуется для получения заключения. Наконец, она обозначает каждую форму некоторым словом, содержащим три гласные буквы, из которых первая обозначает большее предложение, вторая – меньшее, а третья – заключительное предложение. А именно в соответствии с правилом, приведенным в **№ 51**: *a* обозначает полное утверждение (affirmatio universalis), *e* – полное отвержение (negatio univ[ersalis]), *i* – частичное утверждение (affirm[atio] particularis), *o* – частичное отвержение (negatio partic[ularis]). Тогда получается следующая общая схема:

Обзор фигур умозаключений старой логики[71*]

Фигура умозаключения.

	Первый разряд	Второй разряд
1	$a < u$, $u < c$, следовательно, $a < c$: **barbara**.	$xa < u$, $u < c$, следовательно, $xa < c$; **darii.**
	$a < u$, $u < \bar{c}$, следовательно, $a < \bar{c}$: **celarent**.	$xa < u$, $u < \bar{c}$, следовательно, $xa < \bar{c}$; **ferio**.
2	$a < u$, $c < \bar{u}$, следовательно, $a < \bar{c}$: **cesare**.	$xa < u$, $c < \bar{u}$, следовательно, $xa < \bar{c}$; **festino**.
	$a < \bar{u}$, $c < u$, следовательно, $a < \bar{c}$; **camestres**.	$xa < \bar{u}$, $c < u$, следовательно, $xa < \bar{c}$; **baroco**.

3	отсутствует	$xu < a$, $u < c$, следовательно, $xa < c$: **datisi**.
	отсутствует	$xu < a$, $u < \bar{c}$, следовательно, $xa < \bar{c}$: **ferison**.
4	$u < \bar{a}$, $c < u$, следовательно, $a < \bar{c}$: **calentes**.	$xu < a$, $c < \bar{u}$, следовательно, $xa < \bar{c}$: **fresison**.

Третий разряд

1 отсутствует
отсутствует

2 отсутствует
отсутствует

3 $u < a$, $xu < c$, следовательно, $xa < c$: **disamis**.
$u < a$, $xu < \bar{c}$, следовательно, $xa < \bar{c}$: **bocardo**.

4 $u < a$, $xc < u$, следовательно, $xa < c$: **dibatis**.

Ослабленные умозаключения

	Второй разряд	Третий разряд
3	$u < a$, $u < \bar{c}$, следовательно, $xa < \bar{c}$: **felapton**.	$u < a$, $u < c$, следовательно, $xa < c$: **darapti**.
4	$u < a$, $c < \bar{u}$, следовательно, $xa < \bar{c}$: **fesapo**.	$u < a$, $c < u$, следовательно, $xa < c$: **baralip**.

Первую фигуру[72*] называют *dictum de omni et nullo*, вторую – *dictum de diverso*, третью – *dictum de exemplo*, четвертую – *dictum de reciproco*. Стало быть, все фигуры умозаключений получаются путем чистого оперирования формами.

Примеры. Первый разряд

1.	barbara:	Осел есть лошадь, лошадь есть копытное; стало быть, осел есть копытное.
	celarent:	Осел есть лошадь, ни одна лошадь не имеет раздвоенных копыт; стало быть, и ни один осел не имеет раздвоенных копыт.
2.	cesare:	Лошадь есть копытное [животное], ни одно существо, имеющее лапы, не есть копытное; стало быть, ни одна лошадь не есть существо, имеющее лапы.
	camestres:	Ни одна лошадь не имеет раздвоенных копыт, жвачные животные суть имеющие раздвоенные

копыта; стало быть, ни одна лошадь не является жвачным животным.

3. calemes: Ни одна болотная птица не является водоплавающей, аист есть болотная птица; стало быть, ни одна водоплавающая птица не является аистом.

Второй разряд

1. darii: Некоторые хищные птицы суть совы, совы суть ночные птицы; стало быть, некоторые хищные птицы являются ночными птицами.

ferio: Некоторые хищные птицы суть совы, ни одна сова не является дневной птицей; стало быть, некоторые хищные птицы не являются дневными птицами.

2. festino: Некоторые водоплавающие птицы суть утки, ни один лебедь не есть утка; стало быть, некоторые водоплавающие птицы не являются лебедями.

baroco: Некоторые люди суть безбожники (не благочестивы), добрые люди суть благочестивые люди; стало быть, некоторые люди не добры.

3. datisi: Некоторые лицемеры суть друзья, лицемеры суть негодяи; стало быть, некоторые друзья – негодяи.

ferison: Некоторые лицемеры – друзья, ни один лицемер не добр; стало быть, некоторые друзья не добры.

4. fresison: Некоторые лицемеры суть друзья, ни один честный человек не лицемер; стало быть, некоторые друзья не честные люди.

Ослабленные:

3. felapton: Лошади – млекопитающие, ни одна лошадь не есть жвачное животное; стало быть, некоторые млекопитающие – не жвачные.

4. fesapo: Лошади суть млекопитающие, ни одно жвачное не есть лошадь; стало быть, некоторые млекопитающие животные не жвачные.

Третий разряд

3. disamis: Жуки суть насекомые (инсекты), некоторые жуки – водные животные; стало быть, некоторые насекомые – водные животные.

bocardo: Жуки суть насекомые, некоторые жуки не приносят вреда; стало быть, некоторые насекомые не приносят вреда.

4. dimatis: Жуки суть насекомые, некоторые водяные животные – жуки; стало быть, некоторые насекомые – водные животные.

Ослабленные:

3. darapti: Киты суть млекопитающие, киты имеют плавники; стало быть, некоторые млекопитающие имеют плавники.
4. bamalip: Киты суть млекопитающие, моржи суть киты; стало быть, некоторые млекопитающие – моржи.

Примеры такого рода легко образовывать, и это необычайно развивает остроту ума, поэтому следует рекомендовать как можно больше прибегать к таким примерам.

74. *Цепное умозаключение* (индуктивное умозаключение).

$a_1^* < a_n^*$, если $a_a < a_{a+1}$, или:

Если в какой-либо последовательности понятий каждое предшествующее равно непосредственно последующему, или включено в него, то первое понятие равно или подчинено каждому последующему.

Доказательство. Если это предложение справедливо для некоторого произвольного понятия a_m, так что $a_1 < a_m$, то оно справедливо также и для непосредственно последующего понятия a_{m+1}; ибо

$a_1 < a_m$	(согласно допущению) и
$a_m < a_{m+1}$	(дано)
поэтому и $a_1 < a_{m+1}$	(согласно 125)[73*].

Если теперь $a_1 < a_2$, то, стало быть, понятие a_1 равно или подчинение также и понятию, непосредственно следующему [за a_2] и каждому последующему, что и требовалось доказать.

Умозаключения, в которых участвуют суммы и произведения

75. Суммирующее умозаключение

$[a<c]\dot{+}[u<c]\doteq[(a+u)<c]$.

Если два понятия подчинены некоторому третьему, то и сумма этих понятий подчинена третьему понятию и

Если сумма двух понятий подчинена некоторому третьему понятию, то и каждое из обоих понятий подчинено этому третьему понятию.

Доказательство a. Если $a < c$, то $a + c = c$, если же $u < c$, то $u + c = c$ (согласно **15**); стало быть, имеет место:

$$c = c + c \qquad \text{(согласно № 5)}$$
$$= a + c + u + c \qquad \text{(согласно № 5)}$$
$$= a + u + c \qquad \text{(согласно № 5)}$$

т.е.

$$(a + u) < c \qquad \text{(согласно № 15)}$$

Доказательство b. Если $(a + u) < c$, то $a < (a + u)$, $(a + u) < c$; стало быть, $a < c$; таким же образом получается, что $u < c$.

Примеры. Датчане суть немцы, шведы суть немцы; стало быть, датчане и шведы суть немцы. Обратно: франки и бритты суть кельто-германцы; стало быть, франки суть кельто-германцы и бритты суть кельто-германцы.

Такие суммирующие умозаключения порождают *суммирующие суждения* (например, «Вошли Карл, Генрих и Фридрих», или «Вошли как Карл и Генрих, так и Фридрих»); или, в форме условного предложения, если это есть, если то есть, если это наступает и т.д., то также и ...[наступает].

Суждения вида $a < (u + c)$, где u и c совпадают или одно из них включено в другое, не дают ничего нового, они и в мыслительном отношении пусты; если же u есть понятие, включающееся в c, то достаточно суждения $a < c$. Если, напротив, u и c не равны и не являются включающимися понятиями, а представляют собой понятия внеположные, то суждения вида $a < (u + c)$ называются *разделяющими*, или *дизъюнктивными*, суждениями. Языковая форма их такова: a есть либо u, либо c (например, каждый прямоугольник есть либо равносторонний, либо неравносторонний; каждое слово имеет либо одно, либо много значений; каждая величина либо равна, либо не равна некоторой другой).

76. *Продуктивное умозаключение*

$$[a < u] \dot{+} [a < c] \doteq [a < uc].$$

Если одно понятие подчинено двум другим понятиям, то оно подчинено также и произведению этих понятий.

Если понятие подчинено произведению [двух признаков] или произведению двух понятий, то оно подчинено также и каждому из этих двух признаков[74*].

Доказательство a. Если $a < u$, то $a = au$, если же $a < c$, то $a = ac$ (согласно **19**); следовательно, $a = ac = auc$, т.е. $a < uc$ (согласно **19**).

Доказательство b. Если $a < uc$, и $uc < c$, то $a < c$; и так же показывается, что $a < u$.

Примеры. Человек есть одухотворенное существо, человек есть конечное существо; стало быть, человек есть конечное одухотворенное существо. Животное есть органическое тело, животное обладает свободой передвижения; стало быть, животное есть органическое тело, обладающее свободой передвижения. Прямоугольник есть ромб (параллелограмм), прямоугольник имеет прямые углы; стало быть, прямоугольник есть ромб с прямыми углами.

Каждый новый признак, открытый у некоторой вещи, соединяется с помощью умножения. *Определение*, или *дефиниция*, некоторой вещи таким путем создает произведение, состоящее из всех признаков, которые приписываются этой вещи. Таково, например, определение: прямоугольный параллелепипед[75*], или квадрат, есть ромб с равными сторонами и прямыми углами; таково и определение: лошадь есть позвоночное животное, выкармливающее детенышей молоком, на каждой ноге которого имеется только одно копыто.

Произведение признаков не находит, однако, выражения в языке; в нем отсутствует также выражение для суммы, и надо поэтому очень остерегаться, чтобы не принять за суммирующее суждение то, что на деле есть суждение продуктивное, или произведение. Так, например, суждение: тело обладает длиной, шириной и толщиной, кажется имеющим форму некоторого суммирующего суждения, однако таковым не является, – оно есть продуктивное суждение, ибо тело не есть сумма вещей, одни из которых имеют только длину, другие только ширину, или только толщину, короче, имеют только одну из протяженностей. Тело относится к тем вещам, которые имеют все три протяженности – длину, ширину и толщину, т.е. обладают произведением [признаков]: длины, ширины и толщины. Иллюзия суммы в этом предложении проистекает из его структуры. Ибо продуктивное суждение $a < ucd$ равно сумме трех суждений $[a < u] \dot{+} [a < c] \dot{+} [a < d]$ – в соответствии с № 76, и эти три суждения язык склеивает в одно предложение. Возникающее так сложное предложение, стало быть, есть не суммирующее суждение, а сумма многих суждений. Если бы вещи, или субъекты, были склеены [в одно суждение], например, a, u и c были бы d, то эта сумма дала бы суммирующее суждение; ибо $[a < d] \dot{+} [u < d] \dot{+} [c < d] \doteq [(a + u + c) < d]$ (согласно 75). Если же склеиваются действия, или предикаты, например, u,

c и d, то их сумма дает продуктивное суждение, ибо $[a<u]\dot{+}[a<c]\dot{+}[a<d]\doteq[(a<ucd)]$ (согласно **76**).

В языке форма суммы суждений особенно хорошо выражена тогда, когда признаки представляют собой пересекающиеся понятия, например, прямоугольный параллелограмм, или квадрат, есть ромб с прямыми углами (стало быть, прямоугольник) и с равными сторонами (стало быть, некоторый ромб). В противоположность этому она не выявляется, если предшествующий признак с помощью непосредственно последующего признака расчленяется на дальнейшие подразделения. Так, например, прямоугольный параллелограмм, или квадрат, есть прямоугольник с равными сторонами; лошадь есть млекопитающее копытное животное. Ибо млекопитающие подразделяются на имеющих плавники, копытных, имеющих лапы и имеющих руки.

77. Из числа четырех форм умозаключений, представленных в № **66**, только левая полная форма дает для сумм и произведений полные умозаключения; другие формы дают только частичные умозаключения, а внутренняя частичная форма для произведений умозаключения не образует.

Обзор умозаключений, касающихся сумм и произведений.

Форма умозаключения	Формула	Суммирующее умозаключение	Умозаключение, образующее произведение
1. Левая полная форма	$u<a, u<c$	$(\bar{a}+\bar{c})<\bar{u}$	$u<ac$
2. Левая частичная форма	$u<a, xu<c$	$(xa+yc)<u$	$xu<ac$
3. Внутренняя полная форма	$a<u, u<c$	$(a+xc)<u$	$xu<ac$
4. Внутренняя частичная форма	$a<u, xu<c$	$(a+xc)<u$	нет заключения

Доказательство а. Суммирующие умозаключения

1. Если $u<a$ и $u<c$, то, применяя обращение, получаем $\bar{a}<\bar{u}$ и $\bar{c}<\bar{u}$; стало быть $(\bar{a}+\bar{c})<\bar{u}$.
2. Если $u<a$ и $xu<c$, то, применяя обращение, получаем $xa<u$ и $yc<u$; стало быть $(xa+yc)<u$.

3. Если $a < u$ и $u < c$, то, применяя обращение, получаем $a < u$ и $xc < u$; стало быть, $(a + xc) < u$.
4. Если $a < u$ и $xu < c$, то имеет место то же самое.

Доказательство b. Умозаключения, образующие поизведения

1. Если $u < a$ и $u < c$, то $ua < ac$ (согласно **76**)
2. Если $u < a$ и $xu < c$, то $xu < a$ и $xu < ac$; стало быть, $xu < ac$.
3. Если $a < u$ и $u < c$, то, применяя обращение, получаем $xu < a$ и $xu < c$; стало быть, $xu < ac$.
4. Если $a < u$ и $xu < c$, то, применяя обращение, получаем $yu < a$ и $xu < c$; стало быть, $yxu < a$, это значит, что поскольку x и y могут быть дизъюнктны, т.е. $yx = 0$, в этом случае [из посылок] ничего не следует.

Примеры.

1. Суммирующее умозаключение: квадрат есть прямоугольник, прямоугольный параллелограмм есть ромб; стало быть, ни один не-прямоугольник и ни один не-ромб не есть прямоугольный параллелограмм.

Продуктивное умозаключение: Прямоугольный параллелограмм есть прямоугольник, прямоугольный параллелограмм есть ромб; стало быть, прямоугольный параллелограмм есть прямоугольник с равными сторонами.

2. Суммирующее умозаключение: Немцы суть европейцы; некоторые немцы суть американцы; стало быть, некоторые европейцы и некоторые американцы – немцы.

Продуктивное умозаключение: Немцы суть европейцы, некоторые немцы суть американцы; стало быть, некоторые немцы суть европейцы, живущие в Америке.

3. Суммирующее умозаключение: Быки [коровы, крупный рогатый скот] суть жвачные животные, жвачные животные суть млекопитающие; стало быть, быки [коровы, крупный рогатый скот] и некоторые млекопитающие суть жвачные животные.

Умозаключение, образующее произведение: крупный рогатый скот суть жвачные животные, жвачные животные суть млекопитающие; стало быть, некоторые жвачные животные суть крупный рогатый скот, выкармливающий детенышей молоком.

4. Суммирующее умозаключение: Олени имеют рога, некоторые животные, имеющие рога, суть домашние животные; стало быть, олени и некоторые домашние животные имеют рога.

78. *Разделительное умозаключение. Косвенное умозаключение.* Если некоторое понятие подчинено сумме двух понятий и вместе с тем отрицанию (негации) одного из них, то оно подчинено другому понятию или:

Если $a < (u + c)$ и $a < \bar{u}$, то $a < c$.

Доказательство. Поскольку $a < (u + c)$, то

$a = a(u + c)$ (согласно **19**)

$= au + ac$ (согласно **2**)

$= ac$ (согласно **33**),

т.е. $a < c$.

Примеры. Каждый треугольник либо имеет прямой угол, либо все его углы косые [schief]; и если он не имеет прямого угла, то, значит, имеет косые углы.

Некоторая сторона [треугольника] либо равна другой стороне, либо меньше нее, либо больше нее; и если она не равна другой стороне и не меньше нее, то, значит, она больше нее.

Каждое животное имеет или плавники, или ноги, или крылья, или является позвоночным. Отсюда следует: поскольку рак не есть ни животное, имеющее плавники, ни животное, имеющее крылья, ни позвоночное животное, то, значит, рак есть животное, имеющее ноги.

79. Если произведение двух понятий, а также отрицание (негация) одного из них подчинены некоторому третьему понятию, то второе понятие тоже подчинено этому третьему понятию, или

Если $au < c$ и $\bar{a} < c$, то $u < c$.

Доказательство. Положим $u = au + u_1$, где u_1 и a дизъюнктны; тогда (в соответствии с № **33**) $u_1 < \bar{a}$, $\bar{a} < c$; стало быть, $u_1 < c$. Однако и $au < c$; стало быть, и сумма $(au + u_1) < c$, т.е. и $u < c$.

Примеры. Дети Божьи, наделенные телом, одухотворенные существа; и дети Божьи, не наделенные телом, одухотворенные существа; стало быть, все дети Божьи суть одухотворенные существа.

80. Если $a + c = u + c$, а также $a < c$ и $u < c$, то $a = u$.

Если две суммы, состоящие каждая из двух внеположных (дизъюнктных) понятий, равны, и одна из их частей [слагаемых] в них одинакова, то одинакова и другая часть [слагаемое].

Доказательство. Имеет место

$a = a(a + u)$ (согласно № **5** и в соответствии с **19**)

$= a(c + u)$ (согласно допущению)

$= ac + au$ (согласно **2**)

$a = au$ (так как согласно **33**, $ac = 0$),

стало быть, $a < u$.

Аналогично следует $u < a$; стало быть, $a = u$ (согласно **21**).

Пример. Жвачные животные и лошади не равны рогатым животным.

Ни одно жвачное животное не есть лошадь; ни одно животное, имеющее рога, не есть лошадь; стало быть, все жвачные животные равны животным, имеющим рога.

На этом заканчивается учение об умозаключениях[76*], а тем самым находит завершение и учение о понятиях. Дальнейшее формирование понятий предполагает учение о сущности, которое будет рассмотрено в учении о знании[77*]. Здесь достаточно сослаться на него.

РЕШЕНИЕ ЛОГИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

Математики, которые развивали логику с помощью формул, создали, следуя подходу Буля, законченное учение о логических формулах и уравнениях; это учение очень интересно для математиков, для логики же оно само по себе имеет небольшое значение и в дальнейшем[1*] использоваться не будет.

Теорема 105[2*]. $b = xa + y\bar{a}$; $b = (x + \bar{a})(y + a)$. Каждую величину можно выразить через любую другую величину и ее отрицание, а именно – или в виде суммы двух произведений, или в виде произведения двух сумм; в обоих случаях величина a просто сочленяется с некоей величиной x, а величина $\bar{a}$ – с некой величиной y.

Доказательство[3*].

1. Имеет место:

$b = b \cdot 1 = b(a + \bar{a})$	[так как $b \cdot 1 = b$; $1 = (a + \bar{a})$]
$= ba + b\bar{a}$	[в силу дистрибутивности умножения]
$= (ab + u\bar{a})a + (\bar{a}b + va)\bar{a}$,	[так как $a \cdot \bar{a} = 0$]

где u и v означать произвольные величины, а $x = ab + u\bar{a}$, $y = \bar{a}b + va$.

2. Имеет место:

$(x + \bar{a})(y + a) = xy + xa + y\bar{a} + \bar{a}a$	[в силу дистрибутивности умножения относительно сложения]
$= xy + xa + y\,\bar{a}$	[так как $a \cdot \bar{a} = 0$]
$= xy + b$	(согласно 105.1)
$= b$.	

Теорема 105*a*. $f \circ a = xa + y\bar{a}$[4*]. Каждую логическую формулу, зависящую от a, можно привести к уравнению первой степени вида: $xa + y\bar{a}$, где x и y не зависят от a.

Доказательство. 1. Непосредственно из № 105б, так как $f \circ a$ есть некоторая величина b. 2. Однако доказательство можно провести и иначе, разложив $f \circ a$, какой бы вид она ни имела, и, используя при этом многократные сложения и умножения величин, придти к формам ua и $v\bar{a}$, что, после удаления всех скобок, принимает вид:

$$f \circ a = S_{1,n} u_{\mathfrak{a}} \mathfrak{a}^{\mathfrak{a}} + S_{1,m} v_{\mathfrak{b}} \bar{\mathfrak{a}}^{\mathfrak{a}} + S_{1,p} w_{\mathfrak{c},\mathfrak{p}-\mathfrak{r}} u^{\mathfrak{c}} \bar{a}^{(\mathfrak{p}-\mathfrak{c})}$$

$$= (S_{1,n} u_{\mathfrak{a}}) a + (S_{1,m} v_{\mathfrak{b}}) \bar{a} + (S_{1,p} w_{\mathfrak{r},\mathfrak{p}-\mathfrak{c}}) a\bar{a}$$ [в соответствии с тем, что $a = Pa_{1,n} = a \cdot a \cdot, \ldots, \cdot a$]

$$= (S_{1,n} u_{\mathfrak{a}}) a + (S_{1,m} v_{\mathfrak{b}}) \bar{a}.$$ (в соответствии с тем, что $a\bar{a} = 0$)

Положив $S_{1,n} u_{\mathfrak{a}} = x$, а $S_{1,m} v_{\mathfrak{b}} = y$, мы получаем выписанное выше уравнение.

Предложение 105b.

$$f \circ (a, b, c, \ldots, m,\ n) = (f \circ (a, b, c, \ldots, m))(x_n n + y_n \bar{u})$$

$$= (x_1 a + y_1 \bar{a})(x_2 b + y_2 \bar{b})(x_3 c + y_3 \bar{c}) \ldots (x_n n + y_n \bar{n})$$

Каждая логическая формула, содержащая n величин $a, b, c, \ldots, m, n$, равна соответствующей формуле, содержащей $(n-1)$ величину $a, b, c, \ldots, n$, перемноженной с суммой $xn + yn$.

Доказательство следует непосредственно из 105*a*.

105c. *Определение.* Формулы $f \circ 1$ и $f \circ 0$ обозначают формулу $f \circ a$ в которой a положено равным 1 или 0 соответственно; a^1 будет обозначать величину a, a^0 – величину $\bar{a}$.

Формула $f \circ (1,0,0,\ldots,1)$ обозначает соответствующую формулу $f \circ (a,b,c,\ldots,m)$, если в ней $a = 1$, $b = 0$, $c = 0$, …, $m = 1$ и т.д.

Мы будем называть такие формулы *протовеличинами* (коэффициентами).

Произведение $a^1 \cdot b^0 \cdot c^0 \cdots m = a \cdot \bar{b} \cdot \bar{c} \cdots m$ мы будем называть соответствующими основными величинами (конституентами).

Формула суммы $S_{1,n} f \circ (\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \ldots, \mathfrak{m})(a^{\mathfrak{a}} b^{\mathfrak{b}} c^{\mathfrak{c}}, \ldots, m^{\mathfrak{m}})$ означает сумму произведений, которые получаются, когда каждая из величин $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, …, $\mathfrak{m}$ по порядку сначала приравнивается единице, а потом нулю.

Теорема 105*d*. $f \circ a = (f \circ 1) \cdot a + (f \circ 0)\bar{a}$, $f \circ a = S_{1,0}(f \circ a)) \cdot a^{\mathfrak{a}}$.
Каждая логическая формула одной величины равна величине *та*1 соответствующей формулы от 1 плюс отрицание величины *та*1 соответствующей формулы от 0.

Доказательство. $f \circ a = xa + y\bar{a}$ (согласно 105а)

Но имеет силу: $f \circ 1 = x1 + y\bar{1} = x + 0 = x$ [так как $\bar{1} = 0$]

$f \circ 0 = x0 + y0 = 0 + y \cdot 1 = y$ [так как $\bar{0} = 1$]

поэтому $f \circ a = (f \circ 1) \cdot a + (f \circ 0) \circ \bar{a}$.

Это предложение было впервые сформулировано и обосновано Булем.

Теорема 105*e*.

$$S_{1,0}a^{\mathfrak{a}}b^{\mathfrak{b}}c^{\mathfrak{c}},\ldots,\mathfrak{n}^{\mathfrak{n}} = (a+\bar{a})(b+\bar{b})(c+\bar{c})\ldots(n+\bar{n}) = 1.$$

Логическая сумма всех основных величин (конституент) для *n* величин равна единице.

Доказательство.

$1 = (a+\bar{a})(b+\bar{b})(c+\bar{c})\ldots(n+\bar{n})$ [так как, $a + \bar{a} = 1$ для любой величины *a*]

$= S_{1,0}a^{\mathfrak{a}}b^{\mathfrak{b}}c^{\mathfrak{c}}, \ldots, n^{\mathfrak{n}}$ [в силу дистрибутивности умножения относительно сложения].

Теорема 105*f*.

$$f \circ (a,b,c,\ldots n) = Sf \circ (\mathfrak{a},\mathfrak{b},\mathfrak{c}\ldots\mathfrak{n}) \cdot (a^{\mathfrak{a}}b^{\mathfrak{b}}c^{\mathfrak{c}}\ldots n^{\mathfrak{n}}).$$

Если взять сумму произведений, полученных полаганием в соответствующей формуле каждой из величин *a, b, c, …, n* сначала равной единице, а потом – нулю, и каждую из этих формул умножить на соответствующие произведения $a^{\mathfrak{a}}$, $b^{\mathfrak{b}}$, $c^{\mathfrak{c}}$, …, $n^{\mathfrak{n}}$, где $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, …, $\mathfrak{n}$ соответственно полагаются равными 1 или 0, то в результате будет получена логическая формула от *n* величин *a, b, c, …, n*.

Доказательство – поступательное (индуктивное) относительно числа величин.

Если это утверждение верно для *m* величин (*a, b, c, …, m*) (допущение), то оно верно и для равенства, содержащего на одну величину больше, т.е. для *m* + 1 величины (*a, b, c, …, m, n*) (следствие); ибо

$$f\circ(a,b,c\ldots m,n) = (f\circ(a,b,c,\ldots)m)(xn+yn) = \quad \text{(согласно 105b)}$$

$$= S_{1,0} f\circ(a,b,c\ldots m,1) = (a^{\mathfrak{a}}\cdot b^{\mathfrak{b}}\cdot c^{\mathfrak{c}}\cdots m^{\mathfrak{m}}))(xn+y\bar{n}) \quad \text{(допущение)}$$

$$= S_{1,0} f\circ(a,b,c,\ldots,m,1)(a^{\mathfrak{a}}\cdot b^{\mathfrak{b}}\cdot c^{\mathfrak{c}}\cdots m^{\mathfrak{m}})n +$$

$$+ S_{1,0} f\circ(a,b,c,\ldots,m,0)(a^{\mathfrak{a}}\cdot b^{\mathfrak{b}}\cdot c^{\mathfrak{c}}\cdots m^{\mathfrak{m}})\bar{n} \quad \text{(согласно 105d)}$$

$$= S_{1,0} f\circ(a,b,c,\ldots,m,n)(a^{\mathfrak{a}}\cdot b^{\mathfrak{b}}\cdot c^{\mathfrak{c}}\cdots m^{\mathfrak{m}}\cdot n^{\mathfrak{n}}) \quad \text{(согласно 105c).}$$

Теорема 105*g*.

$$f\circ(a,b) = f\circ(1,1)ab + f\circ(1,0)ab + f\circ(0,1)\bar{a}b + f\circ(0,0)\bar{a}\bar{b}.$$

Доказательство следует непосредственно из 105*f*.

Теорема 105*h*.

$$f\circ(a,b,c) = f\circ(1,1,1)abc + f\circ(1,1,0)abc + f\circ(1,0,1)abc +$$

$$+ f\circ(1,0,0)abc + f\circ(0,1,1)\bar{a}bc + f\circ(0,1,0)\bar{a}bc +$$

$$+ f\circ(0,0,1)\bar{a}bc + f\circ(0,0,0)\bar{a}bc.$$

Доказательство следует непосредственно из 105f.

Теорема 105*i*.

$$f\circ(a,b,c,\ldots,n) + f'\circ(a,b,c,\ldots,n)$$

$$= S_{1,0}(f\circ(\mathfrak{a},\mathfrak{b},\mathfrak{c},\ldots\mathfrak{n}) + f'\circ(\mathfrak{a},\mathfrak{b},\mathfrak{c},\ldots\mathfrak{n}))\cdot(a^{\mathfrak{a}}\cdot b^{\mathfrak{b}}\cdot c^{\mathfrak{c}}\cdots m^{\mathfrak{m}}\cdot n^{\mathfrak{n}}).$$

Чтобы сложить две логические формулы, содержащие одни и те же *n* величины, достаточно сложить друг с другом коэффициенты при каждой конституенте, а полученную сумму с данным конституентом перемножить.

Доказательство непосредственно следует [из дистрибутивности умножения относительно сложения].

Теорема 105*k*.

$$(f\circ(a,b,c\ldots,n))\cdot(f'\circ(a,b,c,\ldots,n)) =$$

$$= S_{1,0}(f\circ(\mathfrak{a},\mathfrak{b},\mathfrak{c},\ldots\mathfrak{n}) + f'\circ(\mathfrak{a},\mathfrak{b},\mathfrak{c},\ldots\mathfrak{n}))\cdot(a^{\mathfrak{a}}\cdot b^{\mathfrak{b}}\cdot c^{\mathfrak{c}}\cdots n^{\mathfrak{n}}).$$

Чтобы перемножить две логические формулы, содержащие одни и те же *n* величин, нужно перемножить коэффициенты при каждой конституенте, а полученное произведение умножить на данную конституенту.

Доказательство. Произведение любых двух различных конституент равно нулю, так как в них по крайней мере одна из величин a, b, c, ..., n должна встречаться с противоположными знаками (например, a и $\bar{a}$) и, значит, обращаться в нуль. Таким образом, остаются только произведения двух одинаковых конституент, и они равны данной конституенте. Поэтому для каждой конституенты можно образовать только произведение двух коэффициентов.

Теорема 105. *l*.

$$f^{-} \circ (a,b,c\ldots,n) = S_{1,0}(f^{-} \circ (\mathfrak{a},\mathfrak{b},\mathfrak{c},\ldots\mathfrak{n}) \cdot (a^{\mathfrak{a}} \cdot b^{\mathfrak{b}} \cdot c^{\mathfrak{c}} \cdots n^{\mathfrak{n}})).$$

Чтобы получить отрицание формулы, содержащей n величин, достаточно в каждом члене первоначальной суммы, представлявшей эту формулу, заменить коэффициенты их отрицаниями.

Доказательство. Имеет место:

a. $f \circ (a,b,c,\ldots n) + S_{1,0} f^{-} \circ (\mathfrak{a},\mathfrak{b},\mathfrak{c},\ldots\mathfrak{n})(a^{\mathfrak{a}} \cdot b^{\mathfrak{b}} \cdot c^{\mathfrak{c}} \cdots n^{\mathfrak{n}})$

$$= S_{1,0}((f \circ (\mathfrak{a},\mathfrak{b},\mathfrak{c},\ldots\mathfrak{n}) + f^{-} \circ (\mathfrak{a},\mathfrak{b},\mathfrak{c},\ldots\mathfrak{n})) \cdot (a^{\mathfrak{a}} \cdot b^{\mathfrak{b}} \cdot c^{\mathfrak{c}} \cdots n^{\mathfrak{n}}).$$

(согласно 105*f* и 105*i*)

$$= S_{1,0} a^{\mathfrak{a}} \cdot b^{\mathfrak{b}} \cdot c^{\mathfrak{c}} \cdots n^{\mathfrak{n}}$$

$$= (a+\bar{a})(b+\bar{b})(c+\bar{c})\ldots(n+\bar{n}) = 1$$

$$= f \circ (a,b,c,\ldots,n) + f^{-} \circ (a,b,c,\ldots,n).$$

b. $(f \circ (a,b,c,\ldots,n))[S_{1,0} f^{-} \circ (\mathfrak{a},\mathfrak{b},\mathfrak{c},\ldots\mathfrak{n}) \cdot (a^{\mathfrak{a}} \cdot b^{\mathfrak{b}} \cdot c^{\mathfrak{c}} \cdots n^{\mathfrak{n}})]$

$$= S_{1,0}[(f \circ (a,b,c,\ldots,n))] \cdot f^{-} \circ (\mathfrak{a},\mathfrak{b},\mathfrak{c},\ldots\mathfrak{n}) \cdot (a^{\mathfrak{a}} \cdot b^{\mathfrak{b}} \cdot c^{\mathfrak{c}} \cdots n^{\mathfrak{n}})$$

$$= 0$$

$$= [(f \circ (a,b,c,\ldots,n))] \cdot [(f^{-} \circ (a,b,c,\ldots,n))].$$

c. Таким образом,

$$f^{-} \circ (a,b,c,\ldots,n) = S_{1,0} f^{-} \circ (a,b,c,\ldots,n) \cdot (a^{\mathfrak{a}} \cdot b^{\mathfrak{b}} \cdot c^{\mathfrak{c}} \cdots n^{\mathfrak{n}}),$$

что и требовалось доказать.

При образовании отрицания формулы надо следить за тем, чтобы в сумме, представляющей данную формулу, встречались все конституенты. Если в первоначальной формуле отсутствовала какая-либо конституента, например $a, b, c, \ldots n$, то ее коэффициент является нулем и поэтому в отрицании формулы коэффициент этой конституенты обратится в 1 и соответствующее слагаемое в отрицании этой формулы нельзя будет отбросить.

Впервые это предложение для двух величин a и b сформулировал и доказал профессор Шрёдер в сочинении «Сфера операций логического исчисления» (Лейпциг, 1877).

Теорема 105*m*. Каждую логическую формулу (функцию), содержащую n величин, можно привести к нулю, умножив формулу на ее отрицание, или, что то же самое, умножив коэффициенты при каждом члене суммы, представляющей эту формулу, на их отрицания. Каждый коэффициент обращается тогда в нуль; после этого, однако, каждая конституента может быть умножен на любой коэффициент, если последний, перемноженный с данной конституентой, приводит к нулю.

Доказательство.

$$0=(f\circ(a,b,c,\ldots,n))(f^{-}\circ(a,b,c,\ldots,n))$$

$$=(S_{1,0}(f\circ(\mathfrak{a},\mathfrak{b},\mathfrak{c},\ldots\mathfrak{n}))\cdot f^{-}\circ(\mathfrak{a},\mathfrak{b},\mathfrak{c},\ldots\mathfrak{n}))+$$

$$+P_{\mathfrak{a},\mathfrak{b},\mathfrak{c},\ldots,\mathfrak{n}})\cdot(a^{\mathfrak{a}}\cdot b^{\mathfrak{b}}\cdot c^{\mathfrak{c}}\cdots n^{\mathfrak{n}})$$

для какого угодно $P_{\mathfrak{a},\mathfrak{b},\mathfrak{c},\ldots,\mathfrak{n}}$, если $(P_{\mathfrak{a},\mathfrak{b},\mathfrak{c},\ldots,\mathfrak{n}})\,(a^{\mathfrak{a}}\cdot b^{\mathfrak{b}}\cdot c^{\mathfrak{c}}\cdots n^{\mathfrak{n}})=0$; ибо данная формула остается верной, если в формуле, имеющей вид суммы, каждый член равен нулю.

Теорема 105*n*. *Решение логического уравнения*. Каждое логическое уравнение от одной величины разрешимо относительно этой величины, а именно, если $xa+y\bar{a}=0$, то $xy = 0$ и $a = ux + y$, где u – произвольная величина.

Доказательство. Каждую формулу (функцию) от a, согласно 105*a*, можно привести к форме $xa+y\bar{a}=0$. Доказательство этого факта[5*] состоит из двух частей. Во-первых, надо доказать, что если $xa+y\bar{a}=0$, то $xy = 0$, а $a = ax + y$. Во-вторых, надо доказать, что если $xy = 0$, а $a = ux + y$, то и $xa+y\bar{a}=0$.

I. 1) Уравнение $xa+y\bar{a}=0$, умноженное на $x + y$, дает:

$$0=(x+y)(xa+y\bar{a})=xa+xy\bar{a}+xya+y\bar{a}$$

$$=xy(\bar{a}+a)$$

$$=xy.$$

2) Далее, $y = y(a + a) = ya$, так как $ya = 0$.

$$
\begin{aligned}
a &= a + ay \\
&= a + y \\
&= a(x + x) + y \\
&= ax + y.
\end{aligned}
$$

II. Если $xy = 0$ и, вместе с тем, $a = u\bar{x} + y$, то

$xa = xu\bar{x} + xy = 0$, так как $xu\bar{x} = 0$ и $xy = 0$,

и имеет место:

$0 = a\bar{a} = u\bar{x}\,\bar{a} + y\bar{a}$, то есть $ux\bar{a} = 0$ и $y\bar{a} = 0$,

значит $xa + y\bar{a} = 0$.

Решение этого уравнения впервые предложил профессор Шрёдер[6*] ⟨...⟩

УЧЕНИЕ О ВЕЛИЧИНАХ, ОСНОВНАЯ ЧАСТЬ УЧЕНИЯ О МЫШЛЕНИИ

ВВЕДЕНИЕ

Введению в учение о величинах я предпосылаю краткую историю его возникновения, а затем предлагаю сжатый очерк его развертывания.

1. История учения о величинах

Учение о величинах, составляющее основу учения о мышлении, – общий ствол, несущий на себе все ветви строгого знания – как учение о формах, или математику, так и логические науки, – само есть наука очень молодая.

Лейбниц первым – в 1696 году в письме к профессору Вагецию из Гизена[1*] [Vagetius in Giesen] (Otium hanoveranum, S. 59, Opera omnia ed. Dutens, 1768. T. 3. S. 338) – выдвинул идею этой науки в качестве общего раздела для всех математических наук. В этом письме он уже называет этот раздел Scientia de magnitudine, учением о величинах, и это название следует сохранить, тем более что оно полностью соответствует сути дела. Правда, Лейбниц в этом письме рассматривал учение о величинах только как часть, общую для арифметики и алгебры. В письме он говорит об этом так:

«Я привык называть учение о величинах эскизом математической логики, который другие называют логистикой. Ибо к этому учению относятся простые понятия, предложения, умозаключения и методы. Простые понятия суть величины, отношения между числами и составленные из них формулы, например, a^2, $a^{1/2}r^2$, ra^2, $a^2–b^2$. Предложения бывают предложениями о том, что больше и о том, что меньше, равенствами, предложениями о сходстве или о равных отношениях. Ибо равенство $c^2 = a^2–b^2$ есть предложение, так же, как и пропорция $(a–b) : c = c : (a–b)$. Умозаключения суть способы проведения вычислений: сложение, вычитание, умножение, деление, нахождение общего делителя, извлечение корня, перестановка, обращение, соединение, разделение отношений и т.д. Наконец, метод указывает, как следует производить доказательство данного предложения или решение данной задачи. Идея этой науки, если бы она должным образом была разработана каким-либо искусным человеком, привела бы к созданию общего раздела математики, представляющего собой легкую и достоверную науку»[2*].

В соответствии с этим рассуждением Лейбниц, как мы видим, ограничивает учение о величинах исключительно видами вычислений, которые мы причисляем к учению о числах, или арифметике. Учение о величинах, согласно Лейбницу, должно быть только общим разделом учения о числах – разделом, устанавливающим для последнего общие законы связывания способом, сходным с тем, каким это делается во всех ветвях строгого знания в разработанном мною учении о величинах. Но вполне вероятно, что он пришел бы к более общей трактовке учения о величинах, если бы действительно разработал эту ветвь. Причисляет же он к видам вычислений учение о протяженностях, так же как логику, которую он собирался строить на основе calculus philosophicus или calc[ulus] ratiocinator, так же как и учение о соединениях, или учение о комбинациях, которое он называет arithmetica binaria или arithm[etica] dyadica. Поэтому для него было бы естественным рассматривать свое учение о величинах тоже как общую часть, лежащую в основе всех ветвей строгого мышления. Поскольку Лейбниц не продвинулся в разработке учения о величинах, то, конечно, дело у него ограничилось выдвижением идеи, которая – а иначе и быть не могло – была несколько туманна.

Следующая работа в данной области – «О понятии и объеме чистого учения о числах. Программа Штеттинской Мариинской гимназии», 1827 – была выполнена отцом автора, профессором Юстусом Гюнтером Грассманом[3*]. В этой работе уже содержится сравнение логики, учения о числах и учения о комбинациях и противопоставление логических наук как связывающих посредством внутренних отношений и наук математических как связывающих посредством внешних отношений, а также подчеркнут принцип, согласно которому некоторая величина может быть полагаема либо полностью равной, либо полностью неравной другой величине. Здесь же обсуждается идея общего учения о величинах как раздела, единого для всего формального знания – раздела, который может составить основу как математических, так и логических наук, – идея, которая отбрасывается им как невыполнимая. Говорится об этом так.

«Прежде всего, общее учение о величинах не может удерживаться в рамках абстрагирования от любого особенного рода величин, не потеряв тотчас же всякую прочную почву. Даже опытному мыслителю время от времени нужна остановка, позволяющая собрать воедино то, что разложено в абстракции, и тем самым дающая передышку для рассмотрения некоторой последовательности как завершенной и для использования полученного таким образом результата в качестве исходного пункта новой последовательности. – И далее, а это кажется здесь главным, общее учение о величинах нельзя лишить чисел, не превратив его в почти полное ничто, так как в нем не остается ничего, кроме общей логической связи и ее расторжения, которые, как мы покажем ниже, суть сложение и вычитание.

Уже понятие множителя есть по сути дела некоторое понятие числа, и если в геометрии тоже проявляется нечто подобное, то покоится оно все же на своеобразных свойствах пространственного синтеза и никоим образом не допускает применения к величинам любых видов.

Если же всеобщие знаки должны обозначать не величины вообще, а только числа, именованные и неименованные, то общее учение о величинах оказывается применимым к величинам всех видов, точно так же как оно применимо к числу. Тем не менее, так называемое буквенное исчисление выступает в этом случае только в качестве особого метода для схематического представления правил связывания чисел и, стало быть, по праву относится к арифметике. – Алгебра и анализ тоже, безусловно, предполагают арифметику, поскольку их схемы в каждом своем члене, состоящем из сомножителей, хотя бы одного, должны обозначать числа. Поэтому совершенно недопустимо предпосылать арифметике буквенное исчисление и все, что с ним связано, в качестве общего учения о величинах».

Дальнейший шаг вперед был сделан братом автора, профессором Германом Грассманом в его «Учении о линейных протяженностях», Лейпциг, 1844 г. Последний различает уже (см. Введение п. 2) два больших раздела учения о формальном знании: математику, или учение о формах, и диалектику, или логические науки. К математическим ветвям он причисляет (Введение, пп. 6,7) две дискретные ветви: учение о числах и учение о комбинациях (из которых последнее, как впоследствии выяснилось, относится не к математике, а к логическим наукам), а также две непрерывные ветви: учение об интенсивных величинах и учение об экстенсивных величинах, или учение о протяженностях. Общий раздел математических наук он называет (Введение п. 8) «общим учением о формах» и далее, на с. 1–14, приводит его обзор. В нем он очень кратко и скорее отвлеченно развивает законы сложения и вычитания, умножения и деления, поскольку они действуют и в учении о величинах и в учении о протяженностях, в то время как вычитание и деление не имеют силы для логики, а первое – также и для учения о комбинациях. Согласно данной работе моего брата, «общее учение о формах» есть, стало быть, чисто математическая наука, которая имеет силу только для математических ветвей и которая теряет ее для логических наук, не будучи действительной ни для логики, ни для учения о комбинациях. «Общее учение о формах» моего брата, стало быть, существенно отличается от учения о величинах, поскольку последнее должно составлять общую базу как математических, так и логических наук. Впрочем, этот обзор представляет собой только краткий набросок, в нем содержится только идея общего учения о математических формах, которая никак не может – и никоим образом не должна – заменить строго научное изложение этой науки.

Реальную попытку построения учения о величинах предприняли в ходе совместной работы, проводившейся в 1847 г., братья Грассманы – Герман и Роберт. Они исходили в ней из отдельных ветвей учения о формах, или математики: из учения о числах и учения о протяженностях, а также из учения о комбинациях. Последнее учение они тогда причисляли еще к математическим ветвям и пытались обобщить операции, имеющиеся в этой области, однако не смогли придти к законам, которые были бы плодотворны, и поэтому отказались от изложения этой ветви. Вместо этого они в 1847 г. разработали по отдельности математические ветви: учение о числах и учение о протяженностях. Уже тогда им удалось для обеих ветвей устранить ряд ошибок в доказательствах и изложить эти учения с полной строгостью. Математики обычно допускают, чтобы математические величины, например числа, возникали различным образом, не доказывая при этом, что результаты будут одинаковыми; например, число 7, согласно их подходу, может получиться из 6+1 и из 5+2. Братья поняли, что это неверно, что если стремиться к научной строгости, то каждую величину надлежит порождать единственным – причем самым простым – способом из непосредственно предшествующих величин путем последовательно устанавливаемых связей (как, например, 7 строится из 6+1) и что каждое строгое доказательство должно проводиться последовательно – таким способом, что если данное предложение верно для a, то оно должно быть верным и для $a+1$. Это был самый значительный результат тогдашней совместной работы. Когда спустя восемь лет, в 1855–1856 гг., братья вернулись к этой своей работе, они отказались от прежнего метода – совместной работы вместе. Они ограничились лишь совместными обсуждениями. Один разрабатывал некоторый проект и сообщал о нем; другой критически его анализировал и высказывал свои замечания. Такой способ работы оказался в высшей степени плодотворным и успешным и быстро привел к строго научному методу в отдельных ветвях учения о формах, или математики, а также в логических науках. При данном способе работы скоро выяснилось, что один из братьев – Герман – более склонен к разработке математических ветвей, учения о числах и учения о протяженностях, а другой брат – Роберт – к разработке философских ветвей, логики и учения о соединениях, или учения о комбинациях. И в конце 1856 г. оба брата разделили работу: Герман взял на себя самостоятельную разработку учения о числах и учения о протяженностях, а Роберт – разработку логики и учения о комбинациях. Общая ветвь – учение о величинах, как не имеющая практического значения, тогда полностью выпала из рассмотрения.

Профессор Герман Грассман первым выполнил взятую на себя задачу. Уже в 1860 г. он выпустил свою «Арифметику»[1], а в 1862 г. – свое «Учение о протяженностях»: оба труда – в строго научной форме. Первая работа, кроме того, вполне раскрывает – особенно в начальных разделах – характер метода, применявшегося тогда обоими братьями, и их борьбу за наивысшую строгость формы.

Другой брат – Роберт Грассман – был тогда еще занят другими научными работами, что помешало ему выполнить задачу, которую он взял на себя; лишь в 1870 г. он вернулся к этой работе. Поначалу он намеревался разработать только логику и учение о соединениях, или учение о комбинациях, т.е. ветви логических наук; однако в ходе работы он убедился, что обе эти философские ветви, как и обе математические ветви – учение о числах и учение о протяженностях с необходимостью предполагают некоторый общий раздел – учение о величинах, что этот последний можно разработать без труда и что если его развить, то другие четыре

[1] Книга Германа Грассмана «Учебник математики для средних учебных заведений. Часть 1: Арифметика» вышла сначала в Штеттине в 1860 г., а затем в Берлине в 1861 г.

ветви приобретут большую краткость и простоту, причем открываются неожиданные параллели и связи. Он, Роберт Грассман, предпочел поэтому разработать все пять разделов и опубликовать их под названием «Учение о формах, или математика» (Штеттин, 1872). Однако когда автор в 1870 г. начал разработку логических наук – логики и учения о соединениях, – он скоро заметил, что для объединения он должен был двенадцать раз применять последовательное, или индуктивное, доказательство, а для перестановки – шесть раз, в случае отношения – двенадцать раз, а в общей сложности – тридцать раз. Ему стало ясно, что здесь следует искать некоторый общий подход, и он был найден.

После этого он исследовал – с точки зрения действующих в них законов – отдельные ветви учения о формах и логических наук: учение о числах и учение о протяженностях, логику и учение о комбинациях. Очевидно – да и с первого взгляда ясно, – что существует ряд законов и связей, которые общи всем ветвям учения о формах логических наук; таковы законы равенства, законы сложения, или складывания, законы умножения, или переплетения. Все эти законы действуют и находят применение в учении о понятиях (логике), так же как и в учении о числах (арифметике), в учении о соединениях (учении о комбинациях), в учении о протяженностях. Если не учитывать соображений, относящихся к [преподаванию в] школе, то мне кажется ненаучным четырежды выводить – в каждой отдельной ветви заново – одни и те же законы или, тем более, принимать их без вывода и доказательства, вместо того чтобы раз и навсегда строго вывести и доказать их в общем учении о знании. Следовательно, учение о величинах как общий раздел должно предшествовать отдельным ветвям математики и логических наук. Оно образует как бы общий ствол, который несет на себе отдельные ветви.

Однако сложение, или складывание, и умножение, или переплетение, вместе с установлением одинаковости [равенства] ни в коей мере не представляют собой единственные и наиболее общие способы связывания в учении о величинах. Ибо для них обоих общими являются закон раскрытия [удаления] скобок, или объединения, с одной стороны, и закон перестановки – с другой. Так, закон для скобок, или закон объединения, $a \circ (b \circ c) = a \circ b \circ c$ охватывает закон сложения $a + (b + c) = a + b + c$ и закон умножения $a(bc) = abc$, а закон перестановки $a \circ b = b \circ a$ – закон сложения $a + b = b + a$ и закон умножения $ab = ba$. Эти два закона могут и должны быть поэтому развиты до того, как может зайти речь о сложении и умножении.

Кроме того, закон объединения может действовать сам по себе, без того, чтобы действовал закон перестановки, и есть много вычислений, в которых действует объединение, но не действует перестановка; стало быть, закон объединения, или закон для скобок, должен быть выведен до того, как может зайти речь о перестановке.

Закон отношения тоже является общим, присущим всем ветвям учения о формах, или математики, и логическим наукам, законом, определяющим отношение между различными ступенями сочленений. Поэтому и этот закон должен быть развит в учении о мышлении – общем разделе учения о мышлении. Наконец, соединение различных степеней связи – сложение, умножение и отчасти также возведение в степень – тоже являются общими всем ветвям учения о формах и логическим наукам, и поэтому также должны выводиться в том же общем разделе учения о мышлении – учении о величинах. Учение о величинах, общий раздел, присущий ветвям мышления, есть, стало быть, научная необходимость; он обязателен для строгой науки.

Но необходимость учения о величинах, или общего раздела о мышлении, вытекает также из всеобщих задач человеческого мышления – задач, которые являются общими для отдельных ветвей учения о мышлении. Ведь математика и логические науки являются двумя наиболее общими ветвями человеческого мышления, они должны учить нас всеобщим законам мышления и выводить эти законы строго научным образом. Только если понимать учение о величинах в этой полной всеобщности – как ветви, которые лежат в основе всякого научного мышления, которая одна только выводит законы любого строго научного мышления, – лишь тогда обнаруживается научная база учения о величинах.

Предпосылкой учения о величинах является один только человеческий дух с его способностью мышления, т.е. способностью мысленного полагания и связывания сколь угодно многих величин. При этом совершенно безразлично, что ум пожелает положить в качестве величины; он может положить что угодно, но при условии, чтобы каждая величина, которую он полагает, была однозначна, то есть имела одно, а не много значений, так, чтобы ее нельзя было спутать с другими величинами. Многозначную величину ни в одной науке нельзя полагать равной некоторой другой величине, если мы не желаем впасть в ошибочное умозаключение. Величины, которые полагает ум, не рассматривая их состоящими из других величин, мы называем простыми, или элементами. Каждая простая [величина] при этом может иметь сколь угодно много частей; так, например, ею может быть всеобщность; так, человеческий род может быть полагаем в качестве чего-то простого, если мышление рассматривает его как величину, которая не выводится из других величин и не считается из них составленной. Следовательно, любая вещь, любое представление и любое понятие, короче, любое, какое угодно нечто, все, что есть или может быть предметом мышления, может быть полагаемо в качестве простого. Однако ум может также полагать простую величину, e, без всякого содержания, только опираясь на то положение, что для данного мыслительного акта она должна быть не сложной, а простой, и в этом состоит строго научное понятие простого в учении о величинах. Тогда, если заданы различные простые [величины] e_1, e_2, e_3, ... e_n, то они должны обозначаться и именоваться различно. Однако один и тот же знак в одном и том же положении всегда обозначает одну и ту же величину.

В свою очередь связь величин может обозначать любое, какое угодно соединение или связывание величин, какое только возможно для человеческого ума, коль скоро оно имеет одно, а не много значений. В учении о величинах дело идет совсем не о том, чтó собой представляет некоторое связывание; в нем интересуются только тем, какой закон должен действовать для данной связи.

В учении о величинах, стало быть, производится полагание простых [величин], их связывание [сочленение] и затем установление законов этой связи, возможных для человеческого ума. Учение о величинах как общий раздел учения о мышлении, стало быть, совершенно необходимо. Если мы хотим разработать всеобщие законы любого мышления, если мы, коротко говоря, хотим сделать возможным строго научное мышление, мы должны построить учение о величинах, базу учения о мышлении.

Учение о мышлении есть необходимая база всякого строго научного мышления и всякой строгой науки вообще. Оно составляет краеугольный камень, фундамент формального мышления вообще – и тем самым математики, а также философии.

Руководствуясь этими мыслями, автор в 1870 г. разработал «Учение о величинах», которое опубликовал в 1872 г. Однако это первое издание «Учения о величинах» было еще очень несовершенным; это был скорее росток, чем нечто законченное; работа содержала только самые важные предложения, общие для всех ветвей мышления, и только первоначала и наиболее общие предложения учения о величинах (79 предложений).

В издании «Учения о величинах» 1872 г. впервые в науке было дано общее и вместе с тем строгое определение величины:

Величиной называется все, что есть или может быть предметом мышления, коль скоро оно имеет одно, а не много значений.

Ни у одного автора до меня не было этого единственно исчерпывающего и единственно строгого определения. Например, в «Арифметике» Германа Грассмана 1860/61 гг. на с. 1, предложение 1, говорится: величиной называется любая вещь, которую можно полагать равной некоторой другой вещи или отличной от нее. Это определение не является вполне исчерпывающим, так как не устанавливает, что надлежит понимать под «вещью», и не является вполне четким, поскольку не говорит о том, что каждая величина может иметь только одно, а не много значений.

Здесь [в «Учении о величинах»] также впервые появляется понятие связи (соединения), причем с исчерпывающей ясностью и с достаточной четкостью.

Связью двух величин называется любое составление или соединение этих величин, возможное для человеческого ума, коль скоро оно имеет одно, а не много значений.

Точно так же в издании 1872 года оригинальным является выведение законов, относящихся к равенству величин, к последовательному (индуктивному), а также простому элементарному доказательству; оригинальным является выведение закона объединения из одной основной формулы объединения и, далее, выведения закона перестановки из основной формулы перестановки, что до этого труда нигде в науке не встречалось.

Точно так же в упомянутом издании 1872 г. были развиты, хотя и в не слишком вразумительной форме, законы отношения более высоких связей к нижележащим связям и на этой основе для всех ветвей мышления выведены три порядка связи: сложение, умножение и возведение в степень. При этом каждый из уровней состоит из трех частей, в зависимости от трех видов связи: привязывание [die Anknupfung], которое не обладает ни свойством объединения, ни перестановки; ввязывание [die Einknupfung], которое обладает объединением, но не обладает перестановкой; и связывание [die Verknupfung], которое обладает и тем, и другим свойством – и объединением и перестановкой[4*]. Этим исчерпываются задачи, которые решаются в этом старом издании «Учения о величинах».

В новом издании 1890 года учение о величинах принимает совершенно новый вид. В старом издании было 79 предложений, в новом их стало 270. В «Учении о величинах» 1872 г. рассматривались только те виды связей, которые являются общими для различных ветвей мышления. В новом же издании 1890 г. виды связи стали базой строгого учения о мышлении. В этом учении строго научно устанавливаются те виды связи, которые возможны для человеческого ума [der Geist], и те, которые для него невозможны, и на этой основе для каждого вида связи выводятся ее формы и законы.

В учении о формах, или математике, для каждой связи имеется соответствующее разъединение [отделение], для сложения – вычитание, для умножения – деление, для возведения в степень – извлечение корня и логарифмирование. Все эти способы разъединения в издании 1872 г. были опущены автором, так как он считал, что они имеют силу только для учения о формах, но не для логических наук, особенно логики. В предлагаемом новом издании 1890 г. автор рассматривает эти способы разъединения, так как в учении о величинах как раз и должны быть развиты все способы связывания, которые возможны для человеческого ума. В нем, следовательно, должны быть рассмотрены также способы разъединения и показана область их действия и их пределы[5*]. Уже введение этих способов разъединения придает учению о величинах существенно расширенный вид и обогащает его предложениями. Поэтому в новом издании «Учения о величинах», в котором разрабатываются виды и роды связи, а также три ее порядка, имеется 270 предложений, более чем в три раза больше, чем в старом издании 1872 г.

2. Обзор учения о величинах

Все, что есть или может быть предметом мышления, коль скоро оно имеет только одно, а не много значений, мы называем *величиной,* а каждое соединение такого рода величин в некоторую мысль, коль скоро оно имеет только одно, а не много значений, *связью* этих величин. А ту часть учения о мышлении, в которой разрабатываются формы и законы величин и их связи, общие для всех ветвей строгого мышления, мы называем *учением о величинах.*

Учение о величинах есть поэтому учение о величинах и их связывании ⟨Verknüpfung⟩ в новые величины, где под величиной понимается все то, что есть или может быть предметом мышления, коль скоро оно имеет только одно, а не много значений. Учение о величинах образует базу, общий ствол учения о мышлении, который несет на себе все ветви учения о мышлении, из которого они и вырастают.

В соответствии с этим учение о величинах не может предполагать законов мышления; ибо иначе каждое нарушение этих законов означало бы ошибку в учении о величинах, что сделало бы все ветви учения о мышлении ошибочными и ненаучными. Стало быть, учение о величинах не может, в частности, предполагать законов языка, не может развертываться в рамках законов и форм языка. Только способность человека к мышлению, только возможность строго научного мышления, одним словом, только зрелого, четко мыслящего человека – вот что оно предполагает[2].

Учение о величинах, в котором каждая величина должна иметь одно, а не много значений, не может, поэтому, иметь дело ни с изменяющимися вещами и представлениями языка, ни со словами, которые всегда имеют множество значений, и по этой причине не может развертываться в языковых формах. Напротив, все величины, которые подлежат связыванию в учении о величи-

---

[2] Учение о величинах нельзя преподавать детям, еще не научившимся языку. Картина внешнего мира у них еще расплывчата и туманна; отдельные явления жизни они еще не различают с определенностью; сходные вещи и сходные действия еще смешиваются. Сливаются в одно целое; разные же вещи они еще называют одинаково. На таком низком уровне развития мыслительных способностей не могут еще, конечно, сформироваться научно строгие формы мысли. Способность мыслить должна вырасти, развиться, стать столь зрелой, чтобы достичь совершенно отчетливого понимания [вещей].

Стало быть, учение о языке должно предшествовать учению о величинах.

Итак, ребенку необходимо сначала научиться говорить, научиться различать вещь и явление [Ding und Erscheinung], свойство и действие [Eigenschaft und Tatigkeit]. Ему необходимо научиться постигать и представлять внешние и внутренние связи вещей и поступков, воспринимать и постигать продолжительную связную речь, прежде чем он окажется в состоянии следить за строгим ходом мысли в учении о мышлении и с требуемой четкостью различать и употреблять величины и их сочленения.

Учение о языке и в школе предваряет ветви строгого мышления, особенно математику. Хотя сразу после начала школьного обучения начинаются упражнения вычислительного и мыслительного характера, принадлежащие учению о формах, тем не менее, науку в ее строгом виде можно ввести в преподавание лишь тогда, когда учащиеся станут уверенно пользоваться родным языком и понимать его структуру, т.е. в старших классах средней школы.

Учение о величинах и все ветви учения о мышлении, будучи строго научными, должны быть общезначимыми – одинаковыми для всех людей, для всех народов, для любых языков. В этом также причина того, что учение о величинах не может быть развито в выражениях отдельного, конкретного языка, во многих отношениях отличного от других языков.

нах, оно должно само и построить, определив их настолько точно, чтобы каждая из них приобрела единственное значение, относительно которого не может быть никаких сомнений. И каждый знак любой величины, а также каждый знак любой связи в каждом предложении должен иметь одно, а не много значений.

С другой стороны, поскольку учение о величинах и учение о мышлении должны разработать законы любого мышления, постольку все, что есть или может быть предметом мышления, может стать предметом учения о величинах, соответственно, учения о мышлении, – так же как каждая связь в мышлении может рассматриваться как связь и в учении о мышлении.

Чтобы удовлетворить обоим требованиям, основоположник строгой науки, грек Аристотель (384–322 г. до Р.Х.) ввел в качестве однозначных знаков величин буквы, а в качестве однозначных знаков связей такие знаки, как + , –, =, $\gtrless$[6*], и все представители строгой науки, особенно работающие в области учения о формах (математике), с тех пор придерживаются подобных обозначений, в то время как в логических науках, к сожалению, от этих обозначений отказались и поэтому впали в ненаучность, достойную сожаления. Чтобы и здесь придти к строгому знанию, нужно и в этих ветвях вернуться к буквам как к знакам величин и связям как к знакам мыслей.

Если мы хотим подойти к делу строго научно, если мы хотим в строгой науке избежать ошибочных умозаключений и мнимых доказательств, мы должны начать строгую науку с изложения всеобщей ветви, т.е. с учения о величинах, в котором строго научным образом выводятся общие предложения и законы, имеющие силу для всех ветвей формального знания. Это единственно научный путь; и это одновременно путь самый короткий, самый легкий и самый простой, или элементарный, – путь, понятный каждому учащемуся.

Учение о величинах начинается с установления видов связывания. Если результат связывания величин, например, $a \circ b$ (читается «*a* с *b*») должен иметь только одно значение, то он не может возникать различными способами; стало быть, нельзя, чтобы, на пример, положить $a \circ b = b \circ a$, если предварительно не установлено или не доказано, что и то, и другое имеет одинаковое значение. Равным образом, более чем две величины – $a \circ b \circ c$ – нельзя связывать в произвольном порядке, если не доказано, что это приводит к одному и тому же [результату]. Итак, всегда следует действовать в определенном порядке, последовательно связывая: сначала первую величину a со второй – b, потом результат $a \circ b$ – с третьей величиной c и т.д. Если надо связывать по-другому, то мы обязаны взять в скобки величины, которые были связаны первыми, например, $a \circ (b \circ c)$. Здесь, стало быть, надлежит сначала b связать с c, а потом результат $b \circ c$ связать с a.

Говорят, что для данного вида связи имеет силу *объединение*, если справедлива основная формула объединения $a \circ (b \circ e) = a \circ b \circ e$, где a и b – любые величины, а e – простая величина или элемент. В учении о величинах доказывается, что если справедлива эта формула, то каковы бы ни были величины и сколько бы их ни было, скобки можно удалить, что, стало быть, например, $a \circ (b \circ c \circ d \circ f) = a \circ b \circ c \circ d \circ f$ и т.д., это означает, что тогда справедлив закон объединения.

Равным образом говорят, что для данной связи справедлива перестановка, если кроме одной формулы объединения $a \circ (b \circ e) = a \circ b \circ e$ имеет силу также основная формула перестановки $e_1 \circ e_2 = e_2 \circ e_1$, где e_1 и e_2 суть две простые величины, или элемента, и доказывают: коль скоро действуют эти основные формулы, закон перестановки также имеет силу, то есть что в данной связи, каковы бы ни были величины и сколько бы их ни было, любую скобку можно удалить или ввести, а порядок величин как угодно изменить.

В соответствии с этим в учении о величинах различают три вида связи: привязывание, ввязывание и связывание.

Привязывание есть связь, которая не обладает ни объединением, ни перестановкой; в этом случае нельзя ни удалять скобки, ни изменять порядок величин. Примером здесь служит любой словарь и любой научный труд, в котором нельзя изменить порядок мыслей и структуру абзацев и разделов.

Ввязывание есть связь, обладающая объединением, но не обладающая перестановкой; значит, в этом случае можно удалять любые скобки, но нельзя менять порядок величин. Примером могут служить вариации или размещения, ибо в этом случае $a(bcd) = abcd$, но ab не равно ba.

Связывание есть соединение, при котором имеет место как объединение, так и перестановка, следовательно, можно удалять любые скобки и как угодно менять порядок величин. Примером такой связи может служить сложение чисел, ибо в этом случае $8 + (7 + 2) = 8 + 7 + 2$, т.е. $8 + 9 = 15 + 2$, а $8 + 3 = 3 + 8$.

В учении о величинах, далее, различают два рода связи: отделимую и неотделимую связь.

Отделимая связь есть соединение, в случае которого существует единственная величина a, в связи с некоторой другой величиной b дающая целостность $a \circ b$, и для этой связи, если $a \circ b = b \circ c$, то $a = c$.

Неотделимая связь – это соединение, при котором существуют две или более величин, которые, будучи связаны с b, дают в результате $a \circ b$, например, $8 \circ 0 = 20 \circ 0$, но не $8 = 20$.

Для каждой отделимой связи существует также разъединение $a \cup b$ (читается « a разд b»), когда даны целостность $a = b + c$, а также одна величина b, и отыскивается другая величина c – выделенное. В учении о величинах разрабатываются законы и для этого случая.

В учении о величинах исследуется затем *порядок* [уровень] *связывания*.

Прибавление, или *сложение* [суммирование] имеет самый низкий порядок. Целостность $a + b$ (читается « a плюс b») называется в этом случае суммой, а каждая величина – ее частью [штукой – Stück]. Здесь тоже имеется три вида сложения: *присоединение*, *вложение* и *добавление*, т.е. соответственно: прибавление, для которого не имеет места объединение; прибавление, для которого имеет место объединение, и прибавление, при котором имеет место не только объединение, но и перестановка частей [суммы][7*].

Разъединение, соответствующее в этом случае отделимому сложению, называется *отниманием* или *вычитанием*, $a–b$ (читается «a выч. b»). Выделенное называется в этом случае остатком. Добавлению здесь соответствует убавление. Величина, которая не приводит к изменению другой величины, в случае сложения называется нулем (знак 0), т.е. $a + 0 = a = 0 + a$.

Переплетение, или *умножение* есть [связь] второго порядка; целостность $a \cdot b$ (читается «a раз b») называется в этом случае продуктом, или произведением, а каждая переплетаемая величина – отделом ячейкой, или сомножителем. Здесь также имеется три вида переплетения: *приплетение* [Anweben], *вплетение* [Einweben] и *сплетение* [*Verweben*]; т.е. приплетение – случай, когда не имеет места ни объединение, ни перестановка; вплетение – не имеет места перестановка, но действует объединение; и сплетение – случай, когда имеют место оба – и объединение и перестановка.

Новым в случае переплетения является его взаимосвязь со сложением. Основными формулами этого отношения являются

$a(b + e) = ab + ae$ и $(a + b)e = ab + ae$. Отсюда, если для переплетения справедливо объединение, то в учении о величинах выводится закон отношения, гласящий, что каждая часть [штука] некоторого отдела должна быть переплетена с каждой частью другого, а также устанавливается, какие знаки следует ставить перед отделами: + или –.

Разъединение, которое в этом случае соответствует отделимому переплетению, называется *разделением* или делением: $a:b$ или a/b (читается «a на b»), делитель b должен быть здесь отличен от нуля, а выделенное называется в этом случае долей, или частным. Сплетению в этом случае соответствует *подразделение*. Величина, которая не приводит к изменению, в случае переплетения называется единичностью (знак 1), т.е. $a \cdot 1 = a = 1.\ a$. Переплетение и разделение возможны только при условии, что для переплетения справедливо объединение.

Возведение в степень есть связь третьего порядка; она существует только при условии, что объединение имеет силу как для переплетения, так и для сложения. Для возведения в степень справедливо двойное отношение – отношение к переплетению и отношение к сложению. Основная формула: $a^{b+e} = a^b \cdot a^e$. Целостность a^b (читается «a возв b») называется в этом случае высотой [die Höhe], a – основанием [die Base], b – ступенью [die Stufe]. И в этом случае существуют три вида возведения в степень: *повышение* [das Anhohen], *завышение* [die Einhöhen], когда $(ab)^c = a^c \cdot b^c$, и *превышение* [das Erhöhen], когда, кроме того, $a^{bc} = a^{cb}$.

Возведению в степень с отделимой базой соответствует, в качестве разъединения, *углубление*, или *извлечение корня*, $a^{1/2}$ (читается «a кор $^1/_2$), где даны высота $b = a^c$ и ступень c, отличная от нуля, и разыскивается основание a, называемое глубиною.

Возведению в степень с отделимой ступенью соответствует, в качестве разъединения, *логарифмирование* $\dfrac{b}{a}$, или $\log_a b$ (читается «лог b по a»), когда даны высота $b = a^c$ и основание a, отличное от единичности, и отыскивается ступень c, называемая логом [der Log], или логарифмом.

В учении о величинах рассматриваются законы для этих связей и разъединений, а также доказывается, что связей более высокого порядка не может существовать. ⟨...⟩

3. Обзор ветвей научного мышления, выводимых из учения о величинах

Из учения о величинах, основной части учения о мышлении, выводимы различные ветви учения о мышлении, а именно все ветви научного мышления, которые вообще возможны для человеческого ума. Автор, следовательно, должен здесь показать, какие мыслительные связи возможны для человеческого ума, а какие нет.

Желательно, чтобы каждый читатель, прежде чем он приступит к изучению данного труда, усвоил идею, которой определяется ход авторских рассуждений и которая служит их обоснованию: в немалой степени это будет способствовать пониманию целого.

Различные ветви учения о мышлении получаются из учения о величинах только путем установления соответствующих законов, которым подчиняются связи.

Самой важной при этом является связь низшего порядка, т.е. прибавление, или сложение, $a + b$ (читается «a плюс b»); поэтому ее мы должны рассмотреть прежде всего.

Если для этой фомы связи не имеет силы ни объединение, ни перестановка величин, т.е. если в ней нельзя ни удалить скобку, ни изменить порядок складываемых величин, словом, если в ней нельзя произвести никакого изменения формы, а напротив, каждая формула равна лишь самой себе, то такая связь называется присоединением [нанизыванием – Anreihung]. В этом случае, стало быть, невозможно никакое изменение в формулах; для такой формы связи не существует и связи более высокой ступени, в частности умножения, ибо последнее, согласно учению о величинах, появляется только в том случае, если для сложения имеет силу, по крайней мере, объединение. Поэтому для привязывания не существует законов, определяющих связывание, и невозможно изменение формул. Это такая форма, в случае которой каждая величина занимает в мышлении свое неизменное место, а величинам присуща неизменная взаимосвязь, так что ни $a + b = b + a$, ни $a + (b + c) = a + b + c$ неверно.

Для всех других ветвей мышления в случае самого низшего уровня связи, т.е. прибавления, или сложения, имеет силу хотя бы закон объединения, т.е. каждую плюсовую скобку без изменения значения можно ввести или удалить, стало быть, справедливо, например, что $a + (b + c) = a + b + c$. Поэтому для всех этих ветвей существует и более высокий уровень связывания [величин] – переплетение, или умножение, для которого, согласно учению о величинах, имеет место $a(b + c) = ab + ac$, $(a + b)c = ac + bc$.

Для всех этих ветвей нуль является той величиной, которая ничего не меняет при сложении, т.е. $a + 0 = a$ и $0 + a = a$, а единица – той величиной, которая ничего не изменяет при умножении, т.е. $a.1 = a$ и $1.a = a$.

Однако различие между ветвями проявляется тотчас же, как только мы начинаем рассматривать сложение двух равных простых величин, или элементов: $e + e$.

Если мы положим $e + e$ не равным e и установим, что и все величины, возникающие путем последовательного сложения одних и тех же простых величин, не равны друг другу, то мы получим внешнее сложение, которое имеет силу для математического ответвления и тем самым для всех *математических наук*. Единичность в этом случае получает название *единицы*.

Если же мы, наоборот, установим, что $e + e = e$, то из этого сразу же следует, что все величины, возникающие в результате последовательного сложения одних и тех же простых величин, равны e. Тогда мы получаем внутреннее сложение, которое имеет силу для логического ответвления и тем самым для всех *логических наук*.

А. Математическое ответвление

В *математическом* ответвлении в свою очередь самой простой является такая ветвь, в которой полагаема только одна простая величина, или элемент, а именно единичность; это – учение о числах.

а. Учение о числах

В *учении о числах*, или арифметике, возникающие в результате последовательного прибавления единичности, называются *числами*. Для прибавления в этом случае, как мы видели, имеет силу объединение; но здесь действует также и основная формула перестановки $e_1 + e_2 = e_2 + e_1$, поскольку в этом случае прибавляется только одна простая величина, а именно 1, получается $1+1 = 1+1$, а обе единичности можно менять местами; стало быть, здесь имеет силу основная формула перестановки, значит, в соответствии с учением о величинах, – закон перестановки, т.е. *все законы добавления*; следовательно, в случае сложения чисел не только можно как угодно расставлять или удалять плюсовые скобки, но и как угодно менять порядок складываемых величин.

Все числа, возникающие путем последовательного прибавления единичности, оказываются попарно различными. Стало быть, одно число нельзя смешивать с другим, каждое должно обладать своим особым именем и своим особым знаком – цифрой.

В учении о величинах без труда доказывается, что если $c = a + b$, то существует только одна величина b такая, что если ее прибавить к a, то получится c, т.е. что сложение чисел есть отделимое связывание. Согласно учению о величинах тогда имеют силу *все законы* убавления, или *вычитания*; в частности $0 = a - a$.

В учении о числах вместо единичности можно прибавлять любую другую простую величину, или элемент; ибо согласно учению о величинах $1 \cdot e = e$, и тогда $e + e + e + ... = 1 \cdot e + 1 \cdot e + 1 \cdot e + \ldots =$ $(1 + 1 + 1 + \ \ldots)\ e$ и, стало быть, $e + e + e + ...$ превращается в именованное число, где $1 + 1 + 1 + \ \ldots$ есть чистое число, а e – его имя, и для именованных чисел действуют совершенно те же законы, что и для чистых чисел.

В случае *умножения*, переплетению подлежит только одна простая величина, или элемент, а именно единичность. Но согласно учению о величинах $1 \cdot a = a$, стало быть, $1 \cdot 1 = 1$, и все величины, возникающие путем последовательного умножения единичностей, равны единичности.

Здесь, таким образом, можно пытаться переплетать друг с другом другие простые величины и положить $e \cdot e = e$. Но если это сделать, то, в соответствии с учением о величинах, следует установить $e \cdot 1 = e$ и $1 = e/e$, откуда следует:

$e = e \cdot 1 = e \cdot \frac{e}{e} = \frac{e \cdot e}{e} = \frac{e}{e} = 1$, т.е. каждая формула может применяться только к единичностям, но не к другим простым величинам.

Если для умножения должен существовать более высокий уровень связи, – возведение в степень, – то для него должен иметь силу и *закон объединения*. Но поскольку связывается сама с собой простая величина – единичность, то в произведении $1 \cdot 1$ можно поменять местами одинаковые единичности; значит, имеет силу основная формула перестановки, следовательно, и *закон перестановки*, т.е. имеют место *все законы сплетения* [Verveben]. Получается также, что если $c = a \cdot b$, и a не равно нулю, то существует только одна величина b такая, что, будучи перемножена с a, она дает c, т.е. умножение чисел есть отделимое связывание. Тогда, в соответствии с учением о величинах, имеют силу *все законы разделения*, или *деления*. В частности, $1 = a : a$, если a не равно нулю.

Для возведения в степень в учении о величинах уже было установлено, что $a^1 = a$, и, стало быть, $1^1 = 1$. Поскольку добавлению при суммировании в случае возведения в степень соответствует умножение, или переплетение в основании [степени], то имеет силу объединение и перестановка при сложении в ступени [Stufe – показателе степени], а также при умножении в основании. Поскольку, далее, справедливо $a^{1\cdot 1} = a^{1\cdot 1}$, перестановка имеет силу и в случае умножения в ступени [в показателе степени]. Напротив, объединение не имеет места, если возвести в степень показатель степени; так, неверно, что $a^{(b^c)} \neq (a^b)^c$, например, $a^{(3^2)}$ не равно $(a^3)^2$, ибо $(a^3)^2 = a^6$, в то время как $a^{(3^2)} = a^9$.

b. Учение о протяженностях

В математических науках можно складывать и различные простые [величины] или единицы, например, $e_1 + e_2 + e_3$. Но тогда получается, что единица не может быть представлена в виде суммы нескольких других единиц, т.е. нельзя положить $e_1 = \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3 + \ldots + \alpha_n e_n$, где $\alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_n$ суть чистые или реальные [reelle] числа. Мы называем некоторую величину новой единицей, если ее нельзя представить в виде суммы нескольких других единиц. Здесь, как и во всех математических ветвях, действует также общий закон математического сложения, согласно которому величины, возникающие в процессе последовательного [индуктивного] прибавления единиц, не могут быть равными друг другу. Ветвь математики, в которой имеются различные единицы, называется *учением о протяженностях*.

Для учения о протяженностях, как и для любой ветви учения о мышлении, в случае сложения имеет силу объединение. Поэтому здесь должна быть справедлива и перестановка, так как, если возможно складывать $(e_1 + e_2) + (e_1 + e_2)$, то e_1 и e_2 должны допускать перестановку, и тогда получается, что $2(e_1 + e_2) = e_1 + e_1 + e_2 + e_2 = 2e_1 + 2e_2$. Но в таком случае в учении о протяженностях *справедливы все законы добавления и убавления* [величин] *и все законы умножения и деления чисел*, так же, как это имеет место в арифметике.

Но тогда, прежде всего, справедливы *законы единицы*. Если $\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \ldots + \alpha_n e_n = 0$, то все $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ должны быть равны нулю. Ибо, если хотя бы одна из этих величин, например α_1, окажется не равной нулю, то все слагаемые можно разделить на α_1 и получить $e_1 + \alpha_2/\alpha_1\, e_2 + \ldots + \alpha_n/\alpha_1 e_n = 0$, т.е. представить e_1 как сумму нескольких других слагаемых, что противоречит определению понятия новой единицы. Далее, в учении о протяженностях две величины $a = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \ldots + \alpha_n e_n$ и $b = \beta_1 e_1 + \beta_2 e_2 + \ldots + \alpha_n e_n$ равны тогда и только тогда, когда

$\alpha_1 = \beta_1$, $\alpha_2 = \beta_2$, ... $\alpha_n = \beta_n$; ибо если из первой вычесть вторую, то мы получим

$$a - b = 0 = (\alpha_1 - \beta_1)e_1 + (\alpha_2 - \beta_2)e_2 + \ldots + (\alpha_n - \beta_n)e_n,$$

а здесь, как было доказано, $\alpha_1 - \beta_1 = 0$, $\alpha_2 - \beta_2 = 0$, ... $\alpha_n - \beta_n = 0$, откуда непосредственно следует, что $\alpha_1 = \beta_1$, $\alpha_2 = \beta_2$, ... $\alpha_n = \beta_n$.

В учении о протяженностях простые величины, или единицы, можно также перемножать друг с другом. И здесь для умножения должно быть справедливо объединение, если мы вообще хотим допустить изменение формы. Напротив, нельзя установить, что $ee = e$; ибо тогда, учитывая, что $e \cdot 1 = e$, а $1 = e/e$, мы получим, что

$$e = e \cdot 1 = e \cdot \frac{e}{e} = \frac{e \cdot e}{e} = \frac{e}{e} = 1,$$

т.е. что все простые величины равны 1, и мы снова оказываемся в учении о числах, а не в учении о протяженностях.

Стало быть, мы должны положить $e\,e$ не равным e; *самое простое* – положить *$e\,e$ равным нулю*. Если же в качестве простых величин или единиц мы положим другие величины, например $e_1 + e_2$, то получим $0 = (e_1 + e_2)\,(e_1 + e_2) = e_1\,e_1 + e_1\,e_2 + e_2\,e_1 + e_2\,e_2$, т.е., поскольку $e_1 e_1 = 0$ и $e_2\,e_2 = 0$, окажется, что $0 = e_1\,e_2 + e_2 e_1$, или $e_2 e_1 = -e_1 e_2$. Этот вид умножения называется *сглаживанием* (*выравниванием*) (комбинаторным умножением), а его результат – *площадкой*. Стало быть, в случае сглаживания только площадки отличных друг от друга единиц не равны нулю, а перестановка не имеет силы. Чтобы отличить площадку от других продуктов, или произведений, ее заключают в сглаживающую скобку, т.е. пишут $[e_1\,e_2]$.

Но мы можем положить *$e_a e_a$ не равным нулю*. Если в этом случае произведение отличных друг от друга единиц положить равным нулю, то получится *внутреннее* умножение, которое, однако, может быть легко сведено к сглаживанию. Поэтому сглаживание есть умножение, присущее учению о протяженностях.

Наконец, *произведение и одинаковых, и различных единиц* можно положить *отличным от нуля* и затем установить для него перестановку; тогда мы получаем: $(e_1 + e_2)(e_1 + e_2) = e_1\,e_1 + e_1 e_2 + e_2 e_1 + e_2 e_2 = (e_1 e_1 + e_2\,e_2) + 2e_1 e_2$. Переплетение в этом случае называется *свиванием*. А результат – *косой* (*свивкой*). (Коса полностью соответствует направленной величине, или комплексной величине, $a + ib$ в учении о числах, где $i = (-1)^{1/2}$.) Однако последний вид умножения принадлежит уже к более высокой ветви учения о протяженностях.

Из каждой из этих более низких ветвей вырастает более высокая ветвь: из учения о числах – учение о последовательностях, или учение о функциях; из учения о протяженностях – учение о расширениях. Однако каждая из этих ветвей, вырастая из соответствующей более низкой ветви, может быть понята только при условии, что более низкая ветвь уже разработана. Поэтому я должен отказаться здесь от изложения идей, относящихся к этим ветвям.

B. Логическое ответвление

Логическим ответвлением мы назвали ту ветвь учения о мышлении, для которой $e + e = e$; отсюда сразу следует, что все величины, которые возникают из e путем последовательного сложения, должны быть равны e.

Как и для всех ветвей учения о мышлении, для сложения в этом случае выполняется объединение; но здесь выполняется также и перестановка. Ибо, если каждую величину можно положить состоящей из простых величин, например $e_1 + e_2$, то мы должны принять и $e_1 + e_2 + e_1 + e_2 = e_1 + e_2$, т.е. поскольку $e_1 = e_1 + e_1$ и $e_2 = e_2 + e_2$, то должно быть и $e_1 + e_2 + e_1 + e_2 = e_1 + e_1 + e_2 + e_2$, т.е. должна быть справедлива перестановка. Но тогда вообще $a + a = a$.

В логических науках сумма двух величин никогда не может быть равна нулю, если одна из двух величин не нуль. Ибо если бы $a + b = 0$, то поскольку $a + a = a$, $a = a + 0 = a + a + b = = a + b = 0$.

Поэтому *в логических науках не существует вычитания и погашающих, или отрицательных, величин*; ибо если бы мы пожелали положить $a–a = 0$, то тогда, поскольку $a + a = a$, было бы $a = a + 0 = a + a - a = a–a = 0$, т.е. все величины в логических науках обратились бы в нуль.

а. Логика

Среди логических наук самой простой является та, в которой для умножения устанавливается, что $e\,e = e$; отсюда непосредственно следует, что все величины, возникающие из e путем последовательного умножения, равны e. Эта ветвь логических наук называется логикой. Если каждую величину, например $e_1 + e_2$, положить простой, то надо принять и то, что $e_1 + e_2 = (e_1 + e_2)(e_1 + e_2) = e_1e_1 + e_1e_2 + e_2e_1 + e_2e_2 = e_1 + e_1e_2 + e_2e_1 + e_2$, т.е. должно быть $e_1e_2 + e_2e_1 = 0$; но тогда, в соответствии с доказанным выше, должно быть и то, что $e_1e_2 = 0$ и $e_2e_1 = 0$, т.е. *каждое произведение различных* [отличных друг от друга] *простых величин должно быть равно нулю.*

В логике тогда невозможно, чтобы продукт двух простых величин был равен единичности; ибо, если $ee = 1$, то из этого следует, что $e = e \cdot e = 1$, т.е. все простые величины равны единичности. В логике поэтому не существует деления, так как если бы мы положили $1 = \frac{e}{e}$, то отсюда, поскольку $ee = e$, следовало бы, что $e = e \cdot 1 = e \cdot \frac{e}{e} = \frac{e \cdot e}{e} = \frac{e}{e} = 1$, т.е. что каждая величина равна единичности.

b. Учение о соединениях, или учение о комбинациях

Та из логических наук, для которой $ee = e$ называется *учением о соединениях, или учением о комбинациях*. Для учения о соединениях имеют силу все развитые для логических наук предложения, касающиеся сложения.

В отличие от этого совершенно иные предложения имеют силу для *умножения*. Прежде всего здесь, как во всех ветвях, действует *закон объединения*. Здесь, далее, поскольку требуется, чтобы $ee = e$, произведение одинаковых простых величин можно положить равным нулю. Но тогда другие величины, например, $e_1 + e_2$ нельзя полагать простыми: ибо если принять $e_1 + e_2$ в качестве простой величины, то получится: $0 = (e_1 + e_2)(e_1 + e_2) = e_1e_1 + e_1e_2 + e_2e_1 + e_2e_2 = e_1e_2 + e_2e_1$, поскольку $e_1e_1 = e_2e_2 = 0$, т.е. в соответствии с законом сложения для логических дисциплин $e_1e_2 = 0$ и $e_2e_1 = 0$, т.е. все произведения равны нулю.

Значит, если положить $ee = 0$, то *произведение различных* [отличных друг от друга] *простых величин* надо положить *неравным нулю*, и тогда мы получаем *связку без повторений*.

Но можно положить и $ee = 0$. Тогда, если произведение различных [отличных друг от друга] простых величин счесть равным нулю, мы снова получим законы логики, только при условии, что ee по-прежнему отлично от e. Если же, напротив, принять, что произведение каждых двух простых величин не равно нулю, то получится *связка с повторением*.

Если для продукта, или связки, допустить перестановку, то $e_1e_2 = e_2 e_1$, и, поскольку $a + a = a$, получится, что $e_1e_2 + e_2e_1 = e_2e_1 + e_1e_2 = e_1e_2$, и тогда связка получает название *разграничения*.

Если же для продукта, или связки, не допускается перестановка, так что $e_1e_2 \neq e_2e_1$, то связка будет называться *заменой* [Geänder][8*]. Установление этой связки тогда не доставит больше никаких затруднений.

Каждая из двух описанных ветвей логических наук тоже приводит к более высокой ветви. Логика приводит к развитию тропики, учение о соединениях – к развитию учения об уяснении.

Приведенных разъяснений достаточно, чтобы показать, как развертывается учение о мышлении ⟨…⟩.

ВВЕДЕНИЕ В УЧЕНИЕ О МЫШЛЕНИИ[1*]

Учение о мышлении, которое автор предлагает в этом труде, – совершенно новая наука, которая как таковая излагается здесь впервые (в то время как отдельные ее ветви развивались издавна, с того времени, когда вообще появилось строгое мышление) и которая, с одной стороны, предназначена для того чтобы придать мышлению полную строгость и научность, отсутствующие в настоящее время во многих ветвях формального знания, особенно в философии, с другой стороны, должно служить развитию и разработке всех видов научных мыслительных операций, которые вообще возможны для человеческого ума, то есть должно служить разработке всех ветвей как чистой математики, так и логических наук.

Многим ученым этот замысел покажется рискованным, даже дерзким, тем более что он направлен против нынешнего поверхностного основанного на ошибочных умозаключениях, мышления, распространенного во многих ветвях науки, а также преисполнен стремления доказать ненаучность нынешнего способа мышления. Иные же ученые – те, которые убеждены в научности их нынешней позиции, – сочтут [мой замысел] излишним; это обязывает автора показать всю важность этой новой науки, и он просит господ ученых уделить внимание предлагаемому ниже краткому изложению вопроса. Автор полагает, что уважаемых господ ученых лучше всего ознакомить с новой наукой, во-первых, показав, в чем состоит главная установка учения о мышлении и какова его история, а во-вторых, охарактеризовав форму его изложения.

1. ОСНОВНАЯ УСТАНОВКА И ИСТОРИЯ УЧЕНИЯ О МЫШЛЕНИИ

«Учение о мышлении» автора следует непосредственно после учения о языке. Если «Учение о языке» в «Структуре знания» составляет первую книгу ее первой части, то есть первую книгу «Учения о знании, или Философии», то «Учение о мышлении» – его вторую, непосредственно следующую книгу.

А именно после того как в учении о языке, или философской грамматике, мы познакомимся с законами и формами языка, которые имеют силу для всех людей, после того как мы научимся подходить к языку с научных позиций и раскроем возможности языка служить средством общения людей и их взаимному пониманию, – после всего этого для человека непосредственно возникает следующая задача: [научиться] строго научно формировать свое мышление и предметы мышления, идеи, определяя их так, чтобы ненаучная путаница и ошибочные умозаключения стали невозможными, а, следовательно, были исключены заблуждения и суеверия. Эту задачу и призвано решить учение о мышлении.

В языке каждое слово служит для обозначения многих вещей и именно поэтому многозначно; это дает повод для путаницы и ошибочных умозаключений, а на них основано искусство всевозможных обманов (софистика); каждое понятие в мире обычного мышления многозначно, более того, изменяется в процессе мышления, становясь иным в его результате, а значит, в ходе каждого данного исследования меняет свое значение; наконец, каждая вещь внешнего мира подвержена изменениям, она меняется и, стало быть, тоже многозначна. То же самое относится и к связям и сочетаниям слов, понятий и вещей. Предложения языка, обычные мысли и связи вещей тоже многозначны, различаются в истолковании, любые два человека по-разному их понимают, и тем самым создается многообразие отличных друг от друга взглядов.

В строгой науке эта многозначность мыслей – если мы хотим исключить заблуждения и ошибочные умозаключения – должна быть решительно преодолена. Каждый предмет мышления и знания в строгой науке должен иметь одно, а не много значений, должен, коротко говоря, быть однозначным, так же как однозначным должно быть и каждое соединение этих предметов, то есть каждая мысль. Это есть то необходимое требование ко всякому строго научному мышлению, которое должно сделать невозможным путаницу и обшибочные умозаключения любого рода. До тех пор пока в науке один и тот же предмет мышления один понимает так, а другой иначе, то есть когда значение предмета мышления неоднозначно, путаница неизбежна, и строгой науки еще нет. В обычной жизни, например, под фиалкой мы понимаем самые разные виды цветов; но тот, кто в строгой науке под душистой фиалкой стал бы понимать растение, отличное от того, которое имеет в виду ботаник, тот поступил бы ненаучно.

Так же обстоит дело и в других ветвях науки. Всякий, кто в какой-либо ветви строгой науки использует двух- или многозначные величины, он до тех пор виновен в нарушении требования научности, пока не заменит многозначность однозначностью. Даже для математики это утверждение в полной мере справедливо. Один пример, относящийся к учению о числах, или арифметике, делает это очевидным. Как известно, $\sqrt{c^2}$ имеет два значения: $+c$ и $-c$. Если допустить эту двузначную величину, то предложение, согласно которому каждая величина равна самой себе, или $a = a$, перестает быть верным; ибо согласно этому предложению $\sqrt{c^2} = \sqrt{c^2}$, стало быть, поскольку $\sqrt{c^2} = +c$, а также $\sqrt{c^2} = -c$, то $+c = \sqrt{c^2} + -c$; но тогда может быть доказано, что $a - a = a + \sqrt{c^2} = a + c$, откуда следует любое ошибочное заключение, например, что $a - a$, или 0, равно $2a$, и т.д. Поэтому в учении о числах, или в любой другой ветви строгой науки нельзя ввести никакую двузначную или многозначную величину и просто приравнять ее к какой-либо однозначной величине. Многозначные величины можно полагать равными только надлежащим образом, то есть так, чтобы каждому отдельному или определенному значению одной из них приравнивалось некоторое единственное значение другой. По ходу изложения данного сочинения будут указаны разнообразные ошибки такого рода.

Логика в этом отношении находится сейчас в самом неутешительном положении. В руководствах и учебниках в настоящее время она излагается все еще полностью ненаучно, и такого рода изложение вместо того, чтобы развивать у учащихся строго научное мышление, приучает их, к сожалению, к ошибочным умозаключениям; поэтому она скорее вредна, чем полезна. Доказательство этого будет дано во Введении к «Учению о величинах». Только учение о мышлении кладет конец этому безобразию.

Учение о мышлении занимается, впрочем, только мысленными связями, происходящими в голове [человека], то есть формами мышления, которые возможны для человеческого ума, не заботясь о познании окружающего нас внешнего мира.

Учение о познании, составляющее третью книгу «Учения о знании», вскоре покажет нам, как человек достигает строго научного познания внешнего мира, какие средства и пути для этого имеются в его распоряжении, а также какие виды и ветви учения о познании для этого должны существовать.

Учение о сущностях, или онтология, которое раскрывает нам природу вещей, составляет, наконец, четвертую книгу «Учения о знании».

История учения о мышлении очень коротка. К созданию и разработке учения о мышлении, предназначенного для того чтобы строго научно обосновывать законы мышления и затем исследовать как те виды научных мыслительных актов, которые для человеческого ума возможны, так и те, которые для него невозможны, и, наконец, чтобы для каждой из ветвей разработать формы и законы, имеющие силу в науке, – к этому можно приступить лишь после того, как будут развиты, с одной стороны, учение о величинах, а с другой стороны, восемь ветвей учения о мышлении.

До того как автор принялся за эту работу, не существовало ни учения о величинах, ни упомянутых восьми ветвей учения о мышлении. Из последних были разработаны только две математические ветви: учение о числах и учение о последовательностях, или учение о функциях (последнее включало в себя дифференциальное и интегральное исчисления), и были в наличии только две логические ветви: логика и учение о соединениях, или учение о комбинациях, однако обе последние – в очень несовершенном виде. Из четырех других ветвей мой брат первоначально в 1844 г. разработал и опубликовал одну часть учения о протяженностях. Дальнейшая разработка этой ветви строго формальным способом была осуществлена в 1847, 1855 и 1856 годах совместно моим братом и мною; вслед за этим мой брат разработал и издал в 1862 г. «Учение о протяженностях» и относящееся к нему учение о функциях, то есть учение о преобразованиях. Издание «Логики» и «Учения о комбинациях», разработанных и представленных в виде формул нами обоими в 1855 и 1856 годах, было предпринято мною.

В 1872 г. под названием «Учение о формах» мною была издана первая работа, служившая подготовке «Учения о мышлении». Она охватывала уже учение о величинах, логику, учение о комбинациях, учение о числах и учение о протяженностях; однако все эти науки были представлены только в их началах, лишь немногими предложениями. «Логика» и «Учение о комбинациях» в этом труде содержит все предложения, полученные моим братом и мною в 1855 и 1856 годах, к которым я потом, в 1871 году, добавил дальнейшие предложения.

Только много позже, когда автор в 1883 г. предпринял более подробную разработку учения о числах и учения о протяженностях, а также логики, он открыл две более высокие ветви логических наук – тропику и учение об умозрении и понял, что учение о мышлении может быть развито в том плане, который очерчен выше. Автор начал с переработки учения о величинах, которое в результате этого приняло совершенно новый облик; затем он перешел к разработке отдельных [его] ветвей и испытал большую радость, когда благодаря этому данные ветви приобрели существенно новый облик.

Сначала развертываются четыре ветви математических наук: учение о числах (арифметика) и учение о последовательностях (учение о функциях), учение о протяженностях и учение о преобразованиях – со всеми их многочисленными предложениями и законами, и все они вырастают из учения о величинах совершенно органически, очень легко и во всем их своеобразии.

Затем вполне аналогичным образом во всей свой полноте развертываются, вырастая из учения о величинах, четыре ветви логических наук: логика и тропика, учение о комбинациях и учение об умозрении – со всеми их многочисленными предложениями и законами.

Богатство результатов было столь огромно, что автор был вынужден себя ограничить. Он включил в «Учение о мышлении» [только] такие предложения, знание которых, по его мнению, следовало бы требовать от каждого человека, обладающего строго научным образованием, без чего невозможно развитие научной мысли и овладение разными науками. Положения же, которые имеют значение скорее для специалистов, он исключил из «Учения о мышлении».

Соответственно этому *учение о мышлении* включает три ствола: один, *основной ствол* – это *учение о величинах*, которое, как общий ствол, несет на себе все вырастающие из него ветви учения о мышлении, и две главные ветви или два ответвления, которые ранее всего и непосредственно отходят от упомянутого ствола.

Математические науки в их совокупности образуют первую главную ветвь учения о мышлении, которая разветвляется на четыре отдельные математические науки.

Логические науки в их совокупности образуют вторую главную ветвь учения о мышлении, которая разветвляется на четыре отдельные логические науки.

Обе главные ветви совершенно самостоятельны и не зависят друг от друга, так что математические ветви не предполагают и не используют никаких логических ветвей, а логические ветви не предполагают никаких математических ветвей и поэтому любой человек, который пожелает познакомиться с ветвями логики, может обойтись без математических, и наоборот.

Однако автор намеревается выпустить отдельные издания, в которых каждая ветвь будет развита сама по себе, без предположения учения о мышлении или учения о величинах, и в которых будут приведены все предложения, представляющие интерес для данной ветви. Эти отдельные издания будут выпущены в виде дополнительных томов «Системы знания».

Итак, автор впервые вводит в науку учение о мышлении с его стволом в виде учения о величинах и его ветвями. Только благодаря учению о мышлении можно достичь строго научного мышления и познакомиться с тем, какие виды связи доступны человеческому мышлению, а какие нет. Благодаря учению о мышлении науки обновятся и получат прочную, строго научную установку, что исключит любые ошибочные умозаключения.

Учение о мышлении – это совсем не трудная наука. Ее можно преподавать в старших классах средних школ, в гимназиях и реальных училищах, и она будет полностью усвоена учащимися, вплоть до ее формы. Ни один образованный человек не должен быть лишен знакомства с этим учением. С другой стороны, детальное изучение отдельных его ветвей, а именно учения о числах или дифференциального исчисления, а также логики и тропики следует предоставить специалистам. Если специалисту потребуются сведения из отдельных ее разделов, то, обладая предварительным знакомством с учением о мышлении и владея навыками его применения, он без труда усвоит соответствующие знания. Что касается строго математического, а также философского образования, то оно вряд ли возможно без знания учения о мышлении.

Впервые вводя в науку новую отрасль знания, автор считает, что это весьма существенный шаг вперед в обосновании строгой науки.

2. ФОРМА ИЗЛОЖЕНИЯ УЧЕНИЯ О МЫШЛЕНИИ

Форма изложения должна быть строго научной, ибо учение о мышлении призвано выработать научную форму мысли, необходимую для всех наук.

Однако, как мы показали, лишь та форма изложения научна, которая делает невозможной любую путаницу, любые ошибочные умозаключения. Когда мышление по форме своей научно, каждая величина [в нем используемая] имеет только одно значение, она не может быть равна двум величинам, которые сами не равны друг другу: если она равна одной из них, она не может быть равна другой. Но в языке каждое слово имеет много значений и, стало быть, многозначно, а это влечет путаницу и ошибочные умозаключения. Поэтому величины в учении о мышлении нельзя обозначать словами; для этого нужны новые, однозначные знаки.

Отец научного мышления, Аристотель, в качестве однозначных знаков однозначных величин использовал буквы, и мы в этом должны ему следовать. Отсюда вытекают два положения.

Величиной называется все то, что есть или может быть предметом мысли [мышления, des Denkens] и имеет одно, а не много значений.

Буква есть знак величины. Одна и та же буква в одном и том же предложении учения о мышлении всегда обозначает одну и ту же величину и, стало быть, имеет одно и то же значение. В остальном же любая буква может обозначать какую угодно величину.

В учении о мышлении можно связывать или соединять друг с другом только величины, причем для того, чтобы результат соединения в свою очередь мог быть предметом мышления, он должен быть опять-таки однозначным, то есть быть величиной. Знаки связи тоже должны быть однозначными. Связь букв с помощью однозначных знаков связи называется формулой, и если мы устанавливаем, что две формулы равны, то получается равенство. Учение о мышлении, стало быть, должно развертываться с помощью однозначных формул, из которых одна получается равной другой; доказательства в учении о мышлении становятся формульными доказательствами [доказательствами с помощью формул], которые производятся так, что одна формула полагается равной некоторой другой формуле, а эта последняя – третьей и т.д. В издаваемом автором «Учении о мышлении» таким способом – с помощью формул – последовательно доказывается 1230 предложений[1].

[1] К сожалению, в последнее время все больше наблюдается пренебрежение научной формой; для многих философских сочинений характерны досадные недостатки – отсутствие научной ясности и остроты понимания; в них нередкой стала и поверхностная и пустая болтовня, которая ведется с тем большим самомнением, чем меньше автор имеет научной подготовки. В то время как все великие философы – Платон и Аристотель, Декарт и Спиноза, Лейбниц и Ньютон, Кант и Гербарт, Гегель и т.д. значительное внимание уделяли изучению разных отраслей строгого мышления, особенно математики; в то время как большие успехи этой науки частично обязаны как раз этим мыслителям, – многие наши новейшие философы полагают, что строгость формы не нужна, и считают, будто с помощью громких фраз, без всякой научной подготовки можно решать труднейшие вопросы; это ненаучное представление безмерно подрывает авторитет философии.

Что эти господа поднимут ужасный крик, когда я потребую от них строгости формы, строго научного мышления; когда предам осуждению их нынешний ненаучный подход, – это я отлично знаю; однако это не должно препятст-

Если учение о мышлении призвано установить, какие виды научных мыслительных операций возможны для человека, каковы их формы и каким законам они подчиняются, то в этом учении должны быть изучены различные виды соответствующих формул и установлено, какие из них, в свою очередь, дают однозначные результаты, а какие, наоборот, влекут противоречия. Лишь тогда, когда это установлено, когда для каждого вида мыслительных операций научно разработаны их формы и соответствующие законы, – лишь тогда учение о мышлении окажется научно завершенным[2].

вовать беспощадной борьбе с безобразием, творимым иными новейшими философами. Только таким путем может философия вернуть себе уважение и снова завоевать то место, которое она занимала ранее и может и должна занимать теперь – во благо науки.

Я хорошо понимаю, что многие нынешние философы сильно поотвыкли от строгости научного мышления; что за философию очень часто выдается пошлейшая болтовня, не имеющая ни малейшего научного содержания; и что во множестве рассуждений присутствуют, к сожалению, незамечаемые авторами ошибочные умозаключения. К этой ситуации, недостойной для философии, как уже говорилось, следует относиться со всей серьезностью, противостоять ей всеми силами; ненаучную болтовню нужно разоблачать и бичевать; а философию надо снова ввести в формы строгого мышления, сделать ее строгой наукой.

Среди отдельных ветвей учения о мышлении самой простой и легкой является логика. Для логики особенно значимо то, что ее законы могут быть выведены только с помощью однозначных величин и их связей, то есть с помощью одних только формул; что, напротив, ее невозможно развивать с помощью понятий и предложений [обычного] языка. Тем не менее почти все философы до сих пор отвергали развертывание предложений логики с помощью формул и наивно верили, будто логические законы можно вывести и обосновать путем словесных умозаключений, хотя уже самое простое рассуждение демонстрирует невозможность этого. Ибо никто не станет оспаривать, что каждое словесное доказательство содержит одно или несколько следствий.

Применение умозаключений в начале логики, стало быть, уже предполагает все учение об умозаключениях. Однако оно составляет один из последних разделов логики; лишь в этом поздно появляющемся разделе показывается, допустимо ли с научных позиций – и если да, то при каких условиях, – строить последовательность умозаключений. Лишь после этого поздно появляющегося раздела об умозаключениях позволительно с научной точки зрения применение последовательностей умозаключений. Но применять в первых разделах логики такого рода последовательности – это при всех условиях ошибочное умозаключение наихудшего рода.

Тем, кто не в состоянии или не хотят строго научно, с помощью формул, разрабатывать логику, лучше просто вообще отречься от нее и открыто сказать о том, что они порывают со строго научным мышлением – во всяком случае это лучше, чем приучать молодых людей к ошибочным умозаключениям.

[2] О различных видах связей, возможных для ума человека, ср. Введение к «Учению о величинах»[2*].

3. РАЗЛИЧНЫЕ СПОСОБЫ ИЗЛОЖЕНИЯ УЧЕНИЯ О МЫШЛЕНИИ

Изложение учения о мышлении в формульном виде – это строго научная его форма. Поэтому-то в этой форме автор и составил свой главный труд.

Наряду с этим главным трудом, который охватывает все ветви мышления (как во всех математических, так и во всех логических науках), автор выпустил в свет – для тех философов, которые пожелают изучить только логические науки, – особое изложение последних в совершенно простой и легкой форме под названием «Логика и другие логические науки в строгой разработке с помощью формул».

Кроме изложения, строго развертывающегося в формулах, правомерным является изложение учения о мышлении и в виде свободно строящихся рассуждений. Эта последняя форма может строиться более свободно; она позволяет исследовать различные пути, освещать идеи, которые лежат в основе рассуждений, и тем самым в большей мере побуждать читателя самостоятельно и по-разному пытаться проводить преобразования формул и построение доказательств. Поэтому такой способ изложения представляет собой желательное дополнение первого. Автор, если для этого найдется время, издаст позже «Учение о мышлении» также и в этой второй форме. Замысел состоит в том, чтобы как можно шире привлечь внимание к строго научному мышлению, а, по мнению автора, этому лучше всего служит использование различных форм изложения.

а) Изложение учения о мышлении в виде строгого развертывания формул

Для изложения учения о мышлении автору пришлось искать наиболее легкую, практичную форму, приемлемую для читателей с разными точками зрения.

Авторы математических трудов, в которых материал излагался в виде последовательного преобразования формул, обычно требуют, чтобы читатель сотрудничал с ними в каждом их доказательстве, иными словами, подробно прорабатывал книгу; этим они утомляют даже опытного коллегу, наводят на него скуку, а для начинающего материал часто становится слишком трудным и малопонятным. Этой беды можно легко избежать, если для текста теорем, для доказательств и для специальных (отдельных) замечаний использовать разный шрифт. Я так и сделал.

Текст теорем напечатан полужирным боргесом, чтобы он выделялся, и его можно было читать, минуя доказательства.

Доказательства теорем напечатаны обычным боргесом. Таким образом, каждый может без труда обратиться к тем доказательствам, которые кажутся ему особенно важными, но столь же легко он может и пропустить их. Однако каждое доказательство проводится шаг за шагом, без каких-либо скачков; для каждого изменения формулы в соответствующей строке справа в скобках приводится теорема, на основании которой производится данное изменение. Если читатель положит «Книгу формул» рядом с томом «Учения о мышлении», то в ней легко найдет соответствующую формулу или теорему.

В *Книге формул* для каждой теоремы, в порядке возрастания номеров теорем, указана формула, которая этой теоремой доказывается. Для удобства эту книгу стоит держать рядом с «Учением о мышлении». Используя «Книгу формул», сведущий читатель легко усмотрит структуру моего труда и с первого взгляда определит, что для него важно. Доказательства тогда будут читаться как текст обычной книги. Начинающий же сможет легко возвращаться к пройденным теоремам, а формулы прочно запечатлятся в его памяти. А это, как известно, первое условие успеха обучения. Поэтому «Книга формул» станет приятным подарком для каждого.

Замечания печатаются мелким шрифтом (петитом). Научному изложению каждого раздела предпослано введение, которое служит подготовке читателя, знакомя его с замыслом и общим ходом развертывания соответствующей ветви, поэтому замечания не принадлежат к строго научному изложению. В случае отдельных теорем – там, где это требуется, чтобы облегчить работу с теоремами, – указывается, кто первый ее сформулировал, приводятся взгляды других специалистов, а также примеры и указания, касающиеся упражнений. Все это тоже не принадлежит к строгому изложению.

Наконец, *Тетрадь упражнений* включает – для каждой отдельной ветви – упражнения, которые необходимо выполнить учащемуся, чтобы овладеть материалом и свободно применять соответствующие теоремы.

b) Изложение учения о мышлении в форме свободно строящихся рассуждений

Когда изложение строится в форме свободного рассуждения, то, как и в случае строгого изложения с помощью формул, в нем используются тоже только однозначные величины, однозначные связи и буквы – однозначные знаки величин, из которых составляются формулы; отличие же состоит в том, что свободное рассуждение позволяет показать, каким образом мы приходим к строгим формулам и как их преобразовывать, получая в результате теоремы, содержащиеся в «Книге формул». Преимущества подобного изложения очевидны: мы всегда отдаем себе отчет, каким путем следует идти, критически оценивая избранное направление и вместе с тем учитывая, как, используя упражнения из «Тетради упражнений», научиться обращению с формулами и применению их в обычной жизни.

Оба способа изложения дополняют друг друга, каждый из них имеет своих сторонников. Для того, кто овладел навыком строгого использования формул, изложение в форме свободного рассуждения позволяет окинуть взглядом целое. А для того, кто изучал материал в его свободном изложении, ознакомление со строгими доказательствами, совершающимися с помощью формул, повышает его уверенность в себе и позволяет легко преодолевать возникающие сомнения.

4. ИСКУССТВЕННЫЙ ЯЗЫК В «УЧЕНИИ О МЫШЛЕНИИ»

Искусственный язык в математических науках в настоящее время очень мало употребителен. Одними и теми же искусственными выражениями обозначают самые разные соединения, получающиеся по совершенно разным законам, что приводит к неясностям и путанице, затрудняя достижение необходимой общности выводов. Поэтому в учение о мышлении были введены в качестве [средств] искусственного языка новые, однозначно определяемые искусственные чисто немецкие выражения; все многозначные иностранные слова удалены и заменены немецкими словами, но в интересах тех, кто к ним привык, они приводятся в скобках.

В настоящее время искусственный язык находится еще в очень неудовлетворительном состоянии. С помощью одних и тех же искусственных выражений продолжают обозначать различные вещи; поэтому заблуждения и путаница становятся совершенно неизбежными. Так, например слово «умножение» используется для обозначения различных соединений:

для соединения $a(bc)$, где $a(bc) = abc$ и где $a(bc) \gtrless abc$,

для соединения ab, где $ab = ba$ и где $ab \gtrless ba$,

для соединения ab, где $aa = 0$, и где $aa \gtrless 0$, и т.д.[3*]

И так во многих случаях. Одно и то же слово обозначает связь и в учении о числах, и в учении о протяженностях, и в логике, и в учении о соединениях, хотя для этих связей в каждой из ветвей [учения о мышлении] имеют силу совершенно различные законы. Это ненаучно, и этого следует избегать. Новые немецкие искусственные выражения предоставляют хорошее средство для этого.

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Излагаемое ниже учение о мышлении раскрывает мыслительные операции, возможные для человеческого ума, их формы и законы, причем исключительно в научной форме; человек, умеющий рассуждать, должен признать их правильность, следовательно, каждая теорема учения о мышлении общезначима и абсолютно убедительна для всех людей любой национальности и любой страны, во все времена, причем какие-либо сомнения здесь невозможны, и этим создается исключительно прочная база для строгой науки.

Возникает вопрос – его уже ставили в прошлом, – сохраняют ли силу предложения учения о мышлении для других умов, кроме людей на Земле, стало быть, для людей на других небесных телах, для бесплотных существ, даже для духов мира Божия. Хотя этот вопрос не относится к самому учению о мышлении, для общей ориентировки здесь стоит его обсудить и получить ответ – в пределах возможностей человека. И тогда мы должны сказать следующее.

Каждый ум, обладающий способностью мышления, каким бы сильным или слабым он себя ни считал в прочих отношениях, [отличается следующим]: если он в учении о мышлении, подобно нам, будет исходить из простейших элементов и соединять их так же, как и мы, то он с необходимостью придет к тем же законам и формулам, которые мы установили в нашем учении о мышлении. Соответствующие теоремы [этого учения], таким образом, являются строго научными постольку, поскольку они просто общезначимы для всех мыслящих существ.

При этом простейшие элементы, из которых мы исходим, формы связей, которые мы устанавливаем в учении о мышлении, – это лишь простейшие и низшие формы умственных соединений, доступные для всех существ, наделенных душой, – и для самых низко организованных, и для людей. Человек не в состоянии ни обнаружить, ни даже предугадать или представить себе, какими могут быть более сложные формы связей у тех существ, которые более совершенны. Здесь, на Земле, для человека достаточно и того, что доказано: установленные нами формы [мышления] возможны только для него, и с их помощью лишь он один может придти к общезначимому и достоверному знанию.

УЧЕНИЕ О НАУКЕ. ВВЕДЕНИЕ

1. ВЕТВИ ЧЕЛОВЕЧЕСКОГО ЗНАНИЯ

Всякая наука устремлена к знанию, к познанию истины. Если какая-либо ветвь человеческой мысли не стремится к познанию, она перестает быть наукой. В Новое время, однако, было три ветви человеческого знания, каждая из которых претендовала на исключительное обладание истиной и научностью, а именно: философия, или учение о науке – наукознание; естествознание, или наука о Вселенной; и теология, или учение о Боге. Односторонняя переоценка своей науки и недооценка того значения для человеческого [по]знания, которое имеют другие ветви [научного знания], привели к жаркой борьбе по вопросу о научности, – борьбе, протекавшей не без страстных столкновений, что не приносило пользы и только вредило делу; ибо нельзя отрицать того, что названные три ветви человеческого [по]знания одинаково оправданны и имеют одинаковое значение: ни одна из них не может сделать остальные излишними, и все они – вместе с наукой о государстве – охватывают все человеческое знание.

Наука о Вселенной и государстве, с одной стороны, и наука о Боге [теология] – с другой, первоначально трактовались как совершенно различные, но для человеческого ума одинаково важные области. Подобно тому как наука о Боге, или теология, не могла выводить законы движения тел и химических реакций, не могла строить паровые двигатели и железные дороги, вырабатывать законы, регулирующие транспортные перевозки и торговлю, гражданское и государственное право, – точно так же и науки о Вселенной и государстве [естествознание и государствоведение] были не в состоянии трактовать законы Божественного бытия и греха, развивать учение о Боге, о спасении мира благодаря искупительной жертве Христа и о спасении человеческой души. Поэтому ни одна из названных наук не может заменить никакую другую; каждая из них в равной мере должна разрабатываться и развиваться, чтобы человеческое знание не стало односторонним и нездоровым.

Науки о Вселенной и о государстве без науки о Боге ведут к безбожию, к грубейшему материализму и цинизму. Те естествоиспытатели и государственные деятели, которые оспаривают правомочие науки о Боге, вынуждены отвергать знание о Боге и божественных явлениях, об откровении Бога в Христе и даже осознание человеком своего нравственного начала, сводя все к материи, к кругообороту веществ и материальному движению, а государство основывая на законе полезности.

Вместе с тем одна лишь наука о Боге – без наук о Вселенной и государстве – влечет духовную экзальтацию, ложный спиритуализм и нездоровую церковную жизнь; вероучители, отвергающие правомочие наук о Вселенной, вынуждены отвергать и Божественное откровение о мире и высокое значение земного мира для Царства Божия. Поэтому они пренебрежительно относятся ко всем профессиям, где занимаются земными вещами, – вещами, которые могут не приносить плодов в Царстве Божием; либо они впадают в не менее опасную ошибку – стремятся к установлению власти церковнослужителей, превращающей государство в раба церкви.

Все эти ветви человеческого знания – науки о Вселенной и о государстве, и наука о Боге – не делают, однако, излишним учение о науке, или философию, так же как и последняя не отменяет первых; ибо все они имеют в качестве своей предпосылки законы мышления и путь научного исследования. Чтобы избежать путаницы и заблуждений, понятия этих наук должны быть четко разграничены и иметь определенное значение. Равным образом для каждого положения должны быть установлены границы, в пределах которых оно имеет силу, должны быть четко выявлены пределы возможных ошибок, а сделать это может только учение о науке, или философия. Поэтому ученые, работающие в упомянутых выше областях, но не обладающие предварительным философским образованием, лишаются остроты научного взгляда и неизбежно становятся жертвами неправильных умозаключений и ошибок.

С другой стороны, те, кто занимается учением о науке, или философией, но не располагает [при этом] обширными сведениями в науках о Вселенной и о государстве, а также не углубляются в науку о Боге, оказываются не в состоянии исследовать законы мышления и познания, наблюдения и опыта. Они слишком легко доверяются своему субъективному выбору и оказываются в умственной темноте, возводя сооружения, которые вряд ли переживут их самих.

Только все четыре науки – в их тесном союзе, полном жизненных сил, – могут привести нас к подлинной науке, отвечающей потребностям человека.

2. НАУКА О ВСЕЛЕННОЙ, ИЛИ ФИЗИКА

Впрочем в настоящее время только одна из этих четырех наук, а именно наука о Вселенной, физика, несет на себе печать научности; у наук о государстве и о Боге все еще отсутствует научная форма, а в учении о науке, или философии, нет ни научной формы, ни научного содержания.

Наука о Вселенной есть наука в строгом смысле слова. Достижения, которых она добилась, законы, которые она открыла, – это завоевания, принадлежащие всем народам образованного мира, достояния всех времен человеческой истории; только необразованные и ограниченные умы могут оспаривать эти законы и находить последователей среди необразованной части человеческого рода; естествоиспытатель смеется над ними и не уважает их. Для всех народов Земли существует одна общая наука о Вселенной – так же как для всех существует одна Земля и одна Вселенная. Нет ни славянской, ни римской, ни кельтской, ни германской науки о Вселенной – тогда как имеется римское и германское право, существуют философские школы Шеллинга, Гегеля, Гербарта и Шопенгауэра; однако имеется лишь одна наука, которая является общей для всех народов и для всех времен.

Путь этой науки есть путь критического наблюдения и научного опыта, или эксперимента. Естествоиспытатель не только основывает на наблюдении каждое устанавливаемое им положение, но и при каждом наблюдении учитывает границы возможных ошибок и по большей части оказывается в состоянии постепенно, мало-помалу устранить их. Поэтому-то он и достигает научной достоверности и добывает для человечества неколебимые истины, верные на все времена. Свои законы он проверяет на опыте, учится применять их к человеческой жизни и с их помощью ее преобразовывать.

Доказательством сказанному служит все Новое время с его земледелием и торговлей, когда в нашу жизнь вошли пароходы и поезда, возникли связанные с этим профессии, развились искусство и наука. Благодаря незыблемости своих законов, обильным и многообразным их применениям наука о Вселенной – естествознание заняло в нашу эпоху такое доминирующее положение, какого никогда не имела ни одна наука; оно приносит обильнейшие плоды и стало наиболее почитаемым из всех наук; несмотря на то что его достижения на первый взгляд кажутся скромными, его эксперименты – слишком простыми, оно стало во главе всех наук. Все это результат того, что естествоиспытатели отказались от субъективных пристрастий и мнений – они только прислушивались к божественным законам бытия и просто стремились раскрывать законы, которые Бог установил в мире, не заботясь о том, соответствуют ли они их взглядам и желаниям или нет.

3. НАУКА О ГОСУДАРСТВЕ, ИЛИ ПОЛИТИКА

Наука о государстве, к сожалению, не может похвастать подобными плодами. Из всех ее ветвей до сих пор только политическая [национальная] экономия приобрела научный облик. В отраслях науки о государстве научные формы все еще отсутствуют, что особенно заметно в правоведении. В праве все еще придерживаются исторической традиции. То, что преподаватели правоведения разрабатывают, то, чему они обучают, – это наследие, передаваемое от отца к сыну, наследие, ставшее всеобщим обычаем; либо это то, что в данный момент общепринято современниками или является модой, общей нормой. Ощущение того, что может существовать общезначимое, обязательное для всех право, до сих пор не пробудилось.

Между тем право, общее для всех людей, есть, и его надо разрабатывать и излагать, – если только мы не хотим исключить науку о государстве из сферы научного знания, отказавшись от всякой идеи права. Задача Системы науки – в том, чтобы в рамках научного знания разработать науку о государстве и изложить эту часть [человеческого] знания в научной форме.

4. УЧЕНИЕ О БОГЕ, ИЛИ ТЕОЛОГИЯ

Учение о Боге, или теология, тоже лишена той научной формы, которой обладает наука о Вселенной. Даже среди развитых народов в сфере науки о Боге существуют не только различные церкви и секты, такие, как греческая, римская, кельтская (реформатская) и немецкая (лютеранская) церкви, но и в этой последней много различных течений, произвольных мнений и толкований, так что можно отчаяться увидеть в науке о Боге какую-либо научность и понять, почему так много людей считают единственным благом для церкви возврат к старым, застывшим формам вероисповедания как к средству, позволяющему освободиться, наконец, от этой неразберихи взглядов и верований, от споров различных сект.

С другой стороны, не следует недооценивать того, что христианская наука о Боге уже приобрела и утвердила немало положений, справедливых для всех времен; она оказала такое сильное влияние на жизнь всех христианских народов, что только они оказались в состоянии неустанно развивать образование и культуру, и именно это сделало возможным бытие других наук. Нельзя также не признать, что наука о Боге кельтской и немецкой церквей (поскольку до сих пор только они не отказывались от научной установки и научных изысканий) для своих исследований имеет столь же прочную основу, что и естествознание, обладая таким же правом на существование как и оно.

Ибо подобно тому как естествознание основывается на внешнем опыте, на Откровении Бога в [реальном] мире, так и учение о Боге этих церквей основано на внутреннем опыте, на Откровении Бога в человеке – через осознание им Божества – и в человеческом роде: через его пророков и Спасителя, Иисуса Христа, и допускает такой же надежный путь опыта, наблюдения и истолкования, каким идет естествознание, познавая наш мир.

Однако путь научного познания для науки о Боге еще не разработан, форма его еще не выработана и поэтому в учении о Боге возможно широкое распространение странных воззрений и ненаучных представлений, которые выдаются за имеющие такое же право на существование, что и научные взгляды. Это влечет пренебрежение современным прогрессом и упование на прошлое. Именно поэтому естествоиспытатели смотрят на учение о Боге снисходительно и свысока, не желая признавать ее наукой. Столкновение различных и весьма странных взглядов, столкновение, нередко обуреваемое страстями, только отталкивает от них – так же как, с другой стороны, упрямая приверженность к букве вероучения приводит к отказу от всякого стремления к научности. В результате подобные взгляды теряют научную форму и достоверность, к которым нас приучило естествознание. Задачей нашего времени является открытие для науки о Боге пути к научному прогрессу – пути, который позволит ей приобрести должный облик.

5. УЧЕНИЕ О НАУКЕ, ИЛИ ФИЛОСОФИЯ

Из всех названных наук учение о науке, или философия, в настоящее время находится в наиболее печальном положении; ибо у нее отсутствует как научная форма, так и научное содержание.

Существует задача – несомненно, возвышенная, – которую выдвинуло учение о науке в Новое время: не опираясь ни на какие предпосылки, а исходя из чистого – содержательно пустого – мышления построить весь мир духа и мысли. Для области мышления это такая же задача, как если бы человек пожелал, не используя никаких веществ, никаких орудий и никакой энергии посредством своей деятельности во внешней среде сотворить мир телесных предметов с его Солнцем, Землей и земными существами. Эта задача, однако, такова, что превосходит человеческие силы; только Бог, творец всех вещей, мог решить подобную задачу; приравнивать же себя Богу и стремиться к тому, чтобы нарушать границы человеческой мысли, – это дерзость и святотатство. Поэтому слова, сказанные апостолом Павлом о мудрецах своего времени, что пока они не познали Бога в его мудрости, Бог делает их безумными[1*], не нашедшими истины, – слова эти относятся и к ученым Нового времени.

Говорят, что учение о науке в своем исходном пункте не должно иметь никаких предпосылок. Однако в предпосылках не нуждается только Бог, сущий от века, и кроме которого нет ничего, Бог, который сотворил все вещи и без которого нет сущего. Ученый или философ, однако, выдвигает массу предположений. Бог – вечный творец; миллиарды солнц, которые мы видим на небе и для образования и угасания которых требуются миллионы лет; Земля с ее раскаленным ядром и твердой скалистой оболочкой, с пластами ее пород и останками прежней жизни, с ее географическими зонами и странами света, с ее растительным и животным миром, с ее народами и государствами, с ее сегодняшней образованностью и сегодняшними ошибками – все это тоже составляет обилие предпосылок для ученого Нового времени, без которых он ничего сделать не может. Слабость человеческих органов чувств и ограниченность человеческого рассудка, скованность языком и образом мыслей своего народа, душевный склад человека и его вовлеченность в перипетии текущей жизни – все это означает: для ученого, так же как и для любого человека вообще, весь мир и его предшествующее развитие оказываются предпосылкой. Но порывая с Богом, ставя себя выше Его, не обладая [к тому же] логической подготовкой, ученый Нового времени сам становится предпосылкой, причем самой жалкой, какая только может быть для человека науки.

Говорят, что путь, на который вступили представители современного учения о науке, состоит в том, чтобы пытаться добыть истину посредством умственной деятельности, не прибегая к опыту и не используя никаких предпосылок. Современный ученый-науковед с презрением отказывается как от того, чтобы раскрывать законы природы, прибегая к кропотливым наблюдениям и тщательно поставленным опытам, так и от основанного на наблюдениях и опыте постижения законов духа и слова Божия; он стремится к тому, чтобы, опираясь на собственный ум и используя силу собственного мышления, добыть земную истину и получить доступ к божественной мудрости; он смотрит презрительно, свысока на опытные науки. При этом, однако, он не понимает, что для человеческого ума так же невозможно породить из ничего – одним своим рассудком – хотя бы одну новую истину, как невозможно собственными физическими силами создать хотя бы пылинку; так же как средневековые колдовство и магия в свое время пытались, но не смогли найти камень мудрости и тайну изготовления золота, – так и современное учение о науке столь же мало может рассчитывать на то, что изобретет искусство, как с помощью логических умозаключений извлекать из заданных предположений больше того, что в них заложено.

Все современные представители учения о науке, стремящиеся построить картину мира исходя из пустоты беспредпосылочности, постоянно прибегают к ошибочным умозаключениям и вынуждены нарушать законы человеческого мышления. Только учтя это, становится понятным, что научные конструкции или системы, создаваемые в современном учении о науке, вряд ли переживут своих творцов. Поэтому сомнительно, чтобы современное учение о науке имело право называться наукой, – у него нет ни научного содержания, ни научной формы. Системы его положений – это продукт субъективных представлений, содержащих истину лишь в той мере, в какой они заимствуют законы у других наук.

С другой стороны, нельзя не признать, что человеческий ум существенно нуждается в познании единства внешнего мира, как он открывается человеческому знанию, в согласовании друг с другом отдельных ветвей человеческого знания и их объединении в гармоническое целое, – нуждается в обнаружении общих оснований, источника и хода развития знания в целом, а для этого требуется учение о науке, или философия. Но так же как нельзя согласиться с плодами и ходом развития современного учения о науке, так же, с другой стороны, нельзя игнорировать и усилия исследователей науки – и вообще было бы ошибкой отказаться от положения о единстве знания и тем самым от [требования] научности в подлинном смысле этого слова. Против этого стремления нельзя возражать также путем ссылки на то, что эта задача, будто бы, превосходит силы человеческого разума; ведь как раз тяга к единству и строгости знания составляет для человеческого духа его глубочайшую потребность. Право, отбросить следует не учение о науке (или философию) как таковое, а лишь его современный вид; задача состоит именно в том, чтобы восстановить верный облик учения о науке.

Учение о Вселенной, или физика, в период своего детства прошло путь, сходный с тем, который проходит ныне учение о науке, или философия. В физике Средних веков тоже с презрением отвергался путь терпеливых наблюдений и тщательно поставленных опытов; одним смелым рывком хотели раскрыть единство Вселенной, найти камень мудрости; магические формулы, колдовство и предсказания, симпатия и антипатия служили заменой отсутствовавших в ту эпоху наблюдений и опытов. Следствием подобной опрометчивости были ненаучность и темные суеверия. Вместо учения о звездах, или астрономии, была астрология, вместо учения о телах, или физики, – волшебство и магия; вместо учения о взаимодействии веществ, или химии, – искусство изготовления золота; вместо учения о злых духах – чародейство. Вся наука о Вселенной была гримасой на свое время. Только тогда, когда обратились к наблюдению и опыту, только тогда, когда вступили на трудный путь научных экспериментов, исследование мира, изучение природы превратилось в науку: стали открывать законы и совершать такие открытия, которые в эпоху средневековья с его самыми смелыми надеждами считались бы невозможными.

Современное учение о науке, или философия, находится в настоящее время в положении, похожем на то, в каком была физика в Средние века. Оно тоже отвергает путь трезвого, прозаического опыта; оно тоже хочет смелым рывком постигнуть единство Вселенной – добыть камень мудрости, оно тоже пытается подменить магическими формулами, изобретенными его авторитетами (формулами «в себе», «для себя» и «в себе и для себя»), то, что в нашу эпоху еще отсутствует в наблюдении и опыте; и, наконец, оно тоже, вследствие подобной опрометчивости, оказывается ненаучным и преисполненным высокомерия, стремясь навязать нашей эпохе в качестве истинной мудрости свои пророчества и пустые фразы; тем самым оно оборачивается гримасой на наше время.

Учение о науке, или философия, коль скоро оно претендует на право быть наукой, должно поэтому оставить путь суеверий и поэтических вымыслов и вернуться на дорогу трезвого наблюдения и опыта, на путь изучения Божественных законов и уяснения Божественного Откровения. Для учения о науке имеет силу тот же закон, который действует в отношении всякого человеческого мышления, – что человек открывает истину только с помощью наблюдения и опытного исследования законов, данных Богом; что он не может открыть эти законы, получив их из ничего с помощью свободного полета поэтической фантазии.

Немаловажно привести словесную формулировку этого закона учения о науке, который гласит:

1) *Подобно тому как человек со своими физическими силами не в состоянии сотворить даже одну пылинку или один-единственный атом, он не может с помощью [одной лишь] своей умственной деятельности вывести хотя бы одну новую истину – истину, которая уже не содержалась бы в данных предпосылках.*

2) *Телесно-физические способности человека ограничиваются единственно лишь тем, что вещи, данные ему Богом, он может по-новому соединять друг с другом, придавая им новый вид, в духовной же сфере – тем, что чувственные впечатления и откровения, данные Богом, он может соединять по-новому, придавая им новый вид, и тем самым выводить новые, впрочем уже содержавшиеся в опыте, положения и мысли.*

Лишь имея перед глазами этот закон, мы можем рассчитывать на то, что избежим ошибочных умозаключений и заблуждений, а в области учения о науке, или философии, соберем богатый научный урожай.

6. СИСТЕМА ЧЕЛОВЕЧЕСКОГО ЗНАНИЯ

Приступая к изложению всей системы человеческого знания – несмотря на описанное выше плачевное состояние отдельных наук, – я вполне сознаю всю рискованность подобного предприятия. Как следует из уже сказанного, система эта не должна стать новым воздушным замком, созданным человеческим воображением, – тем, что, возникнув в голове своего создателя, рушится со смертью последнего. Напротив, она призвана быть прочным сооружением, основанным на опыте, и его устои, его структурные элементы, извлеченные на свет из богатого лона жизни, физической и духовной, людьми самых разных времен и народов и хранимые в отдельных опытных науках, должны быть объединены в единой конструкции. Только в редких случаях удавалось мне вносить свою лепту в эту конструкцию, восполнять ее пробелы и тем содействовать сооружению здания человеческого знания. Скоро, однако, то немногое, что было сделано мною, было улучшено теми, у кого было больше сил, и вклад одного человека был предан забвению. Если все же этот вклад окажет влияние на современников, пробуждая научный дух и стремление к научности, – этого для меня будет достаточно.

Следуя примеру Аристотеля, этого древнего мастера человеческой науки, я тоже разделил Систему человечекого знания на четыре отдела:

1) *Учение о науке, или философия.* Она образует основание, фундамент всего здания; она учит нас путям, каким человек достигает знания.

2) *Наука о Вселенной, или физика.* Среди наук это самая легкая, так как она имеет дело только с предметами чувственного мира; здесь накоплено больше всего работ предшествующих ученых.

3) *Наука о государстве, или политика.* Она уже более трудна, так как разрабатывает законы умственной жизни; о них немного работ, выполненных предшественниками.

4) *Наука о Боге, или теология.* Это самая возвышенная и благородная, а поэтому и самая трудная наука. Она ведет нас к первопричине всех вещей, к первоисточнику всех истин и всякого знания; она составляет венец всего здания, с вершины которого можно еще раз взглянуть на всю систему знания.

Примечание. Четыре ветви человеческого знания соответствуют четырем видам сущностей; это – эфирные [небесные] сущности, телесные [физические, тварные] сущности, духовные сущности и божественные сущности. Поскольку существуют только эти четыре вида сущностей, постольку могут быть только эти четыре ветви знания. Однако разъяснение и обоснование этого будет дано только в ходе дальнейшего изложения.

7. ЧАСТИ УЧЕНИЯ О НАУКЕ, ИЛИ ФИЛОСОФИИ

Учение о науке, или философия, как и все человеческое знание, распадается на четыре ветви, из которых первая раскрывает процесс образования чувственных представлений, возникновения языка и формирования строго научных понятий; вторая дает знания о физическом мире; третья доставляет познание духовного мира; а четвертая раскрывает Божественную мудрость. В соответствии с этим учение о науке разделяется на четыре части:

1) *Учение о мышлении*, в котором рассматриваются чувственные представления и их переработка с помощью языка и учения о формах, или математики; это учение охватывает знание, которое в настоящее время дает полная средняя школа.

2) *Учение о знании*, в котором путем наблюдения и опыта происходит проникновение в сущность физических вещей, переработка полученных положений с помощью учения о формах или учения о функциях и благодаря изощренному мышлению, или диалектике, постигаются законы физического мира.

3) *Учение о познании*, в котором рассматривается познание, возможное благодаря духовной сущности человека; учение о познании направлено на постижение процесса познания с помощью наблюдения и на этой основе – на выявление законов умственной жизни, что приводит нас к знанию сущности и жизни всего духовного мира.

4) *Учение о мудрости*, в котором исходят из восприятия Божественного сознания; учение о мудрости учит нас путем опыта постигать законы Бога и божественной жизни и приводит к вершине знания, к Богу как первоисточнику всех вещей, к Богу как началу бытия всех вещей, к Богу как цели всех вещей[2*].

[ОЧЕРК ИСТОРИИ ЛОГИКИ]

Логика (logikḗ) – самая простая, а потому и первая ветвь логических наук. Из всех этих ветвей только она имеет историю.

История логики начинается с грека Аристотеля, 384–322 г. до Р.Х. Этот выдающийся мыслитель явился основателем, подлинным отцом логики и тем самым строгой науки вообще. Аристотель уже понимал, что каждое слово многозначно и поэтому может вызвать путаницу и ошибочные умозаключения[1*]; поэтому для [обозначения] однозначных величин строгой науки он вводит однозначные знаки – буквы и в четырех книгах «Аналитики» развивает многочисленные законы логики. Это учение Аристотеля, особенно та его часть, которая представляет собой учение об умозаключениях, – вместе с обращением суждений, фигурами умозаключений и т.д. – есть, как говорит сам Аристотель, его собственное достижение: в философских трудах, созданных до него, он не нашел никаких работ, которые можно было бы рассматривать как подготовку его учения. Последнее он изложил с тщательностью и вызывающей восхищение точностью.

При разработке своего учения Аристотель исходил из опыта, данные которого он рассматривал и анализировал, опираясь на рассудок; его труд стал, говоря словами Гегеля, естественной историей мышления, навсегда сохраняющим свою ценность. Однако Аристотель не выводил формы умозаключений с помощью формул.

После Аристотеля [логикой занимались] его ученики; в древности это были его комментаторы: в Афинах Александр Афродисийский (ок. 200 г. после Р.Х.), в Риме Боэций (470–524); арабские мыслители – в Персии Авиценна (980–1037 г. после Р.Х.) и в Кордове Аверроэс (1126–1198); далее следуют схоластические мыслители – в Швабии Альберт Великий (1205–1280), в Британии Дунс Скот (ок. 1270–1308), в Южной Италии Фома Аквинский (1224–1274); в эпоху Реформации: во Франции Петр Рамус (1515–1572) и в Пфальце Филипп Меланхтон (1497–1560). Хотя в результате их трудов не произошло существенного продвижения вперед, все же они способствовали тому, что логика постепенно стала утрачивать бесполезные дистинкции.

Первым философом, сделавшим в логике большой шаг вперед, был уроженец Лейпцига великий *Лейбниц* (1646–1716); он впервые выдвинул идею чистой логики, развертывающейся с помощью однозначных формул. Эту науку он назвал calculus philosophicus – неким философским языком, или calculus ratiocinator, и поставил задачу развивать ее, как и любое исчисление, с помощью однозначных формул. К сожалению, эту свою идею Лейбниц не осуществил; она у него так и осталась в зародыше[2*] и не принесла никаких плодов. Современники не понимали Лейбница и его замысел осуществить не пытались.

Правда, ученик Лейбница Хр. Вольф в своем труде «Логика» (1728) пытался ввести в логику метод доказательств, но его так называемые доказательства не содержат ничего, кроме формул и фраз, которые обходят вопрос вместо того, чтобы его разъяснять, которые не проясняют, а затемняют суть дела. Они заслужили ту негативную оценку, которую Гегель дал им в своей «Истории философии» (т. 3, с. 480).

Более значительным было то, что в своей «Логике» 1800 года предложил *Иммануил Кант*. Он тоже следовал путем, проложенным Аристотелем, и различал понятия, суждения и умозаключения, не обосновывая, однако, этого различения; в этом он стоит ниже Аристотеля, так как его определения не всегда обладают требуемой точностью и ясностью; кроме того, он нередко смешивает языковые и понятийные формы и навязывает логике свои предвзятые взгляды; а это сбивает ее с верного пути. В качестве примера кантовской манеры определения я приведу данное им определение суждения: суждение есть представление единства сознания различных представлений или представление об их [представлений] взаимоотношении, поскольку они образуют понятие[3*]. Примером же смешения языковых и понятийных особенностей может служить различение Кантом общих, особенных и единичных, категорических, гипотетических (условных) и разделительных (дизъюнктивных) суждений. Подобные работы не способствуют развитию строго научной логики.

Вскоре, в девятнадцатом веке, со своими эпохальными тремя томами «Логики» (1812–1816) выступил *Гегель*. Он был в высшей степени одухотворенным мыслителем[4*], и с его работами мы еще познакомимся, когда будем заниматься высшей ветвью логических наук – учением о дополнениях. Правда, прогрессу самой логики, то есть низшей ветви логических наук, [труды] Гегеля не способствовали, но зато он в блестящей форме показал полную несостоятельность и ненаучность тогдашней логики и этим много способствовал укреплению презрительного отношения к этой науке, вызванного ее совершенно ненаучным обликом, – отношения, не без основания распространенного во многих кругах.

Строго научная логика может и должна, как правильно поняли еще Аристотель и Лейбниц, строиться только с помощью формул[5*]. Любая попытка разрабатывать ее с помощью слов и проводить словесные умозаключения и доказательства с необходимостью должна была окончиться неудачей.

Каждое слово имеет несколько смыслов, что неизбежно влечет неясности, путаницу и заблуждения. Рассматривая отдельные положения логики, мы будем указывать повторяющиеся в сочинениях [по логике] заблуждения, которые возникают из-за многозначности слов.

Изложение в этих трудах ведется с помощью суждений – задолго до того, как наступает пора обратиться к учению о них; получается, что предложения о суждениях используются прежде, чем доказана справедливость этих предложений (и это не говоря уже о том, что каждое суждение, в них встречающееся, многозначно); все это опять-таки совершенно ненаучно.

Во всех подобных трудах доказательства ведутся на словах. Но всякое словесное доказательство содержит одно или более умозаключений. Применение же умозаключений в начале логики предполагает уже все учение об умозаключениях. А это учение появляется в логике почти в самом ее конце; лишь в этом учении, одном из завершающих разделов логики, показывается, позволительно ли – и если да, то при каких условиях, – с научной точки зрения строить последовательности умозаключений. Только после этого поздно появляющегося раздела логики с научных позиций допустимо применение последовательностей умозаключений. Применять же умозаключения в первых разделах логики – еще до того, как они были обоснованы, – это в любом случае есть ошибочное умозаключение наихудшего рода. Именно логика должна вырабатывать у молодых людей строго научное мышление, а тут их приучают к ошибочным умозаключениям; это означает – с самого начала вырабатывать у них привычку к ненаучности.

Понимая это, преподаватели логики не сразу приступают к доказательствам. В своих логических курсах они приводят множество предложений и, не доказывая их, утверждают, что они истинны. Таким образом читатель должен принимать эти предложения на веру, полагаясь на авторитет автора и не думая ни о каком доказывании. Но это опять-таки выглядит совершенно ненаучно. Папа Римский может заявлять о своей непогрешимости, ссылаясь на снисхождение на него Святого Духа, который вселил в него слепую веру, не нуждающуюся в научной проверке. Но когда люди науки, особенно же занимающиеся логикой, наукой строгой, требуют веры в их утверждения и в их теоремы, которые по большей части неверны, – то есть веры в то, что может и должно быть доказано в виде соответствующих предложений, – невольно вспоминаются слова, которые Гёте вложил в уста Мефистофеля, когда он высмеивал ученых этого сорта и слепую веру ученика в слова учителя[6*]. За такого рода работами нельзя признать никакой научной ценности. Если в логике мы хотим вступить на строго научный путь, мы, по примеру Аристотеля и Лейбница, должны перейти к развертыванию ее с помощью формул. Но подобное построение логики – в формулах – предполагает совершенно новый путь – путь, который еще должен быть проложен. Пока же таковой отсутствует, преподаватели логики в своей практике вынуждены придерживаться прежнего пути, сколь бы остро сами они ни чувствовали его ошибочность, соглашаясь в этом с Гегелем. Поэтому в их работах так ясно проявляется половинчатость занимаемой ими позиции, [хотя] им принадлежат довольно толковые изложения давно известных форм умозаключений; но делается это без всякой критической оценки и научной проверки. Существуют также сочинения, проникнутые возвышенным духом, в которых, следуя подходу Гегеля, говорится об очень многом, – но только не о логике.

Лучшими такого рода трудами можно считать следующие:

И.Г. Ламберт. Новый Органон. Лейпциг, 1764, тт. 1 и 2. Здесь собраны все правила старой школьной логики.

Ульрици. Система логики. Лейпциг, 1852. Представляет собой собрание сочинений с критическим обзором различных точек зрения.

Твестен. Логика. Шлезвиг, 1825. Изложение логики в духе формальной схоластической школы.

М.В. Дробиш. Новое изложение логики. Лейпциг, 1863; и *Ф. Ибервег*. Система логики и история логических учений. Бонн, 1874. Два весьма практичных компендиума словесной, описательной логики.

Г. Лотце. Логика. Лейпциг, 1874; 2-е изд., 1880; и *В. Вундт*. Логика. В двух томах. Штуттгарт, 1880 и 1883. В обоих сочинениях логика трактуется с естественно-научной точки зрения. Преимущественное внимание уделяется вопросам учения о познании – о том, как мы достигаем знания о природе и как от этого знания можно легко перейти к логическим вопросам; последние рассматриваются поверхностно и без всяких доказательств[7*].

Все эти труды способны пробудить мысль, но научной ценности для строго научной логики они не представляют.

Для логики существует только один строго научный путь – это выведение законов мышления без всяких слов с помощью равенств (уравнений), в которых фигурируют однозначные величины и однозначные связи.

Вводится в рассмотрение некоторая формула; отыскивается формула, которая ей равна; для этой последней находится равная ей формула, и она вводится в рассмотрение – и так до тех пор, пока не будет найдена формула, относительно которой мы хотели доказать, что она равна исходной формуле. Процесс, таким образом, состоит только в полагании величин, в их связывании и в преобразовании полученных результатов в формулы, которые имеют иной вид, но оказываются равными ранее рассмотренным.

Каждое подобное приравнивание двух формул, то есть равенство, которое в конце концов получается, – это результат рассуждения, и он может быть выражен некоторым предложением, теоремой или облечен в слова. Однако словесно выраженное предложение есть просто перевод равенства, представленного в формулах, и перевод этот не может выражать ничего сверх того, что было в данном равенстве и получило обозначение с помощью формул. [Словесное выражение] только сопровождает формулу, но не может ее ни заменить, ни устранить. Доказательство, подобно предложению, тоже может быть представлено словесно; однако и в этом случае слова являются лишь переводом рассуждения, проведенного с помощью формул, на [обычный] язык.

Из сказанного может сложиться впечатление, будто словесная формулировка предложений и словесное выражение процесса доказательства не нужны. Однако это не так. Каждый обмен мыслями [между людьми], так же как каждый мыслительный процесс совершается с помощью языка; значит, чтобы сообщить о некоторой формуле или преобразовать ее, чтобы обсудить ее значение или только подумать о ней, мы должны воспользоваться языком; с другой стороны, если требуется применить формулу к предметам мышления и языка, то должна существовать возможность перевода формул на [обычный] язык. Поэтому перевод формул на обычный язык – это важное упражнение, особенно для начинающих, и к нему следует прибегать при каждом доказательстве. Когда учащийся выписывает формулы и производит с ними соответствующие операции, он должен формулировать и произносить те предложения, согласно которым производится преобразование каждой из них; он должен научиться передавать словами любую формулу и, наоборот, любое предложение представлять соответствующей формулой. Только выработав такого рода навык, он вполне овладеет соответствующими предложениями, будет их понимать и сможет, когда нужно, использовать их в своем мышлении.

Итак, чтобы научно обосновать логику, надо вступить на новый путь – путь использования одних лишь формул, и все доказательства приводить к равенствам, преобразуемым согласно строгим законам учения о мышлении. Ибо только эта форма доказательств не предполагает никакой логики, никакой грамматики, только она одна может придать мышлению строгую форму, так как в ней каждая величина обладает единственным значением, только она одна общезначима для любого мышления, так как в ней любая величина может обозначать все, что является или может стать предметом мышления.

Некоторые ученые в новейшее время пытались открыть для логики этот строго научный путь развития с помощью формул. Первым, кто попытался на него вступить, был англичанин Джордж Буль. Первыми его работами были:

The mathematical analysis of logic, being an essay towards a calculus of deductive reasoning. Cambridge, Macmillan. London, G. Bell, 1847;

The calculus of logic. In: Cambridge and Dublin Mathematical Journal. Vol. III, 1848, p. 183–198; эта работа была опубликована в 1847 и 1848 гг. Затем последовал главный труд Буля:

An investigation of the laws of thought, on which are founded the mathematical theories of logic and probabilities. London, 1854.

Однако эти работы совершенно не соответствуют требованиям, которые с научной точки зрения следует предъявлять к подобным сочинениям. А именно в своей логике Буль заранее предполагает все науки, в частности учение о числах – он работает с положительными и отрицательными числами, с целыми числами и дробями, например, использует числа 2, –1, 1/3, он даже применяет многозначную формулу 1/0, которая недопустима при вычислениях ни в учении о числах, ни в логике; он использует все учение о числах и алгебру, вплоть до уравнений первой степени со многими неизвестными и предпосылает своей логике все эти учения. Но это лишает его работы всякой ценности, даже если не обращать внимания на те ошибки, которые он разделяет со своими последователями и которые мы вскоре обсудим[8*].

После Буля труды по логике выпустили:

De Morgan. On the syllogism: III, 1858[9*];

Mr. *Jevons*. Formal logic, 1864;

C.S. Pierce. Three papers on logic из трудов американской академии искусств и наук 1867 г. С. 250–298;

J. Delboeuf. Logique algorithmique. Liege et Bruxelles, 1877;

Stanley Jevons. The principles of science. London and New York, 1877;

Э. Шрёдер, профессор из Карлсруэ; Der Operationskreis des Logikkalkuls. Leipzig, 1877;

C.S. Peirce. On the algebra of logic, 1880.

Во всех этих трудах преследуется одна и та же цель – вывести законы логики с помощью формул.

Благодаря перечисленным работам логика существенно продвинулась вперед. В частности, выдающийся математик Ч.С. Пирс еще в 1867 г. открыл, что закон отношения умножения к сложению взаимен, то есть что справедливо как отношение

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c \quad \text{и} \quad (b + c) \cdot a = b \cdot a + c \cdot a,$$

так и отношение

$$a + (b \cdot c) = (a + b) \cdot (a + c) \quad \text{и} \quad (b \cdot c) + a = (b + a) \cdot (c + a).$$

Выдающийся математик Шрёдер открыл, что единичность означает в логике всеобщность и что между предложениями, относящимися к сложению и умножению, существует полный параллелизм, который отсутствует во всех иных ветвях мышления.

Однако, несмотря на в высшей степени ценные открытия авторов упомянутых выше работ, логика еще не приобрела научного облика. А именно все эти ученые заблуждались, считая, что в логику, помимо сложения и умножения, можно ввести еще вычитание и деление; все они устанавливали для логики, что $a - a = 0$ и $a : a = 1$. Но если в логике это допустить, то возникнут наихудшие ошибочные умозаключения и все будет свалено в кучу. Действительно, в логике, как для сложения, так и для умножения действует закон объединения:

$$a + (b + c) = a + b + c \quad \text{и} \quad a(bc) = abc,$$

а также закон $a + a = a$ и $aa = a$; если допустить вычитание и деление, то сразу получится:

$$\begin{aligned} a = a + 0 = a + (a - a) &= a + a - a, && \text{и поскольку } a + a = a, \\ &= a - a && \text{и поскольку } a - a = 0, \\ &= 0, \end{aligned}$$

то есть каждая величина в логике становится нулем. Равным образом получается:

$$\begin{aligned} a = a \cdot 1 = a(a : a) = aa : a, &\quad \text{и поскольку } aa = a, \\ = a : a &\quad \text{и поскольку } a : a = 1, \\ = 1, & \end{aligned}$$

то есть каждая величина в логике становится единичностью. Если допустить и то, и другое, то получится: все величины в логике должны быть и единичностью, и нулем; но поскольку это невозможно, получается, что невозможно и логическое исчисление, которое развивается названными авторами.

Но если таким способом – или путем словесных доказательств, или другим путем, применяются четыре алгебраические операции, – цель недостижима, то надо пойти иным путем, путем, который соответствует строгой науке, и на этот путь, насколько мне известно, впервые вступил Р. Грассман в сочинении «Учение о понятиях, или Логика» (Штеттин, 1872).

Первоначально братья Грассманы в ходе совместной работы, проводившейся в 1847 г., в строго научной форме последовательных (индуктивных) доказательств вывели законы для сложения и вычитания, умножения и деления для учения о формах, или математики, а именно для учения о числах и для учения о протяженностях. Потом, спустя восемь лет, они возобновили совместную работу, причем в следующей форме: один из братьев производил предварительную разработку [некоторой темы], а другой ее критиковал и проверял; так в ходе совместных обсуждений вырабатывался требуемый строго научный метод. Таким способом в 1855–1856 гг. были проработаны арифметика и учение о протяженностях, логика и учение о комбинациях [комбинаторика]. После этого братья разделили свою работу. Герман взял на себя издание «Арифметики» и «Учения о протяженностях», из которых первое сочинение вышло в 1860, а второе – в 1862 г. Роберт Грассман взял на себя выпуск «Логики» и «Учения о комбинациях», однако к этой работе он приступил с запозданием.

«Арифметика» 1860 года в своей первой половине лучше всего демонстрирует ту форму, которую братья тогда разработали. Герман Грассман в своем «Учебнике математики» – часть 1: «Арифметика» (Штеттин, 1860 и Берлин, 1861) говорит об этом так: «Предлагаемая разработка арифметики, которая в своих существенных чертах представляет собой совместный труд – мой и моего брата Роберта, – претендует на то, чтобы быть первой строго научной разработкой этой дисциплины, более того – на то, что используемый в ней метод, как бы сильно он ни отличался от общепринятого, тем не менее во всех своих существенных моментах является не просто одним из возможных, но единственно возможным для строго последовательной и соответствующей существу дела трактовки данной науки. – На вопрос о том, оправданы или нет эти притязания – притязания, означающие одновременно обвинение предшествующих разработок в отсутствии у них научной строгости и последовательности, – ответ должен дать сам труд, поскольку полемическое или апологетическое обоснование упомянутых притязаний противоречит его непосредственной цели. Мы надеемся позже устранить этот изъян путем такой разработки математики, предназначенной для подготовленного читателя, в которой будут подчеркнуты все руководящие идеи и в деталях показана необходимость используемого метода. Однако я убежден, что уже теперь всякий, кто основательно и без предубеждений проштудирует предлагаемый труд, признает оправданность упомянутых притязаний».

«Учение о протяженностях» Г. Грассмана 1862 г. во многих пунктах демонстрирует уже иную форму. Но еще более отклонились от первоначальной формы «Логика» и «Учение о комбинациях», вышедшие из печати лишь через десять лет. Роберт Грассман на первое место здесь поставил уже новую ветвь – общее учение о величинах, за которым последовало краткое изложение логики и учения о комбинациях, учения о числах и учения о протяженностях; целью было – выставить в ясном свете, во-первых, поразительные связи и противоположности, характеризующие эти ветви, а с другой стороны, их параллелизм. Подобное изложение учения о величинах и логики, насколько мне известно, является первым строго научным представлением этих наук, в котором нет никаких ошибочных умозаключений и кругов в доказательствах, а логические умозаключения используются не ранее, чем их вывели и доказали в логике.

«Логика» Р. Грассмана 1872 года была написана автором, когда он еще не знал о предшествующих математических работах в этой области. Но предпринятое им представление логики имело, однако, перед работами его предшественников то преимущество, что базировалось на основательной проработке материала и избегало тех подводных рифов, о которые разбились другие построения логики с помощью формул, особенно же когда в логику вводились вычитание и деление. Выполненная тогда работа предполагала учение о величинах, и в ней на сорока страницах было представлено 76 предложений логики, в частности были выведены все фигуры умозаключений старой логики, – с целью показать, что с помощью формул можно получить все выводы, которые были доступны для прежней логики. Впрочем, труд 1872 г. был краток. Автору тогда удалось вывести и доказать только небольшую часть теорем логики; однако эти теоремы были выведены и доказаны по-настоящему строго научно.

«Логика» автора издания 1872 г. дважды обсуждалась в литературе – Шрёдером в его работе «Сфера операций логического исчисления» (Лейпциг, 1877) – в позитивном, и В.Вундтом в его «Логике» (Штуттгарт, ч. 1, с. 221) – в негативном духе. Господин Вундт утверждает, будто Р. Грассман занимает по существу такую же позицию, что и Буль; последний же переносит в область логики все четыре основные алгебраические операции, не ставя вопроса, обладают ли они каким-либо логическим смыслом; для Буля [пишет Вундт] логика есть некое исчисление, в котором все величины могут иметь только значения 0 и 1. Но подобные суждения совершенно не верны и доказывают, что господин В. Вундт вовсе не читал книгу Грассмана. В область логики Грассман вообще не переносит ни одну из четырех основных алгебраических операций. В алгебре, если $a \gtrless 0$, то и $a+a \gtrless 0$; а в логике, согласно Грассману, всегда $a + a = a$. В алгебре имеется вычитание, а в логике, по Грассману, – нет. В алгебре, если $a \gtrless 0$ и $a \gtrless 1$, то $aa \gtrless a$; в логике, по Грассману, всегда $aa = a$. В алгебре есть вычитание; в логике, по Грассману, нет никакого вычитания. Все суждения господина В. Вундта, таким образом, неверны и показывают, сколь поверхностен он в этой своей работе. К сожалению, это обнаруживается и в других частях его труда.

Господин В. Вундт не подозревает о наличии специфически логических законов, он даже не знает, что для логики $a + a = a$ и $aa = a$, по крайней мере он нигде об этом не говорит.

Но г-н Вундт в своей «Логике» оспаривает такие законы логики, которые со времени Аристотеля признаются всеми и которые несомненно верны, и делает он это без всякого доказательства: он просто это утверждает. Начиная с Аристотеля ученые едины в том, что для признаков, или сомножителей, имеет силу как объединение, так и перестановка, так что $a(bc) = abc$ и $ab = ba$. Господин Вундт оспаривает как первое, так и второе (см. с. 225 и 228 его труда); он согласен признать только закон отношения $a(b + c) = ab + ac$. Для логики «переживающий детство человек» и «человек в детском возрасте», то есть ab и ba совершенно одно и то же. Иначе в языке: изменяя порядок слов и их форму, мы можем изменить смысл, то есть получить другое логическое понятие. Так, например, «воинственный германец» и «германский воин» имеют в языке разный смысл. Ибо воинственному германцу не обязательно быть солдатом, а германскому солдату – не обязательно быть воинственно настроенным. Здесь слова «воинственный = воинственно настроенный» и «воин = солдат» имеют совершенно различное значение и составляют логически два совершенно разных понятия. Когда Вундт их смешивает, он совершает логическую ошибку. Для науки подобное изложение логики не имеет никакой ценности, и я должен об этом [прямо] сказать – как бы высоко я ни ценил [вклад] Вундта в других отношениях, признавая большие его заслуги в психологической науке.

Предлагаемая работа автора, выпускаемая в 1890 г., по сравнению с работой 1872 г. есть совершенно новый труд. В нем более чем в три раза больше предложений, а именно 245, из которых 18 приведены в Примечаниях. Если издание 1872 г. содержало главным образом те предложения, которые были совместно установлены братьями Грассманами, то данное издание является трудом, выполненным только автором этих строк. И хотя в него вошли предложения труда 1872 г., представлены они в измененном виде и с большими подробностями; поэтому ответственность за этот труд несет только его автор.

Таким образом, данное издание представляет собой новый труд. Он ничего заранее не предполагает и содержит всю логику, включая учение о доказательствах.

О НАУЧНЫХ РЕЗУЛЬТАТАХ ГЕРМАНА И РОБЕРТА ГРАССМАНОВ В СВЕТЕ ПОСЛЕДУЮЩИХ ИССЛЕДОВАНИЙ ЛОГИКИ МЫШЛЕНИЯ

Как известно, в дедуктивном знании XX в. господствующим в общем и целом являлся аксиоматический метод. Известно также, что аксиоматизация в ее чистом виде «проходит» только в достаточно абстрактных областях знания: в теоретической (т.е. не ориентированной – непосредственно во всяком случае – на внематематические приложения) математике, формализованной логике, отвлеченной от прикладных задач (это касается, в частности, и задач экспликации мыслительных процедур), в тех разделах физики (классическая и релятивистская механика, термодинамика закрытых систем), которые приобрели вполне «завершенный» характер; что касается тех областей, которые опираются на опытно-экспериментальный материал, пусть опосредованный системами теоретических «конструктов», то в них аксиоматизация принимает форму гипотетико-дедуктивного метода. Меньшее внимание, однако, привлекает то обстоятельство, что, кроме аксиоматического способа построения дедуктивного знания, еще в античности – да, пожалуй, еще и ранее, до выхода на историческую арену эллинов, т.е. в древневосточной математике – возник иной подход, подход генетический. Подход этот на протяжении веков, как тень, сопровождал использование (и развитие) дедуктивно-аксиоматического метода, почти не выступая его конкурентом. Причина такого положения дел состояла в бесспорной гносеологической плодотворности аксиоматизации, всегда несущей определенный – иногда весьма значительный – эвристический потенциал, приводящий к приращению знания. Освященная авторитетами Аристотеля и Евклида, аксиоматизация столетиями оказывалась в умах логиков, математиков и философов прочно связанной с идеей «строгого знания». Триумфально шествуя в математике после появления неевклидовых геометрий и разработки метода интерпретации аксиоматических систем, дополненный в конце XIX в. средствами логической формализации, аксиоматический метод на десятилетия прочно утвердился – наряду с теоретико-множественным способом мышления – в качестве одного из главных средств упорядочения знания и получения новых результатов в сфере дедуктивных наук.

Положение изменилось в середине XX в., что было связано с возникновением машинной математики, кибернетики и информатики, создавших новую гносеологическую ситуацию: ситуацию «усиления» человеческого мышления техническими устройствами переработки информации, т.е. средствами автоматизации определенных дедуктивно-индуктивно- и эвристико-вычислительных процедур. Но еще до возникновения данной ситуации «универсальность» метода аксиоматизации – во всяком случае в той его форме, в какой он сложился в классической логике и математике, – равно как и теоретико-множественного способа мышления, была поставлена под сомнение. Против абсолютизации установок на аксиоматизацию и теоретико-множественную интерпретацию дедуктивного знания выступили сначала интуиционисты, а потом и представители конструктивного направления. Реальной базой для последнего в 30-х годах XX века явилась теория алгоритмов, вылившаяся впоследствии в общую теорию алгоритмов и исчислений, ныне столь важную для уяснения логических основ дедуктивных наук. Постепенно стало ясно, что к двум «китам» выводного знания – аксиоматическому методу и средствам теоретико-множественного характера как источнику интерпретаций логических систем – следует добавить в качестве третьего «кита» – конструктивно-генетический подход; что подход этот не менее плодотворен в прикладном плане, чем два первые, и что с точки зрения постановок задач, возникающих при разработке систем автоматизации логических и вычислительных процедур, особенно в рамках направления «искусственного интеллекта», он даже более существенен, чем они.

Конечно, реальное развитие было отнюдь не таким простым. Новый подход пролагал себе путь в обстановке споров и борьбы идей; не «альтернативность», а «дополнительность» его по отношению к «старым» методам, его глубокая связь и с аксиоматизацией, и с теоретико-множественными представлениями, особенно в их теоретико-модельной форме, стали ясными далеко не сразу. Тем не менее ясность эта, по нашему мнению, наступила, и мы вправе говорить сегодня об органическом единстве круга идей, вызревших в каждом из отмеченных выше направлений методологии дедуктивного знания.

Для нашего изложения существенно, с одной стороны, то, что конструктивистско-генетические концепции современных математики и логики позволяют иначе взглянуть на те аспекты динамики дедуктивного знания (и его методологического осмысления) прошлого, которые носили «генетический» – связанный с идеей возникновения, порождения, конструирования – характер, а с другой стороны, то, что конструктивистские идеи мыслителей предшествующих эпох помогают лучше ориентироваться в тенденциях нынешнего логико-математического и логико-философского развития.

История науки свидетельствует: конструктивистские (алгоритмические, эффективистские и т.п.) компоненты с необходимостью присутствовали на любом этапе развития математики и логики. Внимательное изучение многовековой истории философско-математической мысли обнаруживает в ней идеи, которые в XX в. привели к логико-математическому конструктивизму, а с появлением ЭВМ и кибернетики – к машинной математике. В частности, в ином свете предстают некоторые, казалось бы известные, результаты, полученные еще в XIX веке. Более того, открывается новый историко-методологический аспект, относящийся прежде всего к *логическим основаниям* дедуктивных теорий.

Как свидетельствует научное наследие Грассманов, они внесли оригинальный вклад в возникновение *конструктивистских установок* в математике и логике XIX века, в формирование понятий ряда *абстрактных алгебраических структур* и в развитие *формализованной дедуктивной логики*.

ФОРМУЛИРОВКА АКСИОМАТИК ФУНДАМЕНТАЛЬНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ СТРУКТУР. ОТНОШЕНИЕ РАВЕНСТВА И ПОНЯТИЕ ПОЛУГРУППЫ

Как мы видели, для Германа Грассмана при разработке им вопросов философии математики руководящей была генетическая установка, альтернативная как аксиоматическому методу его времени, так и теоретико-множественному стилю мышления. Эта установка была реализована в его «общей теории форм», его «учении о протяженностях» (в рамках которого им были получены его главные конкретные математические результаты) и в том способе, которым он обосновывал (и развертывал) теорию целых чисел – способе, означавшем уже переход к индуктивно-рекурсивной методологии построения дедуктивных теорий.

Оригинальные черты «теории форм» Германа Грассмана не имели аналогов в работах других математиков и логиков его (и предшествующего) времени. «Теория форм» понималась им как учение, описывающее процессы «умственного конструирования», общие различным выделявшимся им «ветвям математики». Следует отметить, что основные утверждения и выкладки автора «общего учения о формах», в частности касающиеся соотношения «синтеза» как прямой бинарной операции над формами – величинами в широком смысле – и обратной синтезу «аналитической» (разрешающей) процедуры, требуют пояснений, из которых некоторые были даны в комментариях к его работам[1]. Здесь этот вопрос мы рассмотрим систематически.

Алгебраическое содержание «теория форм» после надлежащей реконструкции оказывается имеющим (в современной терминологии) следующий вид. Г. Грассман исходит, с одной стороны, из идеи *квазигруппы*, а с другой – формулирует постулаты *полугруппы*. От этих алгебраических структур путем введения свойства ассоциативности рассматриваемой им единственной прямой бинарной операции над «формами», с одной стороны, и обратных ей операций – с другой, происходит переход к (абстрактной) *группе* и затем к *абелевой* (коммутативной) группе. Введение второй бинарной операции, связанной с первой («синтезом») двумя законами дистрибутивности, порождает абстрактную алгебраическую структуру *кольца*.

Реально это выглядит следующим образом. Предметом «общего учения о формах» являются «формальные» понятия равенства и связывания, которые трактуются: первое – как бинарное отношение между формами (величинами в широком смысле), подпадающее под известное Лейбницево определение равенства[2], а второе – как бинарная операция над формами, обладающая весьма

[1] В теории Г. Грассмана, о которой идет речь, большое место занимает вопрос об однозначности «анализа» как обратной операции. На соответствующие идеи Г. Грассмана опирался А.Н. Уайтхед, разрабатывая свою «универсальную алгебру» (*Whitehead A.N.* Treatise on universal algebra with applications. Cambridge, 1898), позволяет раскрыть логический смысл грассмановского отношения равенства в тех случаях, когда оно используется при оперировании с неоднозначными «формами». Об этом см.: *Бирюкова Л.Г.* Проблема смысла аналитической операции в «общем учении о формах» Г. Грассмана // История и методология естественных наук. Математика, механика. М., 1986.

[2] Вот одна из лейбницевских формулировок: Eadem seu C o i n c i d e n t i a sunt quorum alteratrum ubilibet potest substitui alteri salva veritate (*G.W. Leibniz.* Specimen calculi coincidentium et inexistentium; цит. по двуязычному – латинско-немецкому – изданию: *G.W. Leibniz.* Die Grundlagen des logischen Kalküls. Felix Meiner Verlag. Hamburg, 2000, S. 116). Это – знаменитый принцип замены с сохранением истины (*salva veritate*).

ограниченными наборами свойств. А именно понимаемое «по Лейбницу» (без ссылки на последнего) отношение равенства определяется с помощью представления о взаимозаменимости выражений в контекстах: «равными являются те формы, о которых всегда может быть высказано одно и то же, или более общо: такие ⟨формы⟩, которые в каждом суждении заменяемы одна другой».

Очевидно, что отношение равенства – логическая основа правила замены равным, позволяющего производить тождественные преобразования «форм» (величин). В привычных нам теперь обозначениях определение равенства можно записать так:

$$a = b = Df\, \Phi[a] \equiv \Phi[b],$$

где a и b – произвольные формы, Φ – любое возможное в данном языке высказывание о формах (знак $\equiv$ означает логическую эквивалентность, передаваемую словами «тогда, и только тогда», «если, и только если», а знак « $= Df$ » читается «есть по определению»). Как мы указывали в Комментариях, из этого определения следует правило замены равным: $a = b, \Phi[a] \vdash \Phi[b]$, где $\vdash$ есть знак логического следования. Г. Грассман использует это правило, когда указывает, что в определении равенства содержится правило, которое можно записать в следующем виде: для любых форм a, b, c, если $a = c$ и $b = c$, то $a = b$. В самом деле, поскольку $b = c$, а про c из первой посылки известно, что оно обладает свойством (Φ) быть равным a, то и b обладает свойством Φ, т.е. $a = b$. Аналогично доказывается и используемое Г. Грассманом в дальнейшем свойство транзитивности отношения равенства. Что касается свойств рефлексивности и симметричности, то они тем более содержатся в грассмановском определении отношения равенства. Оно, таким образом, предусматривает любые «отношения типа эквивалентности», в частности и те, которые впоследствии, уже в XX в., использовались при задании массовых проблем тождества слов в теории полугрупп и групп.

Будучи решительным сторонником генетического метода в математике, Г. Грассман формулирует отношение равенства также и в «генетических» (как мы теперь можем сказать) терминах: «то, что из одинакового порождается одним и тем же способом, в свою очередь одинаково»; это определение вполне в духе последующих ассоциативных исчислений как порождающих процессов.

Наряду с отношением равенства форм вводится понятие об их связывании. Связывание, по Г. Грассману, есть некоторая бинарная операция – она обозначается им знаком $\frown$, – которая из двух форм порождает в общем случае новую форму; в записи $a \frown b$ буква a обозначает предшествующий, а буква b – последующий член связи. Для удобства, говоря словами Грассмана, вводится сокращение в обозначениях: в случае связывания членов, число которых больше двух, скобки разрешается опускать, то есть писать, например, не $(((a \cap b) \cap c) \cap d)$, а $a \cap b \cap c \cap d$.

Далее, в § 3 введенная операция предполагается обладающей свойством ассоциативности (в грассмановской терминологии – совместимости предшествующего и последующего членов), то есть свойством: $(a \cap b) \cap c = a \cap (b \cap c) = a \cap b \cap c$. Тем самым вводится то, что ныне называется *полугруппой*, причем полугруппой абстрактной – как множеством всех «форм», на котором определена единственная бинарная ассоциативная операция.

В последующем мысль Г. Грассмана развивается следующим образом. Прибегая фактически к «свернутому» рассуждению по индукции, он доказывает теорему (№ 3.1) о том, что если связывание таково, что для трех членов удаление скобки возможно, то это же возможно при любом числе членов (под скобкой при этом понимается совокупность двух знаков – открытия и закрытия скобки); естественно, конечно, и разрешение восстанавливать удаленные (подразумеваемые) скобки.

Затем вводится свойство перестановочности связываемых членов: $a \cap b = b \cap a$, которое добавляется к уже введенному свойству ассоциативности. Так получается то, что сейчас называется *коммутативной полугруппой*. Г. Грассман подчеркивает, что свойство ассоциативности предшествует свойству коммутативности в следующем смысле: если для некоторого связывания установлена только перестановочность двух его членов, то отсюда не могут быть извлечены какие-либо следствия, но если ее присоединить к ранее введенному свойству «совместимости» членов, то можно доказать ряд предложений (теорем). Среди последних важно прежде всего заключение, что «в случае многочленного выражения порядок членов безразличен для общего результата».

Подразумеваемое Г. Грассманом обоснование этого следствия легко восстановить. В самом деле, любые рядом стоящие члены – в последующих выкладках пусть это будут b и c – можно поменять местами:

$$
\begin{aligned}
a \cap b \cap c \cap \ldots \cap g &= a \cap (b \cap c) \cap \ldots \cap g && \text{(по теореме 3.1)}\\
&= a \cap (c \cap b) \cap \ldots \cap g && \text{(по свойству коммутативности операции } \cap \text{ и правилу замены равным)}\\
&= a \cap c \cap b \cap \ldots \cap g && \text{(по теореме № 3.1)}
\end{aligned}
$$

Повторяя процедуру перестановки любых двух рядом стоящих членов, мы можем любой член поместить на любое место. Не считая, по-видимому, нужным индуктивно доказывать это утверждение, Г. Грассман формулирует общий вывод: «если связывание таково, что для трех членов без изменения результата скобки можно расставлять любым способом, а для двух членов – менять порядок последних, то расстановка скобок и порядок членов безразличны для результата при любом числе членов». Связывание, удовлетворяющее этому условию, то есть *ассоциативную* и *коммутативную* бинарную операцию, определенную на формах и порождающую формы же, он называет *простым* сочленением.

ОБЩЕЛОГИЧЕСКОЕ ЗНАЧЕНИЕ КАТЕГОРИЙ РАВЕНСТВА И АССОЦИАТИВНОСТИ

Здесь стоит указать на ту роль, которую в последующем развитии оснований математики и логики сыграло столь бедное свойствами понятие полугруппы. Понятие это обрело новую жизнь в период возникновения теории алгоритмов. Мы имеем в виду проблему «тождества слов» в *ассоциативных исчислениях*, которые с алгебраической точки зрения представляют собой полугруппы. Дело в том, что для становления теории эффективной вычислимости, неотделимой от судеб символической дедуктивной логики, кардинальную роль сыграла проблема установления возможности или невозможности алгоритма как предписания, ведущего от варьируемых исходных данных (заданных на некотором языке) к искомому результату. Для развития конструктивистских концепций в XX веке, которые были предвосхищены Грассманами, решающим оказалось открытие алгоритмически *неразрешимых* массовых проблем. Каждая *массовая проблема* охватывает бесконечный класс конкретных задач, которые различаются значениями некоторого параметра (параметров), фигурирующего в условии (условиях), задающем данную массовую проблему (проблему с параметром). По определению, массовая проблема разрешима, т.е. имеет решение, когда каждая конкретная задача – задача, получающаяся после выбора какого-либо значения (значений) параметра (параметров) массовой проблемы, – получает решение в результате применения единообразного (регулярного, как выражался, например, Н.Н. Лузин) метода. При этом требуемый результат получается за конечное число шагов применения метода – число это может быть, правда, очень большим, но от этого отвлекаются: производят так называемую абстракцию потенциальной осуществимости. Регулярность метода состоит в его эффективности: он должен «перерабатывать» конструктивные объекты (объекты однозначно различаемые и отождествляемые), быть детерминированным и целенаправленным. Массовая проблема разрешима (или, говоря более развернуто, алгоритмически разрешима), если такого рода метод существует, и неразрешима, если доказано, что его не может быть; массовая проблема называется иначе алгоритмической проблемой, поскольку искомый разрешающий метод должен быть алгоритмом. Экспликации понятия алгоритма, в 30–40-х годах XX столетия по-разному разработанные рядом математиков, логиков и философов, оказались равносильными в том смысле, что они описывают по существу одинаковый процесс: *вычисление, дедуктивное доказательство, построение* и т.п., – осуществляемый по четким правилам.

Первые неразрешимые проблемы были найдены непосредственно в символической логике. После разработки (в середине 30-х годов) теории алгоритмов (теории, занимающейся уточнением понятия алгоритма) неразрешимые массовые проблемы были обнаружены в самой этой теории.

Однако логика и теория алгоритмов в некотором смысле «экзотичны» – далеки от «традиционных» учений логики и математических дисциплин. Поэтому возникал вопрос: а не есть ли алгоритмическая неразрешимость выражение именно «экзотичности». В пользу такой гипотезы говорила, как будто, и специфичность первых найденных неразрешимых проблем, например, их «самоссылочность» – сходство со знаменитым «парадоксом лжеца».

Вопрос о том, имеются ли в «обычных» математических теориях такие массовые проблемы, для которых невозможен алгоритм их решения, не сразу получил ответ. Прошло более десяти лет, пока, наконец, А.А. Марков и Э. Пост не дали на него утвердительного ответа: произошло это в одном и том же 1947 году, а соответствующие результаты были получены независимо один от другого.

Проблема, о которой идет речь, была сформулирована А. Туэ в 1914 г. применительно к теории полугрупп и заключалась в решении для нее упомянутой *проблемы тождества* слов. Исследуя проблему Туэ, А.А. Марков ввел понятие *ассоциативного исчисления* – исчисления, которое служило для задания конечно определенных *полугрупп*. Ассоциативное исчисление имеет следующий вид. Предполагается (конечный) алфавит знаков (букв), из которых строятся слова в этом алфавите. Предполагается, далее, конечный перечень формул подстановок слов в слова, т.е. правила вида $PQ_1R \leftrightarrow PQ_2R$, имеющих смысл: в слове PQ_1R мы имеем право заменить слово Q_1 словом Q_2, а в слове PQ_2R слово Q_2 – словом Q_1. Так, если задан алфавит A (например, состоящий из всех строчных букв кириллицы) и некоторый перечень формул подстановок, любая из которых *может* быть применена к данному слову, если в нем содержится (под)слово, входящее в левую либо правую часть рассматриваемой формулы подстановки, то тем самым задано определенное ассоциативное исчисление U_{ac}, и на множестве слов в алфавите A определено отношение типа равенства (тождества, эквивалентности): два слова S и T тождественны тогда и только тогда, когда они графически совпадают или одно может быть получено из другого с помощью формул подстановок, примененных конечное число раз. Это отношение разбивает все множество слов в алфавите A на классы эквивалентности; эти классы и составляют элементы той полугруппы, которая соответствует данному исчислению U_{ac}; что касается операции полугруппы, то ею является простое приписывание (например, справа) слова к слову.

Проблема Туэ для полугрупп (ассоциативных исчислений) заключалась в построении алгоритма, который по двум предъявленным произвольным словам в заданном ассоциативном исчислении давал бы ответ на вопрос, равны ли эти слова или нет (в смысле описанного выше отношения тождества слов). Марков и Пост решили эту проблему отрицательно, построив конкретные полугруппы, для которых проблема тождества неразрешима.

Мы видим, таким образом, к сколь важным вопросам приводит использование свойств отношения равенства вместе с ассоциативной операцией. Но именно это – равенство и ассоциативность – составляло исходный пункт всей теоретической конструкции, возведенной Германом, а потом и Робертом Грассманом. И когда мы ныне размышляем о проблематике разрешимости–неразрешимости теорий, не худо бы помнить, что многие из них связаны с таким первичным отношением, как отношение типа равенства (тождество слов, изоморфизм, гомеоморфия и т.п.). Это отношение стало источником многих модельных объектов (выражение А.А. Ляпунова), удобных для исследования вопросов дедуктивной логики и теории алгоритмов, и это несмотря на то, что соответствующие алгебраические структуры могут оказаться (как с точки зрения их задания, так и их свойств) достаточно простыми – быть полугруппой.

ПОНЯТИЕ КВАЗИГРУППЫ. ПРЯМАЯ И ОБРАТНАЯ БИНАРНЫЕ ОПЕРАЦИИ

Следующий важный шаг, который Г. Грассман делает в своей «теории форм», – это введение операции, являющейся обратной относительно исходного связывания и обозначаемой знаком $\cup$. Она, как мы знаем, получает у него название «аналитического соединения», «аналитической процедуры» или просто «анализа», в то время как исходная – прямая – операция отныне именуется «синтетической» или «синтезом». Напомним характеристику «анализа». «Аналитическая процедура состоит в том, что по результату соединения и одному из его членов отыскивается другой. Поэтому с произвольным соединением могут быть связаны процедуры двух родов, смотря по тому, чтó отыскивается, – предшествующий или последующий член; процедуры обоих родов дают один и тот же результат, когда оба члена исходного соединения перестановочны». При этом не предполагается ни ассоциативности, ни коммутативности синтеза: обратной может быть и операция, прямая к которой не коммутативна (это приводит к понятию абстрактной группы) и даже не ассоциативна. Последнее допущение порождает, в современных терминах, понятие (абстрактной) *квазигруппы* как множества всех «форм», на котором определена бинарная операция, для которой существуют две ей обратные[3].

Г. Грассман, однако, не встает на путь этих, более общих исследований полугрупп и квазигрупп, только подразумевая их возможность. Он исходит из предположения, что исходное синтетическое связывание просто (то есть ассоциативно и коммутативно) и извлекает из этого допущения ряд производных свойств, характеризующих операции $\cap$ и $\cup$ и их взаимоотношения. Именно с этого момента «теория форм» Г. Грассмана приобретает особенный логико-методологический и историко-математический интерес.

Вернемся к грассмановскому «анализу». Способ введения «аналитического связывания» по данному синтетическому имеет следующий вид. Обозначим «разыскиваемый» член синтетического связывания, если он предшествует знаку $\cap$, через x, а если он следует за ним, то через y. Таким образом, мы имеем:

1) $x \cap b = a$ и 2) $c \cap y = a$.

---

[3] Понятие квазигруппы на конкретных примерах впервые было подробно рассмотрено Э. Шрёдером. См.: *Ибрагимов С.Г.* О логико-алгебраических работах Эрнста Шрёдера, предвосхитивших теорию квазигрупп // Кибернетика и логика. М.: Наука, 1978.

Если операция синтеза коммутативна, а b и c – одинаковые формы, то $x \cap b = y \cap b = a$. Получается, что разыскать x по данным a и b – это все равно, что разыскать y по тем же a и b.

Поскольку при записи найденного результата важен и вопрос о порядке для форм a и b, Г. Грассман вводит условие: при аналитическом связывании в качестве предшествующего члена должен выступать результат синтетического связывания, являющийся заданным. Это условие дает возможность согласовать «анализ» с «синтезом» так, что аналитическая процедура в случае арифметики целых чисел оказывается обычной операцией вычитания. Отсюда следующее определение «аналитического связывания» (§ 5): $a \cup b$ означает такую форму, которая в синтетическом связывании с b дает a, так что можно записать:

$$(a \cup b) \cap b = a. \tag{1}$$

Затем следует дальнейший шаг (§ 6): Г. Грассман вводит «новое допущение» о том, что результат аналитического или разрешающего (как он его еще называет) связывания должен быть однозначен; это утверждение означает, «иначе говоря, что если один член синтетического связывания остается неизменным, а другой изменяется, то обязательно изменяется результат».

Это утверждение наполняется реальным содержанием, если его прочитать как логический переход

$$a \neq b \vdash a \cap c \neq b \cap c, \tag{I}$$

или, что по существу то же самое, как правило

$$a \cap c = b \cap c \vdash a = b; \tag{II}$$

поскольку c, в силу коммутативности операции $\cap$, можно поменять местами с a и b, мы имеем также правило: $c \cap a = c \cap b \vdash a = b$.

Теперь нетрудно убедиться в том, что из (II) вытекает однозначность анализа. Если $x \cap b = y \cap b = a$, то из (II) следует, что $x = y$. И «решая уравнения» $x \cap b = a$ и $y \cap b = a$ по отдельности, мы приходим к тому, что x и y имеют один и тот же вид $a \cup b$.

Явная формулировка правила (II) делает ясным и смысл утверждения Г. Грассмана о том, что из однозначности анализа вытекает то, что

$$(a \cap b) \cup b = a. \tag{2}$$

В самом деле. Возьмем в определении (I) в качестве a формулу $a \cap b$ и запишем $((a \cap b) \cup b) \cap b = a \cap b$. Применив правило

(II) к последнему равенству, получаем (2). Если приравнять равенства (1) и (2), то мы получим равенство

$$(a \cup b) \cap b = (a \cap b) \cup b. \qquad (3)$$

А на этой основе открывается возможность доказать однозначность синтетической связи в виде двух упомянутых выше правил:

$$a \cap c = b \cap c \vdash a = b, \quad c \cap a = c \cap b \vdash a = b$$

(см. выше правило (II)). В силу коммутативности синтеза достаточно доказать любое из них, например, первое. Доказательство имеет вид:

$a = (a \cup c) \cap c$	в силу (1)
$= (a \cap c) \cup c$	в силу (3)
$= (b \cap c) \cup c$	в силу посылок правила II
$= b$	в силу (2).

Таким образом, в предположении однозначности анализа синтез не может быть неоднозначным. Это делает понятным, почему Г. Грассман может не оговаривать соответствующее свойство прямой операции[4].

ОПРЕДЕЛЕНИЕ АБСТРАКТНОЙ ГРУППЫ

Вчитываясь в скупой текст «Очерка общего учения о формах», мы убеждаемся в том, что Г. Грассман закладьвает в нем основы абстрактных формулировок таких фундаментальных алгебраических структур, как группа и кольцо. Этот вопрос в имеющейся литературе освещен недостаточно. Даже в исследованиях, непосредственно посвященных работам Г. Грассмана, на эту сторону дела не обращается должного внимания; тем более это касается общих работ по истории и методологии математики XIX века и такого важного ее раздела, как алгебра. Так, в статье, специально посвященной роли Г. Грассмана в создании линейной алгебры,

---

[4] Но по той же причине А.Н. Уайтхед в своем «Трактате об универсальной алгебре» с самого начала считает синтез однозначной операцией. Проблема смысла операций $\cap$ и $\cup$ в свете изложения грассмановского подхода в появившемся более полувека спустя уайтхедовском «Трактате» рассмотрена в статье, упомянутой выше в подстрочном примечании 1. К сожалению, при подготовке ее к печати в правилах, обосновывающих однозначность синтеза (обозначены как III' и III''), вместо знака $\cap$ был набран знак $\cup$, и в результате выкладки, следующие за этими правилами, не могут являться доказательством последних.

мы читаем: «Характерной чертой труда Грассмана, далеко опередившего свое время, является стремление использовать неявные определения – такие, что математическая структура характеризуется скорее путем указания ее формальных свойств, нежели ее явного построения. Например, в *Ausehnungslehre* 1844 года он действительно близко подходит к абстрактному понятию (не обязательно ассоциативного) кольца; что отсутствовало у него – так это язык теории множеств ⟨...⟩. Между прочим, первое формальное определение кольца было дано Френкелем в 1915 г.»[5]. Автор статьи ничего не говорит о месте Грассмана в истории теории групп, утверждение же его о том, что Г. Грассман лишь «близко подходит» к абстрактному понятию кольца, которое было в ясном виде сформулировано только в 1915 г., может просто ввести в заблуждение.

История групповых структур уходит в глубь веков: уже в арифметике целых чисел содержится группа (например, по сложению). В XVIII – первой половине XIX в. появляются систематические описания иных конкретных групп (конечных групп различного порядка, групп симметрии, групп подстановок). Определяющим для возникновения *теории* групп считается 1846 год – год публикации главных работ Эвариста Галуа, выполненных еще на рубеже 20–30-х годов. В этих работах, относящихся к теории уравнений, был изучен ряд важных теоретико-групповых вопросов. Заслуга Галуа, как выяснено ныне, заключалась не только в том, что он свел исследование алгебраических уравнений к изучению групп перестановок, которые подверг специальному рассмотрению, но и в изучении других групп, обладающих определенными свойствами. Но общее определение группы им, по-видимому, сформулировано не было. Считается, что первое определение «абстрактной» группы и соответствующие исследования были выполнены А. Кэли (1854 г.). Однако известно, что последний работал скорее с конкретными группами. Изучение «Очерка общего учения о формах» показывает, что понятие об абстрактной группе было введено (без какой-либо «групповой» терминологии) за 10 лет до Кэли: это было сделано Г. Грассманом в труде 1844 года.

В современной литературе обычно используются два следующих определения группы.

Пусть задано произвольное множество элементов M, замкнутое относительно определенной на нем единственной бинарной

[5] *Fearnley-Sander D.* Hermann Grassmann and Creation of Linear Algebra // American Mathemat. Monthly. 1979. Vol. 86, N 10.

операции (будем обозначать ее знаком « + », то есть определять, как говорят, аддитивную группу).

Определение I: 1) операция + ассоциативна: $(a + b) + c = a + (b + c)$ для любых a, b, c из множества M; 2) в M существует такой элемент, называемый нулем, что $a + 0 = 0 + a = a$ для любого $a \in M$; 3) для любого элемента $a \in M$ существует ему обратный, т.е. такой элемент $-a \in M$, что $a + (-a) = (-a) + a = 0$.

Определение II: 1) операция + ассоциативна; 2) для любых двух элементов a, b из M существует в M такой однозначно определенный элемент x и такой однозначно определенный элемент y, что $a + x = b$, $y + a = b$ (т.е. выполнима обратная операция и, например, $x = b - a$, $y = b - a$). Если групповая операция коммутативна, то $x = y$, и группа называется коммутативной или абелевой.

Эти определения равносильны, т.е. каждое предложение, входящее в одно из определений, является следствием другого определения. Как мы отмечали выше, у Грассмана присутствует абстрактная коммутативная группа над произвольными элементами («мыслительными формами»), задаваемая определением II. В роли групповой операции выступает синтетическое связывание, которое ассоциативно и коммутативно, в роли обратной операции – анализ. Поскольку синтез коммутативен, анализ оказывается единственной обратной операцией. Однако Грассман предусматривает и случай неединственности анализа; это означает, что в §§ 3–5 содержится фактически определение абстрактной (не обязательно коммутативной) группы.

Мы можем считать, что определение группы задается у Грассмана:

1) законом ассоциативности;

2) равенством $(a \cup b) \cap b = a$, (1)

вводящим обратную операцию;

3) равенством $(a \cap b) \cup b = a$, (2)

обеспечивающим ее однозначность.

Таким образом, в изложении Грассмана мы имеем группу в смысле определения II. В последующем изложении он доказывает предложения, входящие в определение I. А именно с помощью аналитической процедуры Г. Грассман получает «неопределенную» и «аналитическую» формы. Форма вида $a \cup a$, согласно его «Очерку», представляет собой «неопределенную» форму, значение которой не зависит от a. В самом деле, рассмотрим две формы: $a \cup a$ и $b \cup b$, для произвольных a, b, и покажем, что они равны.

Из (1) следует $(b \cup b) \cap b = b$. Но поскольку $(a \cup a) \cap b = b \cap (a \cup a) = (b \cap a) \cup a = b$, мы получаем $(a \cup a)b = (b \cup b)b$. Тогда из однозначности аналитической процедуры (правило II) получается, что $a \cup a = b \cup b$. Таким образом, неопределенная форма единственна; она обозначается Грассманом знаком $\backsim$.

Форма $\backsim$ есть нуль группы, так как для любого a им доказано, что а $\cap \backsim = \backsim \cap a = a$; в аддитивной записи это означает п. (2) определения I.

Далее Г. Грассман вводит «аналитическую» форму для произвольного элемента a, обозначаемую им поначалу через $\backsim \cup a$, а потом через $\cup a$; элемент $\cup a$ оказывается обратным в группе элементу a. В силу этого мы имеем следующие равенства: $a = a \cup \backsim$, $a = a \cap \backsim = \backsim \cap a$ (последнее дает п. (2) определения I). Кроме того, им отмечается, что непосредственно можно доказать равенства $\cap (\cup a) = \cup a$, $\cup (\cup a) = \cap a$ ($\cap a$ есть сокращение для $\backsim \cap a$). На последнее равенство мы можем смотреть как на п. (3) определения I: $\backsim \cap (\cup a) = \cup a$, откуда $\backsim = (\cup a) \cup (\cup a) = (\cup a) \cap a = a \cap (\cup a)$.

Необходимо еще принять во внимание слова Г. Грассмана о том, что если синтетическое связывание представляет собой сложение, то аналитическую форму можно называть отрицательной формой, а неопределенную – нулем. Тогда мы с полным правом можем считать, что у Грассмана сформулирована система постулатов (коммутативной) группы в виде определения I.

ГРУППОВЫЕ И РЕШЕТОЧНЫЕ СТРУКТУРЫ МЫШЛЕНИЯ

Как известно, исходная логическая система, выражающая свойства «правильного мышления», – *пропозициональная логика* алгебраически передается *дистрибутивной решеткой с дополнениями*, или *булевой алгеброй*. В «Общем учении о формах» Германа Грассмана решетки нет – путь к ней закрывается, как только вводится группа. Возникает вопрос: существуют ли такие аспекты логического мышления, которые описываются в терминах группы. Положительный ответ на него означал бы обогащение наших представлений о путях формализации мыслительных процедур. И он пришел, причем как со стороны математики, так и со стороны психологии. В фундаментальных теоретико-групповых исследованиях математика, физика и философа Германа Вейля был раскрыт аспект теории групп, строящийся на идее симметрии. Последняя, с одной стороны, выступает в качестве той идеи, с помощью которой «человек на протяжении веков пытался постичь и создать порядок, красоту, совершенство», а с другой стороны, которая великолепно демонстрирует «как работает математическое мышление»[6]. Сказанное Германом Вейлем, однако, касается не только мышления в математике, но логического мышления вообще. Это стало ясно после работ психолога и философа Жана Пиаже, разработавшего концепцию логико-психологического представления интеллекта в терминах «группировок»[7]. В ее рамках симметрия, заключающаяся в системе пропозициональных логических операций интеллекта на завершающей стадии его формирования у личности, получает выражение в алгебраической структуре, являющейся коммутативной группой четвертого порядка. Группа эта состоит из элементов множества $M = \{N, R, D. I\}$, которые представляют собой следующие преобразования функций алгебры логики (булевой алгебры): отрицание функции, ее «реципрокцию» (состоящую в замене аргументов их отрицаниями), дуализацию функции и (тождественное) преобразование, оставляющее функцию без изменения. Пиаже рассматривал функции от двух и трех аргументов, но отмечал, что N, R, D и I определены и для прочих булевых функций. Швейцарский психолог в области логики сотрудничал с математическим логиком Э. Бетом и мог быть уверен в правильности своих выводов. И действительно, демонстрация того, что эти групповые элементы определены для функций от произвольного конечного числа аргументов, не составляет труда. Групповой операцией при этом оказывается суперпозиция названных преобразований, т.е. последовательное применение двух преобразований к некоторой булевой функции. Нетрудно убедиться, что группа Пиаже удовлетворяет постулатам грассмановского определения группы и что в ней $N \cap R = D$, $N \cap D = R$, $R \cap D = N$, а обратная операция $\cup$ и совпадает с прямой $\cap$. Интересно, что возможны и иные теоретико-групповые характеристики логики высказываний; например, можно показать (К.И. Бахтияров), что функции алгебры логики (от двух аргументов) образуют группу восьмого порядка.

Формулировка законов логики, как известно, зависит от характера используемого логического аппарата. Он, конечно, не обя-

[6] *Weyl H.* Simmetrie. Princeton, New York, 1952; русск. перев.: *Вейль Г.* Симметрия. М., 1968. С. 37, 160.

[7] *Пиаже Ж.* Избранные психологические труды. М., 1969 (см. помещенные там его работы «Психология интеллекта» и «Логика и психология»).

зан быть алгебраическим, а может быть, например, построен в виде аксиоматической системы гильбертовского типа, как натуральное либо секвенциальное исчисление и др. Во всех этих построениях – мы имеем в виду классическую пропозициональную логику, за рамки которой Грассманы не выходили, – можно выделить «группу Пиаже» либо ее аналоги и вариации[8]. Да и в «традиционной» схеме логического квадрата, выражающего взаимоотношения между общими и частными, утвердительными и отрицательными субъектно-предикатными суждениями аристотелевской логики содержится группа четвертого порядка. Но когда ныне говорят об алгебраическом «образе» пропозициональной логики, обычно имеют в виду не группу, а решетку.

Решетка как алгебраическая структура в определенном смысле альтернативна группе, так как в решетке имеются *две* операции (а не одна, как в группе), и каждая из них обладает таким необычным для многих алгебраических структур свойством, как *идемпотентность*. И тут мы должны перейти от «учения о формах» Германа Грассмана к носящему то же название учению его брата Роберта. Ибо он считал упомянутую идемпотентность характеристическим признаком *логики*.

Ход мысли Р. Грассмана иной, нежели его старшего брата: от (коммутативной) полугруппы он переходит не к группе, а к дистрибутивной решетке. Этот факт был отмечен нами в Комментариях к его «Логике» 1872 г. Здесь мы осветим вопрос с иной стороны. Можно показать, что из логико-алгебраических построений Р. Грассмана нетрудно извлечь определение решетки как такого частично упорядоченного множества «форм» (в логике: понятий) – то есть объектов, для которых определено отношение «≤», – в котором для двух любых форм существует *точная верхняя* и *точная нижняя* грани. Они задаются соответственно операциями сложения (в логике – объединения классов) и умножения (в логике – пересечения классов). Неравенства $a \cdot b \leq a$, $ab \leq b$, $a \leq a + b$, $b \leq a + b$ доказаны в его «Логике» 1872 г., а правила логического перехода

$$\frac{a \leq c, b \leq c}{a + b \leq c}, \quad \frac{c \leq a, c \leq b}{c \leq a \cdot b}$$

[8] См.: *Бирюков Б.В., Бирюкова Л.Г.* Обобщение теоретико-групповой схемы логики интеллекта, разработанной Ж. Пиже // Bulletin Psychologického Ústavu ČSAV (Sborník statí věnovaných k šedesátinám člena korespondenta Josefa Linharta) 1977. № 15.

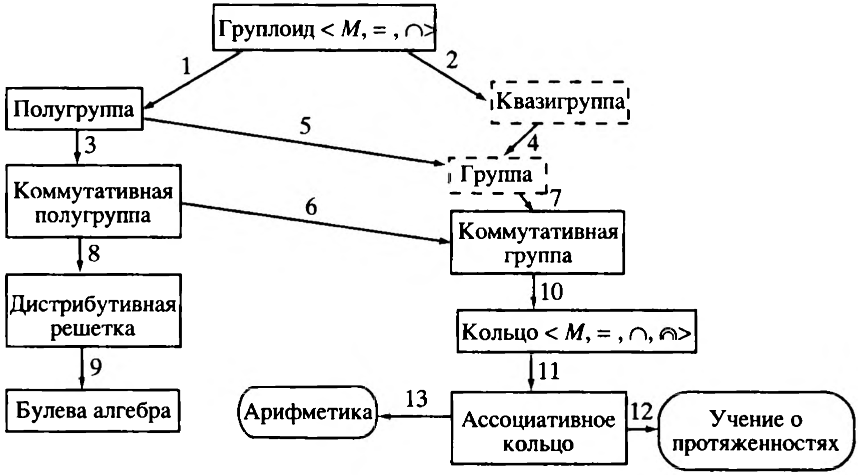


Рис. 1.

1 – свойство ассоциативности операции $\cap$; 2 – обратные операции $a \cap x = b$; $x = b \cup a$, $y \cap a = b$; $y = b \Cap a$; 3 – свойство коммутативности операции $\cap$; 4 – свойство ассоциативности операции $\cap$; 5, 6 – операции, обратные для $\cap$; 7 – свойство коммутативности операции $\cap$; 8 – две бинарные операции $\bigcirc$, $\odot$; свойства дистрибутивности; 9 – структура $\langle M, =, \leq, \bigcirc, \odot \rangle$ и дополнения; 10 – вторая бинарная операция $\Cap$, два связывающие их свойства дистрибутивности; 11 – ассоциативность операции $\Cap$, 12 – отсутствие коммутативности операции $\Cap$; 13 – коммутативность операции $\Cap$, M – множество целых чисел. Характер переходов 11, 12 и 13 станет ясен из последующего изложения.

легко получить его средствами, логический же их смысл раскрывается, если прочесть $\leq$ как включение класса (объема понятия) в класс. Действительно, если произвольные классы a, b включаются каждый в класс c, то ясно, что в класс c включается и объединение классов a и b; и если какой-то класс c включается как в класс a, так и в класс b, то ясно, что класс c включается в пересечение классов a и b.

Известно, что в логике *высказываний* большую роль играет операция материальной *импликации*: в ее терминах, например, обычно доказывается столь важное при аксиоматическом построении этой логики предложение, как *теорема о дедукции*. В каком виде, спрашивается, присутствует в грассмановском логическом учении импликация? Ответ на этот вопрос приводит к выводу, с которым Р. Грассману, наверное, было бы трудно согласиться. Дело в том, что он категорически настаивал, что в логике не может быть обратных операций. Но определенная им дистрибутивная решетка с дополнениями, в которой были наибольший («всеобщность», T) и наименьший (нуль) элементы, была решеткой *импликативной*: в ней определяема операция, в известном смысле обратная операции умножения, – операция *деления* в решетке. Впрочем, такая решетка оказывается *булевой алгеброй*.

Систему алгебраических структур, предвосхищенных либо разработанных Грассманами, можно передать схемой, представленной на рис. 1. Запись $<M, =, \frown>$ означает, в современных терминах, алгебраическую структуру (реляционную систему), называемую группоидом; M есть носитель структуры – совокупность «мыслительных форм», на которой определена единственная бинарная операция $\frown$ и отношение равенства форм. Блоки, изображенные с помощью сплошных линий, соответствуют структурам, постулаты которых были непосредственно сформулированы на языке «теории форм»; блоки, изображенные с помощью пунктирных линий, – структуры, существование которых было выражено Грассманами в описательной форме, неявно. Стрелки занумерованы, при номерах указаны вводимые операции и их свойства, то есть то, что влечет переход от одной структуры к другой.

ДИАЛЕКТИКА УЧЕНИЯ О ПРОТЯЖЕННОСТЯХ ГЕРМАНА ГРАССМАНА

В самом конце своего очерка «учения о формах» Герман Грассман возвращается к главой идее, высказанной им во «Введении» к труду 1844 года, а именно к мысли о естественности *генетического* построения математики. Согласно Г. Грассману, соединение форм путем синтеза как ассоциативной и коммутативной операции (путем простого синтеза) можно истолковывать как *процесс порождения* все более сложных форм, состоящих из положительных (вида $\frown a$) и отрицательных (вида $\smile a$) величин – величин, которые получают у него название однородных. Здесь существенно, что сам переход к исследованию способа порождения величин (форм) означает, с его точки зрения, выход за пределы «общего учения о формах». Это объясняется тем, что операции теперь становятся *реальными* операциями. Такого рода переход, считает Грассман, фактически имеет место лишь тогда, когда возникает вопрос об ассоциативности и (или) коммутативности операции умножения. Некоммутативное же и неассоциативное умножение истолковываются Грассманом как *формальные* процедуры над объектами, природа которых не определена. Г. Грассман пишет, что «этому формальному понятию <умножения>, если задана природа подлежаших соединению величин, соответствует реальное понятие, выражающее способ порождения произведения из его сомножителей».

Способы перехода к «реальным» операциям могут быть различными. Один из них был применен в грассмановской арифметике, о чем мы еще будем говорить, другой был положен в основу учения о протяженностях. Этот последний способ излагается в последующих параграфах и разделах книги 1844 года (в нашем переводе содержатся только первые параграфы). Здесь Г. Грассман показывает, что в этом его учении могут быть введены «виды умножения, для которых не имеет места по крайней мере перестановочность сомножителей, но к которым тем не менее полностью приложимы все до сих пор установленные предложения (предложения «общей теории форм». – *Б.Б.*)». В самом деле, обращаясь к тексту «Учения о протяженностях», мы видим, что в теории, развиваемой в труде 1844 г., используются как операции, удовлетворяющие общей теории форм, так и операции, выражающие генетическую спецификацию порождаемых в ней величин.

Как мог убедиться читатель, Г. Грассман понимал математику как науку об *умственных построениях*. Эти построения, конечно, находятся в определенных отношениях к реальности, однако отношения эти осуществляются *вне* математики: связи математики с прикладными областями реализуются, согласно его взгляду, через посредство наук, которые опираются на «исходное созерцание» (Grund-Anschauung) пространства и времени (а благодаря этому – и движения). Этими науками являются геометрия и механика. Рассматривая (в разделе B «Введения») способы умственного построения – «становления благодаря мышлению», как выражается Г. Грассман, – автор «Учения о протяженностях» приходит к понятиям о непрерывной и дискретной формах. Дискретная форма предполагает двойной акт: полагания (установления) чего-то мышлением и связывания установленного. Для непрерывной формы полагание и соединение сливаются. Различение этих двух форм вместе с понятиями об одинаковом (равном) и различном приводит к понятию о четырех типах форм, причем каждому типу соответствует особая ветвь «чистого учения о формах». Напомним слова Г. Грассмана: «...сначала дискретная форма разделяется на число и комбинацию (соединение <Gebinde>). Число есть алгебраическая дискретная форма, т.е. объединение того, что полагаемо как одинаковое; комбинация есть комбинаторная дискретная форма, т.е. объединение того, что полагаемо как различное. Таким образом, наука о дискретном есть учение о числах и учение о комбинациях (учение о соединениях)».

Изучение подхода Г. Грассмана, особенно если учитывать не только труд 1844 г., но и переработанный его вариант 1862 года, дает право на следующую интерпретацию. Числа (целые положительные) представляют собой формы, порождаемые из единственного элемента e с помощью операции « + »; иначе говоря, это объекты вида $e + e + ... + e$, где одна и та же элементарная форма e входит в соединение n раз ($n = 1, 2, 3, ...$). Комбинациями являются такие формы $a_1 + a_2 + ... + a_k$, которые возникают из попарно *различных* величин, когда в общем случае $a_i \neq a_j$ ($i, j = 1, 2, ...$). Числам и комбинациям как дискретным формам противостоят формы непрерывные. Последние разделяются на интенсивные величины и величины экстенсивные, или протяженности, причем протяженности возникают «посредством созидания различного». Это не очень понятное высказывание Г. Грассмана проясняется, если учесть, что, согласно его взгляду, «...с каждым протяженным образованием связано некоторое ему противоположное, но только взятое в обратном порядке его возникновения ⟨...⟩, если с помощью некоторого изменения из элемента a получается элемент b, то противоположное изменение состоит в том, что из b получается a». Данная мысль становится совсем ясной, когда Г. Грассман обращается к геометрической аналогии: «так же как в геометрии путем перемещения некоторой точки сначала возникает линия, пространственные же образования более высоких ступеней могут возникать лишь потом, после того, как полученное образование снова приводят в движение, так и в нашей науке (учении о протяженностях. – *Б.Б.*) путем непрерывных изменений порождающего элемента возникает протяженное образование первой ступени».

В грассмановском учении о протяженностях предметом рассмотрения являются величины вида $\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + ... + \alpha_n e_n$, где $e_1, e_2, ..., e_n$ суть независимые «единицы», полученные благодаря движению точки как порождающего элемента, т.е. на современном языке, направленные отрезки, а $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ – вещественные коэффициенты. Выписанную выше сумму можно трактовать как грассмановское комплексное число, где $e_1, e_2, ..., e_n$ – компоненты комплексного числа. Сумма и разность двух таких чисел определяются путем сложения и вычитания соответствующих компонент (т.е. по сути дела выражает, с современных позиций, сумму и разность векторов).

Заметим, что сложение и вычитание таких комплексных чисел суть операции, которые подчиняются тем же формальным законам, что и одноименные операции для чисел вещественных.

Что же касается произведения высших комплексных чисел, то определить его так, чтобы оно подчинялось формальным законам арифметики вещественных чисел, как известно, нельзя. Для преодоления этой трудности Грассман разработал «экстенсивную алгебру», в которой произведение двух комплексных чисел оказывается комплексным числом более высокого порядка[9].

Идею умножения как операции, результаты которой лежат вне области ее определения, Г. Грассман заимствовал у отца[10], Ю.Г. Грассмана. Последний высказал ее в связи с вопросом об умножении в геометрии: он писал, цитирует Г. Грассман отца, что «треугольник является на самом деле геометрическим произведением, а его построение представляет собой геометрическое умножение», что «умножение есть лишь только построение высшего порядка» и что «как линия получается из точки, так треугольник получается из линии»[11].

Таким образом, позиция Г. Грассмана состоит в том, что формы, которые поначалу не имеют реального содержания, могут приобретать таковое, по-различному осмысляться: быть точками, векторами, ориентированными площадками и т.д. На этом пути им вводится 16 различных видов умножения. Однако возникающие таким образом формы и операции над ними трактуются в терминах законов, введенных Грассманом во вступительном «Очерке» к труду 1844 года.

Описанный подход реализуется в первой части книги 1844 года. Здесь рассматриваются системы различных порядков. Взяв элемент из одной системы и подвергнув его изменению, мы получаем элемент из новой системы. Так, движение линии в некотором (прямолинейном) направлении порождает плоскость – систему второго порядка. Этот переход, согласно Г. Грассману, можно мыслить неограниченно продолжаемым – до получения системы любого порядка или, в современных терминах, до возникновения пространства любой размерности. Говоря более конкретно, Грассман начинает с того, что вводит направленные отрезки

---

[9] Примерно в те же годы, что и Г. Грассман, алгебру высших комплексных чисел построил У.Р. Гамильтон, но он шел иным путем – путем «интенсивной алгебры», в которой произведение двух комплексных чисел (у Гамильтона – кватернионов) есть комплексное число, составленное из тех же независимых единиц, что и сомножители.

[10] Об этом Грассман говорит в сноске к одной из своих ранних работ, называя книги Ю.Г. Грассмана «Учение о пространстве» и «Тригонометрия».

[11] Г. Грассман цитирует первую из работ отца, упомянутых в примечании 10; она относится к 1828 г.

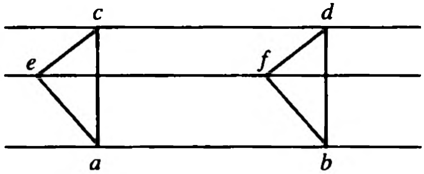


Рис. 2.

(векторы) и доказывает, что для них выполняются все установленные в «теории форм» законы сложения и вычитания (соответствующим образом объясняя смысл этих операций). Затем он доказывает теоремы о наличии у получаемых им систем дальнейших алгебраических свойств. Это делается в первой главе.

Вторая глава сочинения 1844 года «Ausdehnungslehre» озаглавлена «Внешнее произведение отрезков». Здесь, в § 28, Грассман приводит «простой и всеобщий» закон: «Если на плоскости отрезок движется последовательно вдоль каждого из двух данных направленных отрезков, то общая площадь поверхности, которая получается таким образом (при условии, что знаки отдельных элементов поверхностей берутся установленным способом), равна той площади, которая могла бы быть получена, если бы отрезок двигался вдоль суммы этих отрезков»[12]. Поясняя это утверждение, Грассман рассматривает три компланарные (лежащие в одной плоскости) параллельные линии[13]: *ab*, *ef*, *cd*, пересеченные тремя парами параллельных линий *ae* и *bf*, *ec* и *fd*, *ac* и *bd*. Если отрезок *ab* продвинулся вдоль отрезка *ac* и достиг отрезка *cd*, то тем самым он заполнил площадь прямоугольника *acdb*. Но из рис. 2 видно, что площадь этого прямоугольника равна сумме площадей параллелограмма *baefb* и *ecdf*. Значит, можно считать, что движение отрезка *ab* вдоль отрезка *ac* (до *ef*) порождает ту же самую площадку, что и движение отрезка *ab* сначала вдоль *ae*, а затем – *ec* (до *cd*).

Очевидно, что операцию $\frown$, которая в данном примере была применена к отрезкам, можно считать умножением, подчиняющимся дистрибутивному закону относительно сложения (на основе общего учения о формах): $a \frown (b + c) = (a \frown b) + (a \frown c)$, а значит, в силу коммутативности умножения, $(b + c) \frown a = (b \frown a) + (c \frown a)$. В применении к грассмановскому примеру эта

[12] Ausdehnungslehre von 1844. S. 77–78.

[13] Здесь, разумеется, запись вида *ab* не означает произведения величин *a* и *b*; она обозначает прямую, задаваемую точками *a* и *b*, а также отрезок прямой с концами в этих точках.

дистрибутивность дает (если воспользоваться привычной ныне векторной записью):

$$\vec{ab} \cdot \vec{ac} = \vec{ab}(\vec{ac} + \vec{ec}) = \vec{ab} \cdot \vec{ae} + \vec{ab} \cdot \vec{ec}.$$

Каков смысл операции, порождающей внешнее произведение? В современных терминах это произведение базисных элементов e_1, e_2, ..., e_n, которые подчиняются следующим законам. Пусть i, j, k представляют собой различные значения n; тогда $e_ie_j = -e_je_i$, $e_ie_i = e_je_j = 0$; $e_i(e_j + e_k) = e_ie_j + e_ie_k$. Отметим, что последнее из трех равенств выписывать было не обязательно, так как свойство дистрибутивности включается Грассманом в само понятие умножения. Произведение N такого рода элементов представляет собой объект N-го порядка. В этом заключается отличие внешнего произведения Грассмана от «современного» векторного произведения: результат умножения двух векторов есть снова вектор (т.е., по Грассману, объект первого же порядка), в то время как внешнее произведение двух векторов – объект второго порядка.

Грассман определяет произведение любого числа направленных отрезков: произведение $a \cap b \cap c \cap$ ... означает, что вектор a сначала движется вдоль b, затем результат этого движения – ориентированная площадка – движется вдоль c, и так далее; так получаются порядки выше, чем третий. Грассман показывает, что такого рода соединения обладают свойством дистрибутивности, и для каждого вновь построенного объекта обосновывает соответствие его свойств требованиям своей «общей теории форм».

Мы привели эти грассмановские конструкции, чтобы показать, как «работает» у него генетический способ математического мышления. Этот способ тесно связан для него с диалектикой тождества и различия, дискретного и непрерывного. Он не был понят ни современными ему математиками, ни философами. И несмотря на это Г. Грассман до конца дней оставался при убеждении в его достоинствах, сознавая при этом, что принятый им подход «больше говорит философски образованному читателю, чем более удобный для математиков способ изложения в "Учении о протяженностях" 1862 года».

Естественно, что в последующем развитии математики эти результаты Г. Грассмана были переосмыслены с иных позиций, далеких от философии математики автора «учения о протяженностях». Но философский пафос Г. Грассмана как поборника, по сути дела, *диалектической идеи движения* как четко описываемого перехода к системам все более высокого порядка, заслуживает внимания если не с математической, то с философской точки зрения. Вообще, интерес Г. Грассмана к философии, которым он был обязан Шлейермахеру, довольно ясно отражается в труде 1844 года.

Шлейермахер выделял в диалектике две части. Первая, «трансцендентальная», часть рассматривает понятия мышления и знания – ее интересует отношение познания к бытию. Вторая, «техническая», часть занимается построением форм, с помощью которых формируется знание; ее объект – умственное *конструирование*. Поэтому она содержит учение о понятиях и суждениях, а также теорию их комбинаций; при этом последняя должна, по мысли Шлейермахера, занять место традиционного учения об умозаключениях. Задачей диалектики он считал преодоление противоположности между идеальным и реальным, основой чего должно служить непосредственное осознание познаваемого[14].

Нетрудно усмотреть параллели между этими взглядами и подходом к математике («учению о протяженностях») и логике, развитым Германом, а потом и Робертом Грассманами. Этот подход был пронизан идеей выявления отношения между познанием и бытием – идеей, которая редко интересует математиков. Тезисы Г. Грассмана о родстве философии и математики как наук о бытии, соответственно, всеобщего и особенного; о противоположности формального (идеального) и реального и, соответственно, о развитии формальных и реальных наук; об умственном конструировании «форм», приводящем к иерархии систем разного порядка; о необходимости реформирования логики – все это несет на себе печать влияния Шлейермахера.

Умственное конструирование, однако, бывает разным. То, которое представлено в грассмановском учении о протяженностях, не получило признания как метод математического мышления. Но этого нельзя сказать о другом способе построения «мыслительных форм», разработанном тем же Г. Грассманом.

К нему мы и перейдем.

---

[14] Ср. *T[eichert] D. Shliermacher.* Friedrich Daniel Ernst // Enzyklopädie Philosophie und Wissenschaftstheorie. Hrsg. von J. Mittelstraß. Bd. 3. Stuttgart–Weimar, 1995. S. 705–706.

ПЕРВЫЙ В ИСТОРИИ НАУКИ ОПЫТ ИНДУКТИВНО-РЕКУРСИВНОГО ПОСТРОЕНИЯ ДЕДУКТИВНОЙ ТЕОРИИ

Теория, которая имеется в виду, – это арифметика целых чисел. Ее построение Г. Грассманом в труде 1861/1862 г. мы называем индуктивным, так как ее объекты – числа вводятся *индуктивными* определениями, и рекурсивным, так как операции над ними задаются *рекурсивными* определениями; что касается доказательств, то они основываются на принципе «совершенной» (полной математической) *индукции*[15]. Как справедливо выразился Р. Грассман в 1890 г., «Арифметика» Германа Грассмана «вполне раскрывает – особенно в первых разделах – характер метода, применявшегося тогда обоими братьями, и их борьбу за наивысшую строгость формы». Метод этот состоял, говоря современным языком, в индуктивном построении системы величин, называемой в книге «основной последовательностью», – системы, на которой задавались некоторые операции. Члены этой последовательности (которую мы будем сокращенно именовать «о.п.») порождаются из единственного элемента – он обозначается буквой e, – называемого «положительной единичностью», путем операции прибавления к уже построенным величинам либо этой единичности, либо «отрицательной единичности»[16], $-e$, так что о.п. приобретает вид потенциально бесконечной «в обе стороны» системы:

$$\ldots, e + -e + -e + -e, e + -e + -e, e + -e, e, e + e, e + e + e, \ldots$$

Величина $e + -e$ получает название *нуля* и обозначается обычным знаком 0. Элемент e и члены ряда, за ним следующие, составляют положительную часть основной последовательности; они представляют собой суммы положительных единичностей. Члены о.п., предшествующие этому элементу, образуют ее неположительную часть; каждый из них есть сумма, состоящая из e и одной

[15] Мы не останавливаемся на различии «индуктивных» и «рекурсивных» («по индукции») определений, которое проводится в математико-логической литературе. Смысл соответствующего различения, в той мере, в какой это существенно для понимания построения, реализованного в трудах Г. и Р. Грассманов, станет понятным из дальнейшего изложения.

[16] Хотя Г. Грассман и считает, что члены «основной последовательности» с самого начала строятся только из одной «единичности» – положительной, на деле до введения операции вычитания и доказательства соответствующих теорем у него их оказывается две – положительная и отрицательная.

или более отрицательных единичностей. Эта часть включает нуль и члены о.п., ему предшествующие (они образуют отрицательную часть основной последовательности). На современном языке это означает следующее индуктивное определение: 1) *e* есть величина, принадлежащая положительной части основной последовательности; 2) если *a* есть величина положительной части о.п., то а + *e* тоже величина этой части о.п.; 3) если а есть *e* или величина, принадлежащая неположительной части основной последовательности, то *a*+ –*e* есть величина той же части этой последовательности.

Добавление, что о.п. есть система, состоящая из положительной части основной последовательности и неположительной ее части, завершает определение[17]. В свете этой «модернизации» Грассманова задания «основной последовательности» приобретает четкий смысл то определение арифметики, которое дается в № 6 анализируемой нами книги: «арифметика рассматривает такие величины, которые получаются путем связывания из однойединственной величины *e*».

Обе операции прибавления единичностей – положительной и отрицательной – являются *унарными* и поэтому отличаются от вводимой Г. Грассманом позже *бинарной* операции сложения величин; это не находит отражения в обозначениях, но четко выражается в тексте книги, так как в одном случае говорится о *прибавлении единичности* или о соединении с единичностью, а в другом – о *сложении* величин. Подчеркнем, что (в отличие от приведенной выше «модернизации» грассмановского построения основной последовательности) прибавление положительной единичности представляет собой у Г. Грассмана взаимно-однозначную операцию взятия непосредственно следующего члена о.п., определенную на всей о.п. (в принятых ныне обозначениях: если *a* есть произвольная величина основной последовательности, то *a*′ есть величина, непосредственно за ней следующая), а прибавление отрицательной единичности – аналогичную операцию взятия непосредственно предшествующего члена этой последовательности, также определенную на о.п. (мы будем обозначать эту операцию двумя штрихами при формуле, выражающей величину).

[17] Иногда в индуктивных определениях добавляется «косвенный пункт», согласно которому – в применении к «основной последовательности» – «ничто иное, как возникающее по пп. 1)–3), не является его величиной». Однако его можно не формулировать, ограничившись ссылкой на то, что мы имеем дело с *определением*.

Система величин основной последовательности замкнута относительно операции *сложения*. Последняя определяется рекурсивно следующим образом. Прежде всего доказывается теорема (она составляет содержание пункта 13 книги), согласно которой $a = a + e + - e$. Доказательство основывается на определении основной последовательности и операциях прибавления единичностей и состоит в следующем. Переход от произвольной величины a основной последовательности к величине, за ней непосредственно следующей, дает $a + e$; обозначим эту величину через b; это значит, что $b = a + e$; но тогда a есть величина, непосредственно предшествующая величине b, и для перехода от a к b, надо к a прибавить отрицательную единичность: $a = b + - e$; подставляя в это равенство значение b, получаем: $a = a + e + - e$. Аналогично доказывается, что $a = a + - e + e$ (теорема № 14). Далее определяется (№ 15) результат операции сложения – *сумма* $a + b$, где a и b – произвольные величины о.п.; а именно под $a + b$ понимается такой член о.п., для которого справедливо равенство $a + (b + e) = a + b + e$ (формула $a + b + e$ читается по ассоциативности влево[18]), и в особом пункте (№ 16 – «Добавление») поясняется, что $a + (b + e)$ есть величина, непосредственно следующая за $a + b$. Далее, на основе №№ 13–15 доказывается теорема 17: $a + (b + - e) = a + b + -e$.

Нетрудно видеть, что система предложений №№ 3–17 образует *рекурсивное определение операции сложения*. Проследим, как оно «работает». Рекурсия ведется по величине b (в сумме $a + b$, фигурирующей в № 15), при a – произвольном члене основной последовательности – в роли параметра, и ход ее зависит от того, в какой части этой последовательности – положительной или неположительной – лежат ее значения (в первом случае используется определение № 5, во втором – теорема № 17). Вычисление значения суммы величин a и b сводится в конце концов к применению теорем №№ 13 и 14, позволяющих надлежащим образом перерабатывать величину a, могущую принадлежать как положительной, так и неположительной части основной последовательности (конечно, процедура вычисления опирается и на свойства отношения равенства – это отношение в книге 1861–1862 гг. определяется так же, как и в книге 1844 года, – в частности, на правило замены равным).

---

[18] То же касается появляющихся в дальнейшем изложении формул вида $a + b + c$, где c – произвольная величина основной последовательности.

Приведем *пример*. Пусть складываются величины $e + e$ и $e + -e + -e + -e + -e$, т.е. определяется значение суммы

$$e + e + (e + -e + -e + -e + -e). \qquad (*)$$

Четырехкратное применение теоремы № 17 с использованием в нужных случаях правила замены равным приводит к равенству:

$$e + e + (e + -e + -e + -e + -e) = e + e + e + -e + -e + -e^{+} - e;$$

двукратное же применение теоремы 13 (с использованием свойств отношения равенства, что мы в дальнейшем оговаривать не будем) приводит к доказательству равенства формулы (*) формуле $e + -e + -e$, являющейся одной из величин основной последовательности.

В данном примере рекурсия (относительно b) осуществлялась по положительной части о.п. Но если переставить слагаемые, т.е. вычислять значение суммы

$$e + -e + -e + -e + -e + (e + e), \qquad (**)$$

то мы должны проводить рекурсию уже по его неположительной части. Применив один раз определение № 15 и два раза теорему № 14, мы получим тот же результат, что и в случае (*).

Определение операций (функций) с помощью рекурсивных процедур можно рассматривать как разновидность *неявных определений*. Рекурсия – в ее простейшей форме, которой пользовались Грассманы, – задает операцию сложения в форме процесса порождения ее результатов для множества, в котором есть начальный элемент (e) и на котором задается (строгий) порядок путем «взятия непосредственно последующего» (соответственно, «взятия непосредственно предшествующего») при произвольной величине a в роли параметра. В ходе вычисления значения суммы $a + b$ для любой величины b положительной (неположительной) части о.п. – *выделенной* величины рекурсии – вычисляются значения сумм величины a со всеми величинами, предшествующими b (следующими за b), вплоть до e (или 0); при этом в случае неположительной части о.п. порядок на ней берется «справа налево». Таким образом, мы имеем здесь дело, по существу, с «возвратно организованным» *порождением* сумм вида $a + b$, точнее, с двумя разными порождающими процессами, отдельно для значений b в положительной и в неположительной частях основной последовательности.

Следует подчеркнуть, что под *вычислением* значения величины или формулы, как явствует из текста Г. Грассмана, понимается нахождение графически равного ей члена основной последовательности. Ибо, как особо оговаривает Г. Грассман (№ 71), в о.п. каждый ее член *отличен от всех остальных*, что вместе с установленным им способом порождения величин как слов в алфавите знаков e, $+$, $-$, сводит отношение равенства (а также неравенства) между членами «основной» (а впоследствии и «числовой») последовательности к отношению *графического равенства* (неравенства) между словами упомянутого алфавита (разумеется, в естественном предположении того, что ныне называется абстракцией отождествления «одинаковых» слов в смысле А.А. Маркова[19]).

Взглянем теперь на грассмановское определение с современных позиций. Оставим пока в стороне вопрос о том, что́ определяется в № 15 – сумма $a + b$ или операция сложения «$+$» (на неточность способа выражения Г. Грассмана в этом вопросе обратил внимание Г. Фреге, о чем мы еще будем говорить), и укажем на то, что если явно различать операции взятия непосредственно последующего и взятия непосредственно предшествующего члена, с одной стороны, и операцию сложения – с другой, то №№ 13–17, с учетом доказанной Г. Грассманом теоремы $a + 0 = a$ (№ 18), приведут, если пользоваться современной записью, к равенствам:

$$(1)\ a + 1 = a', \quad (2)\ a + b' = (a + b)', \tag{1}$$

$$(1°)\ a + 0 = a, \quad (2°)\ a + b'' = (a + b)'', \tag{1°}$$

задающим операцию сложения[20]. Здесь (1) выражает тривиальное равенство $a + e = a + e$, (2) есть иная запись определения суммы (№ 15), (1°) – запись свойства нуля (№ 18), а (2°) – теоремы № 17. Заметим, что, при таком представлении грассмановской

[19] *Марков А.А.* Теория алгорифмов // Труды Математич. ин-та АН СССР. Т. 42. М.; Л., 1954.

[20] Именно такого рода определение, т.е. определение (1), но только для сложения целых положительных чисел, фигурирует, по существу, в книге Р. Дедекинда 1888 года (см. рус. перев. под названием «Что такое числа и для чего они служат?». Казань, 1905). Но, в отличие от Г. Грассмана, Дедекинд в самой символике различает операцию взятия непосредственно последующего (используя для ее обозначения штрих) – «упорядочивающее отображение», в его терминологии, – и операцию сложения. Впрочем, и в современной математике; логической литературе – даже посвященной специально рекурсивным построениям определенных разделов математики – не всегда вводят специальный знак для «взятия непосредственно последующего», обозначая число, непосредственно следующее за числом a, через $a + 1$. Ср. книгу Р.Л. Гудстейна «Рекурсивная теория чисел» (рус. перев. М.: Наука, 1970).

рекурсивной процедуры, в рассмотренном выше примере сложения величин $e + e$ и $e + - e + - e + - e + - e$ надлежит учитывать вытекающее из определения нуля и № 18 равенство $a + e + - e = a + (e + - e)$. Поскольку (1°) и (2°) доказуемы на основе №№ 13–15, рекурсивное определение сложения можно ограничить равенством (1). Однако это определение можно произвести и только с помощью равенств (1°), поскольку нетрудно показать, что в предположении № 17, рассматриваемого в качестве «определения суммы», используя №№ 13 и 14, равенство № 15 доказуемо в качестве теоремы.

После обоснования основных свойств сложения (включая ассоциативность и коммутативность) Г. Грассман вводит обратную сложению операцию вычитания членов о.п. Последняя задается уже путем контекстуального определения (№ 28): под разностью $a - b$, где a и b – произвольные величины основной последовательности, понимается такая величина этой последовательности, что $a - b + b = a$ (при этом запись $a - b + b$ читается по ассоциативности влево). Определение это непосредственно не рекурсивно, однако позволяет доказать[21] ряд теорем, таких как теорема 39: $a + (-b) = a - b$, теорема 41: $-a + - b = - a - b = - (a + b)$ и другие, которые делают возможным рекурсивную процедуру вычисления разности. Остается добавить, что в силу теоремы (№ 26), согласно которой для любых двух величин a и b из о.п. всегда имеется некоторая величина x такая, что $b = a + x$, вычитание оказывается всегда выполнимой операцией, а благодаря теореме (№ 27), согласно которой равенство $a + b = a + c$ влечет равенство $b = c$, результат этой операции – однозначным.

Только после этого вводится множество *всех целых чисел* – основной объект грассмановской арифметики. Оно начинается с определения операции *умножения* (для которой в дальнейшем задается обратная ей операция *деления*), осуществляемого путем замены «единичности», e, на «единицу» (die Eins), 1. А именно «основная последовательность» становится «числовой последовательностью» (множеством всех целых чисел) благодаря определению (фигурирующему под № 52): $a \cdot 1 = a$ и установлению (определение № 53) того, что числовая последовательность есть такая основная последовательность, единичность которой есть единица. Определение 52 и последующие определения

---

[21] При этом в надлежащих случаях используются, говоря современным языком, явные – номинальные – определения, объявляющие выражения вида $-a$ и a сокращениями, собственно, для формул $0 - a$ и $+a$.

№№ 56–58 задают (с учетом введенного в № 55 понятия противоположности положительных и отрицательных чисел) процедуру вычисления произведения двух произвольных целых чисел. При этом, в отличие от определения сложения, которое производится для «суммы», Г. Грассман говорит об определении именно (операции) *умножения*. Последнее имеет следующий вид: 1) *рекурсивно* определяется умножение произвольного целого числа на *положительное* число; 2) *явно* определяется умножение на нуль (№ 57: $a \cdot 0 = 0$), 3) *явно* определяется (№ 58) умножение на отрицательное число как приводящее к результату, представляющему собой число, противоположное числу, получающемуся при умножении на соответствующее положительное число: $a(-\beta) = -(\alpha\beta)$, где β есть положительное число, а $-\beta$ есть противоположное ему отрицательное. Рекурсия 1) имеет в качестве базиса № 52, а рекурсивный процесс задается (№ 56) равенством $\alpha\beta' = \alpha\beta + a$ (вместо β' Г. Грассман, как мы знаем, пишет $\beta + 1$).

Не останавливаясь на способах введения остальных арифметических операций (возведение в степень также задается рекурсивным определением), отметим лишь, какого рода словами (в алфавите 1, +, –) оказываются целые числа.

«55. Числовой ряд есть

...|–3|–2|–1|0|1|2|3|...,

и каждое его отрицательное число противоположно некоторому положительному», вертикальная черта служит для отделения одного числа от другого. Здесь 2 есть сокращение для 1 + 1, 3 – сокращение для 2 + 1, т.е. для 1 + 1 + 1, и т.д.; что касается отрицательных чисел: ..., –3, –2, то теорема 41 позволяет представить их в виде: ..., –(1 + 1 + 1), –(1 + 1). В дальнейшем изложении обнаруживается та цель, ради которой, как можно полагать, понятие «основной последовательности» и было введено в качестве *предшествующего* понятию последовательности числовой: в отличие от последнего первое понятие охватывает также изоморфные числовой последовательности системы именованных чисел.

В «Учебнике арифметики» известные свойства сложения (в частности, ассоциативность и коммутативность) и вычитания[22] доказываются для величин *основной* последовательности; но доказательство дистрибутивности умножения относительно операций «+» и «–» ведется уже в применении к последовательности *чи-*

[22] Для этих свойств, так же как и для появляющегося в связи с умножением свойства дистрибутивности, не вводится никаких названий.

словой. С алгебраической точки зрения грассмановская о.п., на которой определено сложение и вычитание, представляет собой (аддитивную) коммутативную группу без кручения (т.е. группу, в которой отсутствуют элементы конечного порядка, кроме нуля[23]), переход же к числовой последовательности означает обобщение этой группы до кольца (целых чисел).

Не рассматривая дальнейшего содержания книги 1861/1862 г.[24], обратимся к применяемым в ней доказательствам[25].

МЕТОДЫ ДОКАЗЫВАНИЯ

Изложение в «учебнике» 1861/1862 г. – во всяком случае, в его первых и самых важных параграфах – строится в своей основе *формально*, удовлетворяя, в общем и целом, канону современной строгости, правда, без выявления собственно логической компоненты рассуждений. Хао Ван[26] показал, что грассмановскую арифметику целых чисел можно представить в виде аксиоматически развертывающегося исчисления. Однако особенность подхода братьев Грассманов состояла в том, что, согласно их взглядам, выраженным еще в книге 1844 года старшего брата, в математике не может быть аксиом (принципов, основоположений) – таковые появляются лишь в «реальных» науках, – а все ее содержание вытекает из принятых *определений*, выражающих *мысленное полагание объектов* и процедур *переработки* объектов по определенным правилам. Поэтому «логический костяк» «Арифметики» составляют определения (Erklärungen), «обозначения» (введение новых знаков) и теоремы вместе с их доказательствами; в начальных параграфах фигурируют еще «добавления», «примечания» (последние служат, в частности, для введения названий типов

---

[23] См.: *Курош А.* Теория групп. Изд. 3-е. М.: Наука, 1967. С. 23–27.

[24] В последующем в ней отдельно рассматриваются свойства натуральных (целых положительных) чисел, затем следует переход к действительным числам и операциям над ними, бесконечным рядам и пр.; в «Приложении» освещаются элементы комбинаторики, теории комплексных чисел и некоторые другие вопросы.

[25] Хотелось бы сказать – «к логическим средствам, в ней используемым», однако употребление прилагательного «логические» в данном контексте не соответствует духу подхода Грассманов, согласно которым математика не зависит от логики, о чем мы еще будем говорить.

[26] *Hao Wang*. The Axiomatization of Arithmetic // The Journal ot Symbolic Logic. Vol. 22. 1957. No 2. P. 145–158 (эта статья вошла в качестве гл. IV в кн.: *Wang Hao*. A Survey of Mathematical Logic. Peking: Science Press, 1962. P. 68–81).

используемых в книге доказательств) и «примеры» – рубрики, играющие вспомогательную роль; в дальнейшем появляются также «задачи», «вопросы», «решения» и «отыскания»; «отыскание» (Determination) – это пункт, в котором разъясняется процедура поиска некоторого числа (чисел), вытекающая из только что приведенного в книге доказательства или решения (общей) задачи.

Под рубрикой «Определение» помещается либо словесная формулировка, подобная приведенному нами определению арифметики, либо (также словесное) определение «через род и видовое отличие», преимущественно в номинальной форме, либо контекстуальное определение в форме равенства (уравнения) – здесь примером может служить определение разности (№ 28), либо порождающее индуктивное определение типа определения о.п., либо, наконец, рекурсивные процедуры типа определения «суммы» (сложения) – ср. № 15. Обычно под такой рубрикой помещается ряд «определенческих» утверждений (например, контекстуальное определение «разности», т.е. вычитания, имеющее форму равенства и разъясняемое словесно, сопровождается номинальными определениями новых терминов). Рекурсивные определения выступают в форме сочетания нескольких «определений» и теорем. Под рубрикой «Обозначение» помещается явное номинальное определение, вводящее новый знак (или знаки) как сокращение для уже имеющихся знаковых конструкций. *Доказательства*, с помощью которых строится арифметика целых чисел, касаются свойств величин основной (в частности, числовой) последовательности и операций над величинами – свойств, представимых равенствами (уравнениями) либо отношениями между уравнениями, а также свойств о.п. в целом. В первых, наиболее важных, параграфах они почти исключительно представлены двумя видами: (*i*) доказательствами посредством *тождественных преобразований* уравнений (равенств), основанных на свойствах отношения равенства и правиле замены равным, и (*ii*) *индуктивными доказательствами* (полная математическая индукция). В последних при этом обычно используется метод (*i*). Если доказываемая теорема формулируется в виде равенства (равенств), то вслед за этим обычно следует ее словесная формулировка.

Доказательства типа (*i*) сопровождаются тем, что в теории математических доказательств ныне называется «анализом доказательства»: на каждом шаге переработки формул справа в скобках указывается тот пункт (т.е. обычно определение либо теорема), на основании которого он производится. Доказательства, в которых исходя из *левой* части доказываемого равенства приходят к *правой*, получают названия «последовательных»; в случае обратного хода рассуждения доказательство называется «возвратным» (rückschreitend). Напомним читателю в качестве примера следующие выкладки Г. Грассмана.

«17. $a + (b + - e) = a + b + - e$ (здесь следует словесная формулировка теоремы, которую мы опускаем. – *Б.Б.*).

Доказательство (последовательное).

$$a + (b + - e) = a + (b + - e) - e \qquad \text{(согласно 13)}$$
$$= a + (b + - e - e) + - e \qquad \text{(согласно 15)}$$
$$= a + b + - e \qquad \text{(согласно 14)»;}$$

далее это – самое первое в книге – последовательное доказательство «проговаривается» в словесной форме; в дальнейшем такие объяснения уже отсутствуют.

Как известно, данный способ записи доказательств «с анализом» широко используется в наши дни. Правда, в одном отношении «анализ доказательств» у Грассманов не полон: в нем не отражены применения свойств отношения равенства, в частности, правила замены; в приведенном доказательстве на шаге 3 как раз и использовалась замена равным; Грассманы считали обращение к свойствам отношения одинаковости очевидным, так как они вытекают из *определения* равенства.

Кроме «последовательного» и «возвратного» доказательств к (*i*) можно отнести то, что в книге названо «доказательством с помощью равенств»; состоит такое доказательство в сведении доказываемого равенства к равенству, которое было доказано ранее либо введено путем определения; например, при доказательстве теоремы 29: $a + b - b = a$ рассуждение заключается в том, что данное равенство сводится – с помощью правила замены равным – к определению (№ 28) операции вычитания.

Доказательства типа (*ii*) – *индуктивные доказательства*, как они и называются в книге, – имеют у Грассманов совершенно четкую структуру: указывается величина, относительно которой производится индукция; формулируется и обосновывается индуктивный переход, причем явно приводится индуктивное допущение; и, наконец, доказывается базис индукции. При этом, однако, не приводится не только какой-либо «аксиомы полной математической индукции», но даже общего правила, определяющего структуру индуктивного доказательства (соответствующее правило будет сформулировано Р. Грассманом лишь в работе 1872 года). Так, доказательство закона ассоциативности сложения имеет вид:

22. $a + (b + c) = a + b + c$ (далее следует соответствующая словесная формулировка. – *Б.Б.*).

Доказательство (индуктивное относительно c). Допустим, что формула 22 справедлива для какого-то значения c; тогда

$$
\begin{aligned}
a + [b + (c + e)] &= a + [b + c + e] && \text{(согласно 15)}\\
&= a + (b + c) + e && \text{(согласно 15)}\\
&= a + b + c + e && \text{(согласно допущению)}\\
&= a + b + (c + e) && \text{(согласно 15b).}
\end{aligned}
$$
[27]

Стало быть, если формула 22 справедлива для какого-либо значения, то она справедлива и для непосредственно следующего значения, а значит для всех последующих значений.

Равным образом при том же предположении:

$$
\begin{aligned}
a + [b + (c + - e)] &= a + [b + c + - e] && \text{(согласно 17)}\\
&= a + (b + c) + - e && \text{(согласно 17)}\\
&= a + b + c + - e && \text{(согласно допущению)}\\
&= a + b + (c + - e) && \text{(согласно 17}b\text{);}
\end{aligned}
$$

иначе говоря, если формула 22 справедлива для какого-либо значения c, то она справедлива и для непосредственно предшествующего значения, а следовательно, для всех предшествующих значений.

Но она справедлива для $c = e$ (согласно 15); следовательно, она справедлива вообще.

Как видим, данное индуктивное доказательство – как и все индуктивные доказательства Г. Грассмана, ведущиеся, как мы сказали бы теперь, по построению «основной последовательности», – содержит два индуктивных перехода: по возрастанию членов последовательности и по их убыванию.

Теоремы в Грассмановой «Арифметике» формулируются либо в виде (общезначимых) равенств, либо в форме условных предложений, членами которых являются равенства; в последнем случае они нередко имеют четкую форму: «гипотеза» – «тезис» (такова, например, упоминавшаяся выше теорема № 27, а также теорема № 95 – гипотеза[28]: $a\beta=0$, $a \neq 0$: тезис: $\beta \neq 0$). При доказательстве такого рода теорем в первых параграфах сочинения 1861/1862 г. средства логики высказываний и предикатов

[27] Буква b при номере определения или теоремы, имеющей вид равенства, означает, что используется переход от правой части определения либо равенства к левой.

[28] Напоминаем, что вместо принятого ныне знака ≠ Г. Грассман, начиная с сочинения 1844 г., использовал знак Z; эту запись впоследствии применял и Р. Грассман.

фактически не используются. Положение, однако, меняется, когда появляются теоремы о существовании либо несуществовании объектов о.п., обладающих определенными свойствами, а также теоремы о структурах, изоморфных исходной о.п. (ср. теорему № 51). Здесь уже даются «словесные» формулировки теорем, а в соответствующих доказательствах неявно используются правила и схемы «обычной» логики, в частности схема доказательства разбором случаев и правила обращения с выражениями «для всякого» и «существует». В качестве примера укажем на теорему, фигурирующую в № 26. Эта теорема выражает выполнимость операции вычитания (вводимой позже) для любых членов о.п. – a и b и в современной логической записи имеет вид: $\forall a \forall b \exists x\ b = a + x$, где a, b, x – величины упомянутой о.п. Доказательство ведется индукцией по величине b (при a в роли параметра), базисом является равенство $b = a$, где a – произвольный элемент из о.п. (в этом случае в качестве x указывается 0); подразумеваемое (но явно не формулируемое) обобщение по a завершает доказательство. Начиная с теоремы № 95, формулировка которой была приведена нами выше, появляются *доказательства от противного – косвенные* (indirekte) *доказательства*, как они именуются в книге. Так, в косвенном доказательстве теоремы № 114 используется допущение о существовании некоторого объекта и затем показывается, что он не может существовать. Доказательства такого типа, поскольку в них доказывается (арифметическое) равенство или бескванторная комбинация равенств, с современной точки зрения являются конструктивными.

В целом можно полагать, что для о.п. и теории целых чисел дедуктивные средства, используемые Грассманами, не выходят за рамки конструктивной логики.

ТРУДНОЕ ВОСПРИЯТИЕ НОВОГО

Мы не беремся судить о том, когда в математике появились рекурсивные (индуктивные) определения и доказательства по методу «полной математической индукции». По-видимому, они глубоко уходят в ее историю. Можно утверждать, что рекурсивные (рекуррентные, итеративные) процедуры древнее индуктивных доказательств – хотя бы уже потому, что счет предметов являет собой пример подобного рекурсивного процесса (в качестве более «научных» примеров можно было бы указать на арифметическую и геометрическую прогрессию или последовательность

Фибоначчи). Но и (полная «математическая») индукция имеет большую историю, и историки науки по мере изучения новых источников постоянно отодвигают ее появление все дальше от нашего времени[29]. С.А. Яновская[30] связывала уяснение всей общности и конструктивности этого метода – правда, добавим мы, в не очень четкой форме «энумерации» – с именем Р. Декарта. Бесспорно, однако, что только у Грассманов рекурсивные (индуктивные) определения и доказательства по методу математической индукции – доказательства, основанные *не на аксиоме*, в которой квантор общности пробегает по арифметическим предикатам (как в «аксиоматике Пеано»), а *на схеме, правиле доказательства*, применяемом к конкретным предикатам теории чисел, – выступают в качестве регулярного средства эффективного осуществления математических конструкций и получения теорем в арифметике (целых чисел). Как нам представляется, это был если и не «единственно возможный», то в самом деле «строго научный» подход к построению дедуктивной теории как системы индуктивно порождаемых объектов с рекурсивно определенными на ней операциями.

Что могли математики-современники увидеть в этой книге? Прежде всего усложненное изложение очень простых вопросов; Грассманово «Учение о числах» было для них неприемлемо и с педагогической точки зрения; это видно по оценкам Ф. Энгеля и Э. Шрёдера[31]. Глубокий замысел братьев Грассманов оставался для специалистов скрытым и после появления аксиоматик натуральных чисел Дедекинда и Пеано и утверждения в математике

---

[29] Ср., например, *Бурбаки Н.* Очерки истории математики / Перев. с франц. И.Г. Башмаковой. Под ред. К.А. Рыбникова. М.: ИЛ, 1963. С. 36–37; *Kamiński S.* O początkach indukcji matematyczny // Studia logica. Tom VII, 1958. P. 221–240.

[30] *Яновская С.А.* О роли математической строгости в истории творческого развития математики специально о «Геометрии» Декарта // Исследование логических систем. М.: Наука, 1970. С. 13–50 (сокращенный вариант этой статьи опубликован в журнале «Вопросы философии». 1966. № 3. С. 39–50).

[31] Негативные оценки *Ф. Энгеля* содержатся в его «Жизнеописании Германа Грассмана», с. 226 и далее, а Э. Шрёдера – в его книге «Lehrbuch der Arithmetik und Algebra für Lehrer und Studierende». Bd. 1: Die sieben aglebraischen Operationen. Leipzig: Druck und Verlag von B.G. Teubner, 1878. S. 51–52. Известно, что Г. Грассман преподавал арифметику по своему учебнику в старших классах своей гимназии. Ф. Энгель приводит мнение сына Г. Грассмана – Германа о том, что это преподавание было успешным (см. с. 226–227). Однако Ф. Клейн (на с. 197) категорически утверждает, что Г. Грассман был «плохим учителем», связывая это, правда, не с применявшимися Германом методами преподавания, а с тем, что он был слишком мягок в отношении учеников.

«строгих» теорий действительных чисел К. Вейерштрасса, Р. Дедекинда и Г. Кантора. Правда, наиболее проницательные современники, такие, как тот же Э. Шрёдер, один из авторов краткой научной биографии Г. Грассмана[32], видели научную ценность этого «учебника»; Шрёдер, например, усматривал ее в «строго синтетическом построении», подчеркивая в качестве «неоспоримой заслуги» обоих Грассманов то, что «ими были даны новый и сильный толчок к пробуждению интереса к математической строгости в деле обоснования[33] арифметических учений, а также в большинстве случаев и средства к его удовлетворению»; Ф. Энгель также высоко оценивал научную сторону рассматриваемого сочинения, высказывая убеждение, что «по крайней мере первые параграфы этой книги» (т.е. как раз те, которые представлены вниманию читателя) обладают «высокой научной ценностью».

> Они и в самом деле далеко превосходят все прежние попытки коренной переработки арифметики, и последующие авторы с признательностью отмечают его (Г. Грассмана. – *Б.Б.*) заслуги в данной области. Раньше всех это сделал, пожалуй, Г. Ганкель на с. 16 и далее своей «Теории комплексных числовых систем» (Лейпциг, 1867)[34], а потом Э. Шрёдер в своем «Учебнике арифметики и алгебры» на с. 51 его первого (и единственного) тома, Лейпциг, 1879[35].

Однако кроме этих общих оценок современные Грассманам математики и логики – да и следующее поколение специалистов, пожалуй, тоже – мало что могли по существу высказать о подходе Г. Грассмана. Даже Ф. Клейн в своих «Лекциях» не нашел по данному поводу ничего сказать, кроме того, что Грассман «занимается также и *основаниями арифметики*. Он был одним

---

[32] Hermann Grassmann. Sein Leben und seine mathematisch-physikalischen Arbeiten // Mathematische Annalen. Bd. XIV. Leipzig, 1879. Русск. перевод: Биографии знаменитых математиков XIX столетия. Собрал В.В. Бобыянин. Вып. 1: Герман Грассман. Его жизнь и учено-литературная деятельность. Биографический очерк, составленный Р. Штурмом, Е. Шрёдером и Л. Зонке / Перев. с немецкого. М., 1886.

[33] Мы позволили себе заменить этим термином слово «обосновка», фигурирующее в цитируемом русском переводе. Как явствует из указанного на с. 4 этого перевода, разбор «Арифметики» Грассманов в ней принадлежит Э. Шрёдеру.

[34] Русск. перев.: *Г. Ганкель*. Теория комплексной числовых систем, преимущественно обыкновенных мнимых чисел и кватернионов Гамильтона вместе с их геометрическим толкованием / Перев. с немецкого под редакцией и добавлениями Н.Н. Парфентьева. Казань: Типолитография Императорского ун-та, 1912. С. 25.

[35] *Энгель Ф.* С. 227–228.

из первых, кто стал исследовать основные свойства обычного счета»[36]. Отсутствие надлежащей исторической перспективы приводило к тому, что Г. Грассмана (младшего брата обычно и не упоминали) считали просто представителем «формального направления в математике»[37]. Интересно в связи с этим проследить, как вводились арифметические операции математиками XIX века (мы ограничимся только несколькими примерами, относящимися к математике в Германии). Раскроем вышедшую в 1822 г. книгу М. Ома, брата известного физика, в которой, согласно Г. Ганкелю, предпринята попытка «формального изложения арифметических операций»[38]. Хотя книга Ома[39] претендует на то, что в ней развернута «вполне последовательная» система арифметики, мы не найдем здесь рекурсивных определений арифметических операций: сложение натуральных чисел, например, определяется так: $a + b$ означает число, которое имеет столько единиц, сколько их имеют оба слагаемых a и b вместе[40]. А теперь обратимся к труду самого Г. Ганкеля, относящемуся к 1867 г., т.е. появившемуся после публикации грассмановской

---

[36] *Клейн Ф.* Лекции о развитии математики в XIX столетии. Т. 1 / Пер. с нем. Н.М. Нагорного, под ред. М.М. Постникова. М.: Наука, 1989. С. 201.

[37] Ср. характеристику Г. Грассмана как «родоначальника» строго формального направления в математике, как таковое понимается в настоящее время», в статье В. Кагана «Грассман, Герман», помещенной в «Энциклопедическом словаре» братьев А. и И. Гранат (Том 16; СПб.–Одесса; седьмое издание); эта характеристика в несколько измененной формулировке повторена в персоналии «Грассман, Герман» того же автора в первом издании «Большой советской энциклопедии» (том 18). Впрочем, даже и такой общей характеристики мы не найдем ни в книге Э.Т. Белла (*Bell E.T.* The Development of Mathematics. New York–London, 1940. P. 182–195), где ни слова не говорится об «учении о формах» и об «Арифметике» Г. Грассмана, ни в дополнительном томе XV известного американского «Словаря научных биографий», где в статье о Г. Грассмане (*Burau W., Scriba C.J.* Grassmann, Hermann Günther // Dictionary of Scientific Biography / Ed. Ch. C. Gillispie. Vol. XV. Suppliment I. N.Y., 1978) ничего не сказано о его концепции математики, а «Учебник арифметики упомянут вскользь – как первая часть Грассманова «Учебника математики», предшествующая второй части – «Учебнику тригонометрии».

[38] *Г. Ганкель.* Теория комплексных числовых систем... С. 24–25.

[39] *Ohm M.* Lehrbuch der Arithmetik, Algebra und Analysis. Nach eigenen Principien. Zunächst für seine Vorlesungen bearbeitet. Thl. 1. Berlin. Gedruckt und verlegt bei G. Reimer, 1822 (на контртитуле значится: Versuch eines vollkommen consequentes Systems der Mathematik. Thl. 1. Arithmetik, Algebra und Analysis; выходные данные те же).

[40] Поэтому с мнением Ф. Клейна, считавшего, будто М. Ома как исследователя оснований арифметики можно «поставить рядом» с Г. Грассманом (см. с. 201 труда Клейна), трудно согласиться.

«Арифметики». На страницах своего сочинения Ганкель дает высокую оценку вкладу Г. Грассмана – «гениального ученого», как он говорит, – в те разделы математики, которые являются предметом изучения в его, Ганкеля, книге; однако о Грассмановом рекурсивном подходе он говорит очень глухо и без какой-либо оценки:

> Применение общих принципов отвлеченного учения о формах к обыкновенному учению о величинах, происшедшему от повторения определенное число раз одного и того же какого-либо объекта, Грассман дает в своем соч. «Lehrbuch der Arithmetik für höhere Lehranstalten» (Berlin, 1861)[41].

Неудивительно, поэтому, что в задании арифметических операций Ганкель остается вполне на «дограссмановской» ступени: используемые им определения сложения, умножения и других операций арифметики натуральных чисел даются вполне «по Ому». «Если взять числовую единицу *a* раз, потом *b* раз, затем то, что мы при этих операциях получили, соединить в одно, то полученный результат ($a + b$) называется суммою наших отдельных операций»[42]. Если такой математик, как Ганкель, не понял принципиального значения рекурсивных определений[43], то что же можно было ожидать от математиков рангом ниже?! Ясно, что в таких сочинениях, как книга Р. Бальтцера[44] (вышла первым изданием в 1865 г.) нечего искать рекурсивного задания операций арифметики. И только Э. Шрёдер принял во внимание подход Грассманов. Правда, он, так сказать, сочетает старое с новым. В его «Учебнике арифметики и алгебры», вышедшем из печати в

---

[41] *Ганкель Г.* Теория комплемксных числовых систем... С. 26.

[42] Там же. С. 10.

[43] Ср. оценку, данную ганкелевому труду Э. Гуссерлем, автором известного сочинения «Философия арифметики. Психологические и логические исследования» (1891), в письме от 18 июля 1891г., направленном Г. Фреге. Гуссерль квалифицирует труд Ганкеля – в контексте задачи разработки *теории* арифметики (трактуемой, правда, с позиций, отличных от грассмановских и близких к фрегевским) – как «хотя и знаменитую, но в логическом отношении совершенно сумбурную книгу» (*Frege G.* Nachgelassene Schriften und Wissenschaftlicher Briefwechsel. Bd. II: Wissenschaftlicher Briefwechsel. Herausgegeben, bearbeitet, eingeleitet und mit Anmerkungen versehen von *G. Gabriel, H. Hermes, F. Kambartel, Chr. Thiel* und *A. Veraart.* Hamburg: Felix Meiner Verlag, 1976. S. 100). Разбор интересной критики подхода Ганкеля к основаниям арифметики был дан Фреге (*Frege G.* Die Grundlagen der Arithmetik. Eine logisch mathematische Untersuchung über den Begriff der Zahl. Breslau: Verlag von W. Koebner, 1884, S. 18 ff).

[44] *Baltzer R.* Elemente der Mathematik. Bd. 1. Siebente verbesserte und vermehrte Auflage. Leipzig: Verlag von S. Hirzel, 1885.

1873 г.[45], определения типа тех, которые давал М. Ом, относятся к способу изложения материала, названному Шрёдером «независимым» (independent), т.е. не предполагающим подробных доказательств и во многом опирающимся на интуицию; этому способу противопоставляется *рекурсивное* – рекуррентное (recurrent) – изложение, которому, говорит Шрёдер, мы обязаны Г. Грассману и которое с точки зрения строгости («основательности» – Gründlichkeit) не оставляет желать лучшего. И основные операции арифметики (натуральных чисел) – сложение, умножение и возведение в степень – так и излагаются: сначала в особом разделе производится описательное («независимое») введение операции сложения, затем следует раздел «Сложение в рекурсивном изложении», и т.д. Если учесть, что во вводной главе «Учебника» Шрёдера обильно используются теоретико-множественные представления, то трудно избежать впечатления определенной «математической эклектичности» его автора.

Итак, Э. Шрёдер понимал значимость грассмановского новаторства в арифметике, хотя, конечно, не мог предвидеть перспективности идей братьев Грассманов как источника нового общематематического и общелогического подхода, означавшего кардинальную новацию в философии математики и ее основаниях. Но Шрёдер был скорее исключением, чем правилом. Даже в книге О. Штольца[46], вышедшей двенадцать лет спустя после появления «Учебника» Шрёдера, – книге, автор которой во Введении излагает элементы общего учения о величинах по Г. Грассману (а на самом деле, скорее, по Роберту, хотя ссылки на него отсутствуют), – сложение и умножение (натуральных) чисел определяются так же, как это делали Ом и Ганкель. Здесь стоит отметить работу Германа Гельмгольца «Счет и измерение с теоретико-познавательной точки зрения», вышедшую в 1887 г.[47] Великий естество-

---

[45] *Schröder E.* Lehrbuch der Arithmetik und Algebra für Lehrer und Studierende. Bd. 1: Die sieben algebralschen Operationen. Leipzig: Druck und Verlag von B.G. Teubner, 1873 (второй том не был написан). В списке литературы к этому учебнику (список состоит из восьми названий) мы встречаем книгу Г. Грассмана 1861/1862 г. и упомянутые работы Г. Ганкеля, М. Ома и Р. Бальтцера.

[46] *Stolz O.* Vorlesungen über allgemeine Arithmetik. Nach den neueren Ansichten bearbeitet. Thl. 1. Allgemeines und Arithmetik der rellen Zahlen. Leipzig: Druck und Verlag von B.G. Teubner, 1885.

[47] *Helmholtz H.* Zählen und Messen, erkenntnis theoretisch betrachtet. Philosophische Aufsätze. Edkard Zeller zu seinem fünfzigjährigen Doctorjubiltum gewidmet. Leipzig, 1887. S. 17–52 (перепечатано в: *Helmholtz H.* Wissenschaftliche Abhandlüngen. Bd. III. Leipzig, 1895). Русск. перев.: *Гельмгольц Г.* Счет и измерение / Перев. А.В. Васильева. Казань, 1893.

испытатель широчайшего диапазона научных интересов занимался также вопросами философии математики; поначалу его привлекли «факты, лежащие в основании геометрии» (мемуар 1868 г.), к которым он подходил, по его собственным словам, с «эмпирических» позиций. От геометрической аксиоматики он перешел к аксиоматике арифметики, и в работе 1887 г., формулируя эту аксиоматику, обратил внимание на труды Г. и Р. Грассманов. Он писал: «Далее, чем прочие арифметики, работы которых мне известны, пошли в исследовании об аксиомах арифметики Герман и Роберт Грассман, рассматривавшие при том вопрос с философской точки зрения». Гельмгольц оценил важность как рекурсивных определений операций над числами (говоря, правда, лишь о соответствующем определении сложения, которое он назвал «аксиомой Грассмана»), так и «способа перехода от n к $n + 1$». Хотя предложенная Гельмгольцем аксиоматика теории натуральных чисел и далека от совершенства – грассмановское построение в его целом он охватить не смог – и хотя его аксиоматика теории чисел представляла собой странную смесь предложений, относящихся и к отношению равенства, и к операциям над числами (причем одни его «аксиомы» оказывались следствиями других), интуиция вела его в правильном направлении.

Но Гельмгольц не был профессиональным математиком[48]. И мы должны констатировать, что только знаменитая работа Рихарда Дедекинда 1888 года[49] вполне утвердила в математике рекурсивные определения и индуктивные процедуры.

Заметим, что задания арифметических операций в терминах «количеств» или «множеств единиц» непосредственно не являются конструктивными, хотя построение алгоритмов, их реализующих, не составляет труда (в качестве примера можно указать на алгоритм сложения натуральных чисел на языке нормальных алгорифмов Маркова). Суть дела, однако, в том, что для их конструктивизации с ними нужно было связывать *какой-либо* алгоритм (хотя бы последовательного счета сначала одного, а потом другого «количеств»), рекурсивные же определения конструктив-

[48] См.: *Богуславский А.И.* Аксиомы арифметики по Гельмгольцу и Лобачевскому. Казань, 1894; *Кенигсбергер Я.* Гельмгольц как математик // Научное обозрение. 1896. № 7. С. 213. № 8. С. 230–241.

[49] *Dedekind R.* Was sind und was sollen die Zahlen? Braunschweig: Vieweg, 1888. 58 S. Русск. перев. *Р. Дедекинд.* Что такое числа и для чего они служат. Казань, 1905.

ны (алгоритмичны) по самой своей природе[50]. Но ясно это стало далеко не сразу. Лишь после того как в XX столетии сложилась общая теория алгоритмов и исчислений, возникла и глубоко проникла в «ткань» оснований математики теория рекурсивных функций, появилась машинная математика, кибернетика и информатика, стало очевидным, насколько установка Г. и Р. Грассманов опережала свое время. В самом деле, зачем математикам прошлого века нужна была фактически «машинная» трактовка системы целых чисел как индуктивно порождаемых слов в ограниченном алфавите знаков, над которыми выполняются эффективно задаваемые преобразования?! Ведь даже такой ученый – специалист по логике и основаниям математики, как Хао Ван, аксиоматически реконструируя в пятидесятых годах XX века арифметику целых чисел Грассманов, не подчеркнул ее конструктивистской составляющей[51].

Ко времени, когда философско-математическому миру стали известны работы Г. Грассмана, в математике и логике утвердились теоретико-множественные представления. В их рамках рекурсивным определениям и индуктивным доказательствам не придавалось того значения, которое они неизбежно приобретают при конструктивистском взгляде на математику и логику. Более того, последовательное развитие теоретико-множественного стиля мышления, приводящее к «математическому платонизму», ставило под сомнение значимость самого приема рекурсии. Если математические объекты объективны настолько, что не зависят от математических конструкций, то рекурсивные процедуры теряют основополагающее значение. Именно с этих позиций Г. Фреге в § 6 своего труда 1884 года «Основания арифметики» подверг критике грассмановское определение, содержащееся в № 15 книги 1861/1862 г. В этом определении, указал Фреге,

---

[50] Так что в Дедекиндовом подходе к основаниям математики содержалась и конструктивистская компонента.

[51] Поэтому упрек со стороны Хао Вана (*Hao Wane*. The Axiomatization of Arithmetic // The Journal of Symbolic Logic. Vol. 22, 1957. N 2. P. 145–158; эта статья вошла в качестве гл. IV в кн.: *Wang Hao*. A Survey of Mathematical Logic. Peking: Science Press, 1962. P. 68–81); в адрес системы Грассманов в том, что ее аксиоматика удовлетворяется и в случае, когда все целые числа рассматриваются как совпадающие друг с другом, – справедливый для предпринятой им аксиоматической реконструкции грассмановской теории – вряд ли является таковым в отношении построения самих Грассманов, для которых целые числа были объектами, порождаемыми в ходе мысленного и знакового конструирования как строго отличные один от другого.

«сумма» определяется через самое себя, так как под $a + b$ предлагается понимать такой член основной последовательности, для которого справедлива формула $a + (b + e) = a + b + e$. Но смысл выражения $a + (b + e) = a + b + e$ не понятен, если мы предварительно не поняли смысла выражения $a + b$. Правда, положение можно, как будто, исправить, указав (чего, говорит Фреге, Г. Грассман не делает), что определяется не «сумма», а операция сложения. Но тогда, по мнению Фреге, можно выдвинуть другое возражение: $a + b$ будет «пустым знаком» – лишится значения, если в основной последовательности совсем не окажется элементов, которые удовлетворяют сформулированному Г. Грассманом условию, или в нем найдется несколько (различных) элементов, ему удовлетворяющих. То, что это на самом деле не может иметь места, утверждает Фреге, автор «Учебника арифметики» принимает без доказательства, так что строгость всей процедуры становится кажущейся.

Эти возражения Фреге убедительны только в том отношении, что Г. Грассман в своем определении не различает явно операцию сложения и ее результат – сумму двух чисел (неразличение операций и их результатов в такого рода контекстах, действительно, постоянный дефект грассмановского изложения; он наблюдается и в «учении о величинах» Роберта Грассмана). В остальном они основаны на недоразумении: «условие № 15 (взятое *вместе* с №№ 13 и 14, о которых Фреге не упоминает) позволяет *эффективно строить* сумму $a + b$ для произвольных величин. С точки зрения Г. и Р. Грассманов неприемлемо само фрегевское противопоставление выражений (величин) и их значений (смыслов): для создателей «Учебника арифметики» и то и другое нераздельно, и величина $a + b$ всегда имеет значение, а именно им оказывается определенный элемент о.п.

МЕТОДОЛОГИЧЕСКОЕ ЗНАЧЕНИЕ РЕКУРСИВНОГО ПОСТРОЕНИЯ БРАТЬЕВ ГРАССМАНОВ

Сказанное помогает понять, почему вклад Г. и Р. Грассманов в создание строгой теории целых чисел так долго недооценивался. Точка зрения, согласно которой разработка арифметики в ее аксиоматическом или(и) рекурсивном виде – разработка, позволившая, как известно, подвести надлежащий фундамент под арифметизацию анализа и теории функций, по-разному осуществленную К. Вейерштрассом, Р. Дедекиндом и Г. Кантором, – восходит (только лишь) к работе Дедекинда 1888 года и исследованиям Дж. Пеано (1889, 1891 гг.), является господствующей в современной математико-логической литературе, «кочуя» из книги в книгу, из статьи в статью[52]. В числе предшественников Дедекинда и Пеано в данной области Г. Грассман упоминается редко (о Роберте вообще не знают), а в тех случаях, когда это делается, его подлинный вклад должным образом не раскрывается. По нашему мнению, это объясняется традицией, сложившейся в философии математики и ее основаниях, – акцентировать внимание на развитии *теоретико-множественного направления и аксиоматического метода*. В результате даже такой представитель отечественного математического конструктивизма, как Н.А. Шанин, утверждает – в предисловии к переводу книга Р.Л. Гудстейна, – что изучение «возможностей, предоставляемых методом рекурсивных определений функций при исследовании оснований математики, было начато Р. Дедекиндом»[53]. В «Очерках по истории математики» Н. Бурбаки, где отмечается, что «первые шаги» в «логическом уяснении теории целых чисел» были сделаны Г. Грассманом в 1861 году, его заслуга (Р. Грассман, разумеется, не упомянут) усматривается только в том, что он «дал определение сложению и умножению целых чисел и доказывал их основные свойства ⟨...⟩ посредством только одной операции $x \to x + 1$ и принципа полной математической индукции[54]; при этом утверждается, будто автор «Учебника арифметики» не дает этому принципу «ясных определений». Но что совсем уж удивительно, так это то, что в статье С. Клини, специально посвященной истории теории рекурсивных функций, ни слова не говорится о Грассманах. Рассматривая «рекурсию, или определение (definition) по индукции», как «принцип определения, соответствующий доказательству по индукции», Клини пишет: «Как я думаю, мы можем

---

[52] См., например: *Карри Х.Б.* Форматизация рекурсивной арифметики. Приложение 3 // Гудстейн Р.Л. Рекурсивный математический анализ / Перев. с англ. М.: Наука, 1970, а также предисловие редактора к русскому переводу тома I книги Д. Гильберта и П. Бернайса «Основания математики».

[53] *Шанин Н.А.* Вступительная статья. О рекурсивном математическом анализе и исчисление арифметических равенств // *Гудстейн Р.Л.* Указ. соч., с. 13. Впрочем, в «Толковом словаре математических терминов», в статье «Рекурсивные функции», занимающей всего 15 строк, тем не менее сказано, что первые работы по рекурсивным функциям были опубликованы именно Г. Грассманом (см.: *Мантуров О.В., Солнцев Ю.К., Сорокина Ю.И., Федин Н.Г.* Толковый словарь математических терминов. Пособие для учителей. Под ред. В.А. Диткина. М., «Просвещение», 1965, с. 390).

[54] *Бурбаки Н.* Очерки по истории математики. М., 1963. С. 36–37.

утверждать, что теория рекурсивных функций родилась девяносто два года тому назад, вместе с Дедекиндовой теоремой 126 («Закон определения путем индукции»), согласно которой функции могут быть определяемы посредством примитивной рекурсии»[55]. (Клини имеет в виду работу Дедекинда 1888 года) и затем в виде иллюстрации приводит рекурсивные определения операций сложения, умножения и возведения в степень.

Нет спору, «проработка» оснований математики, предпринятая Р. Дедекиндом и Дж. Пеано (в избранных ими «стилях») отличалась существенно большей глубиной и тщательностью, нежели грассмановская. Это особенно касается Пеано, аксиоматика арифметики которого строилась уже на базе *формализованной логики*. Но не надо забывать, что исследования этих математиков принадлежат уже другой исторической эпохе. Поэтому нет оснований для умаления значимости работ Грассманов, работ, созданных много раньше. Подобное умаление идет вразрез с подлинным историческим ходом уяснения природы дедуктивных теорий. Во-первых, здесь полностью выпадает важнейший факт: *систематическое* использование братьями Грассманами *рекурсивных определений* как средства введения операций (функций) над элементами о.п., частным случаем которой оказывается кольцо целых чисел. Между тем используемые ими определения сложения, умножения и возведения в степень естественным образом подпадают под хорошо известную ныне схему *примитивной рекурсии*[56]. Во-вторых, в труде Грассманов вполне достигалась «ясность определения» принципа полной индукции – за счет четкого представления конкретных индуктивных доказательств. Формулировка же этого принципа в виде *аксиомы* у них отсутствует не случайно, так как, с одной стороны, они, как мы видели, вообще отвергали в математике аксиомы, а с другой сто-

[55] *Kleene S.C.* The theory of recursive functions, approaching its centential (Elementarrentheorie vom höheren Standpunkte aus) // Bulletin (New Series) of the American Mathematical Society. Vol. 5, N 1. July 1981. P. 44.

[56] А именно под схему рекурсии с одним параметром. В самом деле, определение сложения (1) сводится к этой схеме, взятой в виде: $f(a, 1) = h(a)$, $f(a, b') = g(a, b, f(a, b))$ если во втором равенстве этой схемы функция g рассматривается зависящей только от значения функции f при аргументах a и b: $f(a, b') = g(f(a, b))$ функция f отождествляется со сложением, функция g – с операцией взятия непосредственно последующего, а $h(a)$ полагается равным a'. Аналогично можно показать, что под эту схему подпадает умножение на положительное число (№№ 52, 56): в этом случае определение имеет вид $f(a, 1) = h(a)$, $f(a, b') = g(a, f(a, b))$, где f есть умножение, g – сложение, а $h(a) = a$.

роны, и не нуждались в аксиоматической формулировке упомянутого принципа, так как, строя арифметику рекурсивно, применяли принцип индукции в качестве *правила вывода*. Впоследствии Р. Грассман (1872 г.) в своем «учении о величинах» явно сформулировал его в качестве правила доказательства, опираясь на предварительно введенное понятие последовательности величин[57]; здесь мы находим рассуждение, сходное с тем, которое по аналогичному поводу было проведено – исходя из интуиционистских установок – А. Гейтингом в его книге «Интуиционизм» (1956)[58]. В-третьих, в построении Грассманов предусматривались *все свойства натурального ряда*, как они позднее, через три десятилетия, были сформулированы в аксиоматиках Дедекинда и Пеано. Относительно «аксиомы полной индукции» это мы уже отметили. Остаются первые четыре аксиомы. Если рассмотреть «положительную» часть о.п., то эти аксиомы окажутся непосредственно содержащимися в определении этой последовательности (при установлении данного факта следует иметь в виду, что отношения равенства и порядка для членов о.п. как слов в определенном алфавите сводятся в конечном счете к их графической одинаковости либо неодинаковости). На это можно возразить, что «аксиом Пеано» у Грассманов все же не было. Это, безусловно, так, но суть дела в том, что они были им *принципиально не нужны*: конструктивистский подход братьев делал эти аксиомы тривиальным следствием процесса порождения членов о.п.; братья Грассманы, правда, не проводили соответствующих рассуждений (если не считать таковыми постоянные подчеркивания «однозначности» задания величин), однако если бы им задали соответствующий вопрос, они, скорее всего, высказали бы нечто аналогичное тому, что много позже было сказано по данному поводу А. Гейтингом[59].

---

[57] См.: анализ принципа индукции, как он был представлен у Р. Грассмана, в соответствующих комментариях к его «Учению о величинах».

[58] Русск. перев.: *Гейтинг А*. Интуиционизм. Введение / Перев. с англ. Под редакцией и с комментариями А.А. Маркова. М.: Мир, 1965. С. 23.

[59] «Пусть “N” будет сокращением для выражения “натуральное число”. Две первые аксиомы (“1 есть N” и “если x есть N”, то следующее (имеется в виду: непосредственно следующее. – *Б.Б.*) за x есть N”) могут быть непосредственно усмотрены при выполнении производящего построения (т.е., в применении к арифметике Грассманов, “прибавления единичности”. – *Б.Б.*). То же самое применимо к третьей и четвертой аксиомам (“если x и y суть N и следующее за x равно следующему за y, то $x = y$”; “следующее за любым N не равно 1”») (*Рейтинг А*. Указ. соч. С. 23).

Конечно, рекурсивно-конструктивистская установка братьев Грассманов не могла распространяться на всю их «Арифметику» – хотя бы потому, что в ней рассматривалась теория действительных чисел и «мнимых» величин (imaginäre Grössen), о конструктивном представлении которой в то время не могло быть и речи. Однако если говорить об *арифметике целых чисел*, то ее построение в работе 1860–1861 гг. следует считать историческим предшественником возникшей много позже *рекурсивной арифметики Сколема*. И то, что современники не поняли подхода Грассманов – подхода, который Т. Сколем в фундаментальной работе 1923 г.[60], положившей начало одной из ветвей конструктивной математики, назвал *рекурсивным способом мышления*», – было вполне понятно. Ведь сколемовское исследование, в котором метод рекурсивных определений арифметических функций (и предикатов) и индуктивных доказательств, трактуемый в качестве единственного, если не говорить о явных определениях, средства введения новых объектов теории и обоснования их свойств, получил систематическое развитие – при использовании естественных (и не оговаривавшихся Сколемом) свойств отношения равенства и логических средств, ограниченных, по существу, пропозициональными связками, – было обусловлено задачей преодоления трудностей, вызванных антиномиями логики и теории множеств, открытыми в конце XIX – начале XX века, трудностей, о которых во времена Грассманов философы, логики и математики еще не подозревали.

Разумеется, исследование Т. Сколема ставило перед собой гораздо более серьезные задачи, нежели грассмановский «Учебник арифметики», задачи, о которых мы здесь не будем говорить. Оно было осуществлено после появления знаменитого труда А.Н. Уайтхеда и Б. Рассела Principia mathematica и навеяно некоторыми идеями этого труда; в нем существенно использовался логический формализм, чего у Грассманов, как мы видели, не было. Но то, что Сколем назвал «рекуррентным способом мышления» – использование функции взятия «непосредственно следующего» числа в натуральном ряду, рекурсивных (Сколем говорил: рекуррентных) определений и индуктивных (рекуррентных – в сколемовской терминологии) доказательств, – у Грассманов было.

---

[60] *Skolem T.* Begründung der elemedtaren Arithmetik durch die rekurrierende Denkweise ohne Anwendung scheinbarer Veränderlichen mit unendlichem Ausdehnungsbereich. – In: Skriften utgit av Videnskapsselskapet i Kristiania. I. Matematik-natutvidenskabelig klasse. Kristiania, 1923, N 6.

Неудивительно поэтому, что сколемовское построение арифметики (Сколем ограничивался арифметикой целых положительных чисел), по крайней мере в его начальных разделах, так напоминает – и своими определениями (сколемовское задание операции умножения, например, в точности совпадает с грассмановским), и своими доказательствами – соответствующие параграфы книги 1861/1862 г. Г. Грассмана. Братья Грассманы стоят у истоков «рекурсивного способа мышления», вылившегося в современную теорию рекурсивных функций и то ответвление математического конструктивизма, которое ныне называют рекурсивным математическим анализом.

В свое время (1966 г.), анализируя математические идеи Р. Декарта, С.Я. Яновская писала, что «пока еще не было электронно-вычислительных машин, которые должны выполнять и некоторые логические выводы, не было и подлинной нужды строить эти выводы в точности по формальным правилам какого-нибудь логического исчисления»[61]. Тем более ценными представляются труды тех ученых – и в их числе работы братьев Грассманов, – в которых еще в докибернетическую эпоху закладывались основы аппарата «формальных правил», включая рекурсивную арифметику и формализованную логику.

Описанная нами конструктивистская концепция Г. и Р. Грассманов нашла дальнейшее обоснование в «учении о величинах» младшего брата, – учении, к которому мы теперь и переходим.

«УЧЕНИЕ О ВЕЛИЧИНАХ» РОБЕРТА ГРАССМАНА: ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И ПРОЦЕДУРЫ, ОСНОВАННЫЕ НА ОТНОШЕНИИ РАВЕНСТВА

Р. Грассман определяет учение о величинах как *науку о связи величин.* И, как мы видели, понятие величины трактуется предельно общо: величиной называется «все то, что является или может стать предметом мышления, поскольку имеет одно, а не много значений», т.е. истолковывается однозначно[62]. Однако,

[61] *Яновская С А.* О роли математической строгости в истории творческого развития математики и специально о «Геометрии» Декарта // Исследование логических систем. М.: Наука, 1970. С. 42.

[62] В «Предислови к учению о величинах» (1890 г.), говоря об определении величины, как оно было сформулировано в его работе 1872 года, Р. Грассман без излишней скромности утверждает, что ни у одного автора до него не было

постоянно говоря о требовании *единственности* значения каждой величины, Р. Грассман нигде не поясняет, что же следует понимать под *значением*; из контекста видно, что относительно значений, а, значит, и величин предполагается, что их можно с уверенностью опознавать. Спецификация «значений» происходит только в четырех «разветвлениях» учения о величинах, где их объекты в каждом случае трактуются по-разному. Но как бы в грассмановой «теории форм» ни конкретизировались величины, в *общей* части теории величин они выступают в качестве умственных образований, имеющих определенные языковые (точнее, знаковые) «представительства» и являющихся средством познания как внешней реальности, так и внутреннего мира человека. В отношении большого класса величин, рассматриваемых в учении о формах, – во всяком случае это верно относительно теории величин как общей части теории форм, – можно, прибегая к современным понятиям, сказать, что они являются *конструктивными объектами*: относительно них не только предполагается, что их самих, как и их соединения можно «с требуемой точностью различать и отождествлять», но строится эффективный механизм порождения сложных величин в предположении, что в качестве исходных и непосредственно распознаваемых заданы некоторые базовые объекты – штифты, или элементы. В этом смысле уже начало учения о величинах примечательно своей конструктивностью.

В самом деле, развертывание теории величин начинается с постулирования – «полагания в мышлении», как говорит Р. Грассман, – исходных объектов, обозначаемых буквами e, e_1, e_2..., и мыслимых, как выразился автор «учения о величинах» в труде 1890 г. «без всякого содержания». Поскольку процесс индексации буквы e (которую в следующем ниже контексте можно отождествить с буквой e_0) натуральными числами естественно приводит к следующему *индуктивному определению*: (1) e_0 есть штифт; (2) если e_i – элемент, то e_{i+1} тоже есть элемент (здесь i – произвольное целое неотрицательное число), – то единственной буквой, служащей для построения, выражаясь современным языком,

---

этого «единственно строгого» определения: даже в «Арифметике» его брата определение величины (Предложение 1: величиной называется любая вещь, которая полагаема равной некоторой другой вещи или отличной от нее), по его мнению, не вполне четко, так как в нем не указывается, что каждая величина должна иметь одно, и только одно, значение (см.: *Grassmann R.* Das Gebäude des Wissens. Bd. I, Hälfte 2: Die Denklehre, 1890).

элементарных термов данного формального языка, является буква e. Таким образом, если в теории чисел, изложенной старшим братом буква e означала фиксированную исходную величину – «положительную единичность» (кроме которой имелась еще «отрицательная единичность», обозначавшаяся через $-e$), то в учении о величинах Р. Грассмана предполагается, в общем случае, потенциально бесконечное множество исходных величин – *предметных постоянных*, или индивидов, как сказали бы мы теперь, обозначаемых термами e_i ($i = 0, 1, 2, \ldots$). При развертывании теории величин, когда приходится формулировать законы, в которых речь идет о произвольных элементах, буква e, таким образом, играет роль переменной для величин – *предметной переменной*; в тех случаях, когда требуется более чем одна такая переменная (подобная потребность возникает, например, при введении закона коммутативности бинарной операции), в качестве переменных используются термы с разными начальными индексами (в упомянутом случае это e_1 и e_2). Таким образом, построение теории величин Робертом Грассманом принципиально отличается от рекурсивной теории, развитой его старшим братом в сочинении 1861/1862 г. – оно носит *существенно более общий характер*.

На элементах определен ограниченный набор *бинарных операций* – «связей», соединяющих две и только две величины. Каждое применение бинарной операции к элементам или ранее построенным из них величинам порождает *результат связи*, или *целостность*, также являющуюся величиной; таким образом, множество всех величин оказывается *замкнутым* относительно бинарной операции. Как уже отмечалось в Комментариях, Р. Грассман не очень строго придерживается этой терминологии, и слово «связь» (Knüpfung) употребляется им не только для обозначения соответствующей *операции*, но и как указание на порождаемый с ее помощью *результат*. В качестве «общего знака связи», т.е. знака произвольной бинарной операции (в общем случае отличной от «связи равенства» и «связи неравенства», о которых речь вскоре пойдет), *поначалу* используется только знак $\circ$, помещаемый между связываемыми величинами. Произвольные величины, т.е. элементы и величины, отличные от элементов, но в конечном счете построенные из них путем применения операции $\circ$ (и итерации такого применения), обозначаются Р. Грассманом малыми латинскими буквами $a, b, c, \ldots$ (разумеется, исключая букву e) и теми же буквами с целочисленными положительными индексами. Таким образом, $a \circ b$ обозначает «целостность» как результат связывания величин a и b с помощью операции $\circ$; в случае необходимости эта «целостность» в свою очередь может быть обозначена какой-либо буквой латинского алфавита (но не буквой *e*). Поскольку, как говорит Р. Грассман, каждое предложение, которое доказано для некоторой буквы, справедливо для всех величин, которые эта буква может обозначать, т.е. для произвольной величины, «разрешенной» для такого обозначения, на буквы названного алфавита можно смотреть как на *метазнаки* (постоянных либо переменных) величин, построенных путем применения «связи» $\circ$ и других вводимых позднее бинарных операций. Знаки этих операций, во всяком случае в начальных разделах теории величин, с позиций современной логики можно понимать как *переменные* для бинарных операций либо как *метаобозначения* этих операций. Ибо, говоря словами автора «учения о величинах», каждое предложение, доказанное для некоторого знака связи, справедливо для всех связей, которые может обозначать этот знак. Любую связь величин – точнее было бы говорить о результате любой связи величин – Р. Грассман называет *формулой* (а иногда – *функцией*).

Выделяются две особые («постоянные», как сказали бы мы теперь) связи – *связь равенства* и *связь неравенства*, обозначаемые, соответственно, обычным знаком равенства = и специфическим грассмановским знаком неравенства $\gtrless$; связывание (точнее, результат связывания) двух величин с помощью первого из них называется равенством.

Если дана (конечная) *последовательность* (ряд) *величин* (скажем, состоящая из n «целостностей»), то входящие в нее величины Р. Грассман обозначает одной и той же буквой с индексами, например, $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, a_n$; если a_α – произвольная величина такого рода последовательности, то $a_{\alpha+1}$ – величина, непосредственно следующая в этой последовательности за данной величиной. Вводится важное представление о *последовательном связывании* величин некоторого ряда; оно приводит к понятию величины, получающейся из заданных величин путем повторных применений операции $\circ$; величина, возникающая путем подобного итерирования, трактуется при этом, говоря современным языком, по ассоциативности влево, так что, например, $a \circ b \circ c \circ d = ((a \circ b) \circ c) \circ d$. Целостность, представляющую собой результат последовательного связывания величин $a_1, a_2, \ldots, a_n$, Р. Грассман обозначает через $G_{1,n}$. Для указания порядка, в котором при вычислении значения данной величины надлежит выполнять операцию $\circ$, используются скобки.

Назначение скобки – связать в целостность две заключенные в ней величины для того, чтобы затем результат связи можно было связать с величиной, находящейся вне скобки (например, $a \circ (b \circ c)$); то, что в скобке всегда должно стоять только две величины, вытекает из бинарности операции $\circ$ и (других, вводимых позже, «связей»). Скобки служат для фиксации структуры величин, построенных из других величин, и указания порядка выполнения бинарной операции, особенно тогда, когда он отличен от «последовательного связывания». Поскольку в последнем случае не может быть сомнений относительно порядка связывания величин, скобки в соответствующей формуле по желанию могут быть удалены либо введены. Если же порядок применения операции $\circ$ к заданным величинам, порождающий рассматриваемую целостность, отличен от «последовательного связывания», применение скобок обязательно; при этом не предполагается использование наружной скобки – отдельно взятая целостность в скобку не заключается.

В случае, когда некоторая «связь», т.е. сложная величина, или целостность, содержит какую-то величину a, она получает наименование *формулы* (*от*) *величины* a и обозначается выражением вида $F(a)$. Целостность, представляющая собой последовательную связь величин $a_1, a_2, \dots, a_n$, обозначается через $G_{1,n}$ для выделения в ней произвольной величины a (из набора величин от a_1 до a_n) применяются записи вида $G_{1,n}(a)$ или $G_{1,n}a_\alpha$, где буква a обычно индексирована с помощью α, так что в формулах $G_{1,n}(a_\alpha)$ и $G_{1,n}a_\alpha$ индекс при a «пробегает» числа от 1 до n.

Как мы знаем, развертывание учения о формах (величинах) состоит, если воспользоваться словами самого Р. Грассмана, в том, что «от самых простых связей или формул величин восходят к самым сложным, исследуя, какие из этих формул равны друг другу». Такой подход делает весьма значимой *идею равенства*, которая в известном смысле доминирует во всей теории величин: доказываемые в ней теоремы имеют вид либо выражений, образованных с помощью «связи равенства», либо высказываний относительно таких выражений, а в доказательствах широко используются тождественные преобразования. Первые два из трех особо формулируемых – в виде теорем – способов доказательств в «учении о величинах», а именно, *прямое* и *поступательное*, о которых речь пойдет в следующем разделе данной статьи, обосновываются Р. Грассманом на основе свойств отношения равенства величин, и соответствующие предложения получают названия «первого и второго законов равенства».

Отношение равенства величин определяется (в пункте 2 «Учения о величинах» 1872 года) обычным образом. «Равными называются две величины при условии, что в каждой связи учения о формах одна может быть заменена другой без изменения значения». На базе этого определения непосредственно доказываются теоремы, выражающие, говоря современным языком, свойства *рефлексивности*, т.е. то, что каждая величина равна самой себе (для любой величины a справедливо $a = a$, пункт 9), и *симметричности* (№ 11) отношения равенства величин; последнее свойство при этом записывается в виде $(a = b) = (b = a)$. Допустимость подобной записи, с точки зрения Р. Грассмана, понятна: отношение равенства (так же как и отношение неравенства) трактуется им как частный случай «связей» его учения, почему знак = используется для связывания не только величин, не являющихся равенствами (и неравенствами), но и равенств. Подобное обращение со знаком равенства, «режущее глаз» современному логику, – обращение, к которому Р. Грассман широко прибегает, – показывает, что он не различает, по крайней мере в явном виде, отношение равенства *величин* – не равенств (и не неравенств) и отношение равенства (равносильности) *равенств* величин; при доказательстве выражений, подобных формулировке теоремы № 11, он поэтому ссылается на определение равенства величин (№ 2). Если последовательно провести подобный подход, то получится, что равенства (и неравенства) можно связывать с помощью произвольной бинарной операции $\circ$ (и других аналогичных операций, появляющихся в последующем развертывании теории); но что может означать, например, запись $(a = b) \circ (b = a)$? То, что автор «учения о величинах» таких записей не применяет, свидетельствует о том, что эти два отношения равенства в теории величин по существу различны.

Связывание равенств знаком = (над которым мы в нашем переводе в этих случаях ставим точку), т.е. введение отличного от равенства величин отношения *равносильности равенств*, позволяет Р. Грассману в первых доказательствах его теории «обойти» отсутствующее у него понятие логического следования (эта позиция отражает принципиальную установку братьев Грассманов – отказ логике в праве быть наукой, предшествующей математике, о чем мы еще будем говорить). В самом деле, рассмотрим доказательство теоремы № 22. Оно имеет вид:

$$
\begin{aligned}
(a = b) &\doteq (a = a) && \text{(согласно № 2)} \\
&\doteq (b = a), && \text{(согласно № 2)}
\end{aligned}
$$

что поясняется словами так: в силу определения «связи равенства» первую величину (a) можно заменить второй величиной (b), а вторую подставить на место первой. Полная реконструкция этого доказательства приводит, однако, к рассуждению вида: установлено, что $a = a$ (№ 9); если теперь дано, что $a = b$, то первое вхождение буквы a в равенство $a = a$ можно (согласно № 2) заменить буквой b, и мы получим равенство $b = a$; итак, из $a = b$ выведено $b = a$. Аналогично рассуждая, можно из $b = a$ получить $a = b$. Это и дает основание Р. Грассману соединить оба равенства знаком равенства. Мы видим, таким образом, что этот знак, когда он связывает два равенства, обозначает, по существу, логическую операцию *эквиваленции* (высказываний) или – другая, возможная трактовка – *дедуктивное равенство*, т.е. взаимовыводимость (равносильность) двух равенств.

Поскольку без логического следования, хотя бы в самой ограниченной его форме, – при стремлении Р. Грассмана к тому, чтобы все выкладки его теории проводились формально, по четким правилам, – обойтись нельзя, оно вскоре, в № 12, вводится неявно, в форме отношения *условного равенства*, т.е. равенства величин при заданном условии. Как уже известно читателю, это отношение выражается либо знаком $\stackrel{*}{=}$, где звездочка служит отсылке к соответствующему условию, либо в виде двух равенств – *допущения*, или условия (гипотезы), и *заключения* (следствия, тезиса). Первой теоремой, доказываемой с помощью условного равенства величин, является теорема № 13: $a \circ b = a \circ c$ при условии (*) $b = c$. Эта и ряд следующих теорем доказываются на основе логических переходов, на которые уполномочивает определение отношения равенства и следующие из него правила замены равным. В частности, обоснование теоремы № 14, в современной записи имеющей вид $a = b \vdash F(a) = F(b)$, при произвольных величинах a, b и произвольном F, состоит в ссылке на определение отношения равенства (№ 2), а пояснения, которые дает Р. Грассман, показывают, что он использует правило замены равным. После этого – в № 15 – доказывается теорема, согласно которой две величины, равные некоторой третьей величине, равны, а также теорема, выражающая *транзитивность* отношения равенства (№ 16). Доказательство этих теорем производится путем ссылки на № 13; так, теорема № 15: $a = c,\ b = c\ \vdash a = b$ обосновывается следующим образом. Допущение $b = c$, заключение $(a = c) \doteq (a = b)$ (согласно № 13). Рассуждения в № 13 заставляют думать, что «связь равенства» понимается как частный случай бинарной операции. Подобная трактовка отношения равенства в этом случае возможна потому, что для произвольной бинарной операции еще не введены никакие свойства, кроме вытекающих из определения равенства (№ 2), которые действуют для всего «Учения о величинах». Однако первое же свойство, независимое от равенства, свойство, которое, как вскоре обнаруживается, Р. Грассман рассматривает в качестве возможного для связи $\circ$, – свойство *ассоциативности* – для отношения равенства лишено смысла (как например, истолковывать запись $(a = (b = c) = ((a = b) = c))$? Поэтому можно сказать, что само развертывание теории величин выделяет «связь равенства» в особое отношение, поскольку для него не ставится вопрос об ассоциативности и дистрибутивности (свойством коммутативности, т.е. симметричности, отношение равенства обладает, что и было доказано Р. Грассманом в № 11).

Сказанное поясняет, почему выше, говоря о «логическом следовании» в теории величин Роберта Грассмана, мы оговорились – «в самой ограниченной его форме». Ограниченность эта состоит в том, что используемые в этом «следовании» логические средства *не выходят* за рамки теории равенства. Ведь даже отношение «равенства равенств» есть такая их связь, которая удовлетворяет свойствам равенства.

В связи с идеей равенства становится особенно заметной нечеткость грассмановского различения того, что ныне называют *семантическим* и *синтаксическим* уровнями математико-логических рассмотрений. К сбивчивости терминологии, касающейся «связей» и их результатов, сбивчивости, типичной, как мы уже отмечали, для изложения Р. Грассмана, – добавляется смешение «связи величин» как обозначаемого и ее обозначения. В № 5 кружок $\circ$ рассматривается как «знак связи» («связующий знак»), но в № 8 «связь величин» именуется формулой, т.е «формула», как будто, относится к уровню обозначаемого. Однако из содержания этого последнего пункта усматривается, что она все же принадлежит к уровню обозначающего. Ибо только при таком истолковании становится понятным введение – в качестве отличных от отношения равенства величин – представлений о *равнозвучности* и *соответствии* двух формул. Эти рассмотрения Р. Грассмана заслуживают того, чтобы на них остановиться.

Как оказывается, Р. Грассман вводит понятие о том, что ныне называется *графическим равенством*; это отношение равенства он именует *равнозвучностью* и определяет так: две формулы равнозвучны (gleichlautend), если они содержат одинаковые связи одинаковых величин. Противоположным для «равнозвучности» является понятие о *различии* формул (не смешивать с упоминавшимся выше отношением неравенства величин!): у различных формул не совпадают какие-либо связи или величины. Две *раз-*

личные формулы *равны*, если одна может быть преобразована в другую (подразумевается: по правилам теории величин) без изменения значения целостности; очевидно, что равенство формул имеет место тогда и только тогда, когда равны выражаемые ими *величины*. Наконец, *формулы двух величин* называются *соответствующими*, (entsprechende), если они становятся равнозвучными, если во второй формуле одну из упомянутых величин заменить другой.

Грассмановская система понятий, относящихся к равенству – и величин, и формул – (несмотря на отмеченную некоторую сбивчивость в различении семантического и синтаксического уровней рассмотрения), свидетельствует вместе с тем об определенной тонкости его семиотических (как сказали бы мы теперь) представлений и во всяком случае существенна для выявления такого конструктивистского аспекта его концепции, как сведение равенства величин к графическому равенству изображающих их формул. Такое сведение явно присутствует в доказательствах первых теорем: в №№ 10 и 11 обоснование рассматриваемых в них равенств (уравнений) величин, совершающееся на основе определения отношения равенства, № 2, и закона рефлексивности, № 9, завершается констатацией равнозвучности выражающих их формул.

Кроме «связи равенства» величин, обозначаемой обычным знаком =, еще Герман Грассман (в работе 1844 года) ввел отношение неравенства, обозначив его через $<$, каковым знаком пользовался, как мы видели, и Р. Грассман. В «Учении о величинах» с этим отношением связано малопонятное недоразумение. Р. Грассман определяет: две величины называются неравными, если «ни в одном связывании учения о формах ни одну из них нельзя заменить другой без изменения значения». Может показаться, что мы имеем здесь дело с оговоркой, что отношение неравенства – это просто отрицание отношения равенства, и приведенное в кавычках надо читать: «существует такое соединение, что замена в нем одной величины другой меняет значение целостности». Но в № 2 рассматриваемой книги – да и во всех книгах 1872 г., равно как и в трудах 1890 г.[63] Р. Грассман неизменно повторяет свое определение «связи неравенства». Между тем в грассмановской теории величин оно влечет противоречие. Чтобы более не возвращаться к этому вопросу, покажем (по необходимости забегая вперед, в ту

---

[63] *Grassmann R.* Das Gebäude des Wissens. Bd. I, Hälfte 2: Die Denklehre. 1890; *Idem.* Die Logik und andern logischen Wissenschaften, 1890.

часть учения о величинах, о которой еще не было речи), как оно получается. В силу теоремы № 53 для произвольной величины a верно, что $a \cdot 0 = 0$. Тогда в теории величин справедливы равенства $a + b \cdot 0 = a$ и $a + c \cdot 0 = a$, где b, c – какие-то величины. Использование свойств отношения равенства дает $a + b \cdot 0 = a + c \cdot 0$. Если теперь $b \gtrless c$, то, согласно определению «связи» $\gtrless$, оказывается, что формулы $a + b \cdot 0$ и $a + c \cdot 0$ должны иметь разные значения, что противоречит приведенному выше равенству. Грассмановское определение отношения, выражаемого знаком $\gtrless$, не «портит» учения о величинах только потому, что он пользуется этим отношением очень аккуратно: в качестве средства задания условия, при котором справедливо некоторое равенство. В книге, которую мы здесь рассматриваем, нет ни одной теоремы, в которой доказывалось бы выражение вида $a \gtrless b$.

ТЕОРИЯ ДОКАЗАТЕЛЬСТВ РОБЕРТА ГРАССМАНА

Как мы уже говорили, представления Роберта Грассмана относительно оснований математики – в том их виде, в каком они отражены в его учении о величинах, – развивают соответствующие взгляды, выраженные в трудах старшего брата: в «Учении о протяженностях» 1844 года и «Учебнике арифметики» 1860–1861 гг. В «Учении о величинах» Р. Грассмана тоже отсутствуют аксиомы, и развертывание соответствующей теории – подобно изложению теории чисел Г. Грассманом – происходит путем задания исходных элементарных объектов, индуктивных определений («правил образования», как стали говорить логики XX столетия), явных (номинальных) определений – словесных и формульных, индуктивных доказательств и рекурсий. «Логический костяк» теории величин в общем повторяет «устройство» грассмановской работы 1861–1862 гг., правда, с тем отличием, что в учении о величинах последовательно вводимые занумерованные рубрики не всегда предваряются указаниями «определение» и «теорема» («предложение», Satz); такие указания присутствуют только в наиболее существенных случаях, причем некоторые основополагающие теоремы и определения получают наименования, начинающиеся соответственно со слов «закон» и «основная формула». Вспомогательные выделения типа «обозначение», «примечание» или «задача», имеющиеся в «Учебнике арифметики», в изложении теории величин 1872 года не встречаются.

Основными структурными «единицами» труда «Учение о формах (величинах)» 1872 г. – в разделах с первого по девятый – являются, таким образом, *определения* и *теоремы.* Изложение начинается – в разделе 1 «Определения (Erklärungen) и знаки» – с серии словесных определений понятий величины и равенства величин, элемента (штифта), буквы, связи (соединения) величин, целостности, скобки, последовательного связывания ряда величин. В дальнейшем, начиная с раздела 2 «Равенства величин», помимо определений появляются теоремы (иногда сопровождаемые примерами) и их доказательства. Последние приводятся, особенно в начальных разделах «учения о величинах», как в формульной, так и в словесной форме. В случае тождественных преобразований, подобно тому как это делалось в «учебнике» Г. Грассмана 1861–1862 года, справа от соответствующих равенств выписываются определения и теоремы, на основании которых производится соответствующий переход («анализ доказательства», в современной терминологии). В разделе 9, посвященном «третьему уровню» связи величин, формулировки определений и теорем приводятся в виде двух параллельных колонок: слева в специфически грассмановской терминологии, справа – в обычных математических терминах. Важнейшие теоремы, как мы уже отмечали, получают особые названия – таковы все три теоремы о способах доказательств в теории величин, то же касается наиболее важных определений, которые Р. Грассман относит к числу «основных формул».

Присмотримся ближе к теории доказательств, как она представлена в первой книге серии книг 1872 г. Исходя из сказанного в предшествующем разделе данной статьи о специфике грассмановского понимания величин, формул и равенств, мы можем свести смысл этих понятий к следующему *индуктивному определению*: (1) *штифты*, или *элементы*, суть (простые) *величины*; (2) если e_i и e_j суть (произвольные) элементы, то $e_i \circ e_j$ есть некоторая *величина*; (3) если a и b – произвольные *величины*, содержащие, каждая, хотя бы один знак связи $\circ$ и не содержащая знака =, то $(a) \circ (b)$ тоже есть некоторая *величина* (в случае, когда в данном контексте мы отвлекаемся от построенности величин a и b из элементов и вообще каких-либо величин, допустимо применение записи без скобок, т.е. $a \circ b$); если грассмановское понятие *формулы* распространить на элементы (как результаты «пустого» связывания), то приведенные пункты определения окажутся – коль скоро в них «величину» заменить на «формулу» – определяющими понятие формулы: (4) если a и b суть произвольные величины, то $(a) = (b)$ суть *равенство* величин (при отвлечении от построенности a и b из элементов или других величин допустима запись $a = b$); (5) если α и β суть произвольные *равенства*, то $(\alpha) = (\beta)$ есть равенство (равносильность) равенств α и β; знак = имеет здесь иной смысл, нежели в № 4, и, строго говоря, для выражения отношения равносильности надо ввести другое обозначение (в переводе, как уже сказано, используется постановка точки над знаком равенства), однако этого можно и не делать, если «держать в уме» то, что в пункте (4) знак равенства связывает *величины* (не равенства), а в пункте (5) *равенства*, – обстоятельство, позволяющее в каждом случае идентифицировать смысл знака равенства.

Индуктивный характер носит и определение фундаментального для всего построения Р. Грассмана понятия *последовательного связывания* (последовательной связи) величин. Поначалу его приходится представлять в виде двух разных определений – отдельно для элементов и для произвольных величин. Для элементов оно имеет вид: (1′) $e_i \circ e_j$ есть результат последовательного связывания элементов e_i и e_j; (2′) если $G_{1,n}$ есть результат последовательного связывания ряда элементов $e_{i_1}, e_{j_2}, \ldots, e_{r_n}$, то $G_{1,n} \circ e_{s_{n+1}}$, тоже есть результат последовательного связывания элементов, а именно элементов $e_{i_1}, e_{j_2}, \ldots, e_{r_n}, e_{s_{n+1}}$; в обоих случаях буквенные индексы при e можно считать «пробегающими» числа 1, 2,..., а $n = 2, 3,\ldots$ Для (произвольных) величин определение «результата последовательного связывания величин некоторой их последовательности» получается из приведенного определения путем замены элементов на (произвольные) величины. В труде 1872 г. это последнее определение выступает в качестве теоремы[64]:

10b. $G_{1,n+1}(a_\alpha) = (G_{1,n}(a_\alpha)) \circ a_{n+1}$ и

$$G_{1,n}(a) = a_1 \circ a_2 \circ a_3 \circ \ldots \circ a_n.$$

Ее доказательство, по Р. Грассману, состоит в ссылке на (словесное) определение последовательного связывания величин (№ 7).

[64] Выделение в записи $G_{1,n+1}(a_\alpha)$ произвольной величины a_α из последовательно связываемых величин $a_1, a_2,\ldots, a_n$ не существенно. Выше, в пункте (2′), мы могли бы воспользоваться и такой формой записи, разумеется, в «штифтовой» форме: $G_{1,n}(e_\alpha)$.

Сведение такого рода связывания (произвольных) величин к аналогичному связыванию элементов, которые содержатся в связываемых величинах, т.е. тождественное преобразование результата первого связывания посредством второго, – необходимое для распространения выводов, извлекаемых из процедуры, называемой Р. Грассманом элементарным (основным) доказательством для штифтов (№ 19), о которой речь пойдет ниже, – на величины вообще, оказывается возможным только после введения свойства ассоциативности операции $\circ$.

Прежде чем переходить к способам доказательств теорем в учении о величинах – тому главному, что нас здесь интересует, – отметим, что теоремы (предложения) в нем – как, впрочем, и в «Учебнике арифметики» Г. Грассмана, – имеют вид либо *равенств,* либо *равносильностей равенств,* либо умозаключении от *допущения* (в виде одного или более равенств) к *заключению* (в виде равенства же)[65], либо, наконец, *общих утверждений о свойствах величин*, рассматриваемых вместе с определенными операциями. Доказательства оформляются так же, как в «Общем учении о формах» Г. Грассмана 1844 г., в частности, формульное доказательство нередко, особенно в начале изложения теории величин, дублируется соответствующим словесным рассуждением. Доказательственные процедуры основываются либо непосредственно на определении отношения равенства величин или на вытекающих из этого определения его свойствах (в разделе 2 «Учения о величинах» 1872 г.), либо (в остальных его разделах) строятся в основном индуктивно; при этом в индуктивных доказательствах используются определение отношения равенства или вытекающие из него теоремы, т.е. производятся тождественные преобразования.

Главные методы доказательства Р. Грассман вводит в виде теорем №№ 17–19, выражающих, соответственно, *правило обобщенной транзитивности* отношения равенства и *две индуктивные процедуры.* Теоремы №№ 17, 18 при этом предполагают использование понятия (конечной) последовательности (ряда) величин, а теорема № 19 – понятие последовательного связывания величин некоторого (конечного) ряда.

Напомним читателю доказательство правила обобщенной транзитивности отношения равенства.

---

[65] Или умозаключения от допущения, представляющего собой некоторое равенство, к заключению в виде равносильности определенных равенств; ср. сказанное нами выше о доказательстве теоремы № 15.

17. *Предложение о прямом (непосредственном) доказательстве для величин.*

Допущение: $a_1 = a_2, a_2 = a_3, \ldots, a_{n-1} = a_n$, Заключение: $a_1 = a_n$.

или на словах: если в некотором ряде величин каждая предшествующая равна непосредственно последующей, то первая величина ряда равна его последней величине.

Доказательство с помощью формул:

Допущение: $a_1 = a_2, a_2 = a_3$.	Заключение: $a_1 = a_3$	(согласно 16)
Допущение: $a_1 = a_3, a_3 = a_4$.	Заключение: $a_1 = a_4$	(согласно 16)
и т.д.		
Допущение: $a_1 = a_{n-1}, a_{n-1} = a_n$.	Заключение: $a_1 = a_n$	(согласно 16)

Во «Введении в учение о величинах», помещенном в рассматриваемой книге, это доказательство поясняется так:

если в некоторой (конечной. – *Б.Б.*) последовательности величин каждая предшествующая величина равна непосредственно последующей, то первая равна любой последующей, потому что тогда первая равна второй, вторая же может быть заменена равной ей третьей, а эта последняя – равной ей непосредственно последующей величине, так что первая величина равна любой последующей величине.

Очевидно, что доказательство № 17 предполагает, в качестве подразумеваемого завершающего шага, акт обобщения: распространение утверждения теоремы на произвольные последовательности величин длины n ($n = 1, 2, \ldots$), обладающие предусматриваемым в допущении теоремы свойством, что логически законно, поскольку в ходе доказательства не используются свойства каких-либо конкретных значений n.

Заметим, что теорема № 17 сохраняет силу и в случае, когда знак равенства понимается как выражающий равносильность равенств (что предполагает, правда, соответствующее «прочтение» теоремы № 16 и ее доказательства, но труда это не составляет).

Второй тип доказательства – это «поступательное», или индуктивное, доказательство, смысл которого Р. Грассман объясняет так:

Доказывается ⟨...⟩, что если в последовательности величин (конечной. – *Б.Б.*) для первой ее величины справедливо некоторое равенство и оно таково, что когда оно, кроме того, справедливо для любой величины последовательности, оно справедливо также и для непосредственно следующей за ней величины, то оно справедливо вообще для всех величин последовательности.

Этот способ доказательства подразделяется на два вида: *поступательные* (*индуктивные*) *доказательства для величин* и аналогичные *доказательства для штифтов*, называемые также *элементарными доказательствами*. Процедура доказательств первого вида обосновывается с помощью следующей теоремы.

18. *Предложение о поступательном (индуктивном) доказательстве для величин.*
Допущение: $F(a_1) = \mathfrak{F}(a_1)$, $[F(a_\alpha) = \mathfrak{F}(a_\alpha)] \doteq [F(a_\alpha + 1) = \mathfrak{F}(a_\alpha + 1)]$.
Заключение: $F(a_n = \mathfrak{F}(a_n)$.

В Комментариях к теоремам № 18 и 19 подробно проанализированы те принципы, на которых базируются индуктивные доказательства Р. Грассмана. Здесь мы хотим лишь кое-что напомнить, да и дополнить сказанное там.

Теорема 18 доказывается следующим образом. Дано $F(a_1) = \mathfrak{F}(a_1)$ и $[F(a_1) = \mathfrak{F}(a_1)] \doteq [F(a_1) = \mathfrak{F}(a_1)]$; тогда – здесь Р. Грассман ссылается на определение № 2 – в качестве заключения получаем $F(a_2) = \mathfrak{F}(a_2)$; но нам дано и то, что $[F(a_2) = \mathfrak{F}(a_2)] \doteq [F(a_3) = \mathfrak{F}(a_3)]$; значит, рассуждая аналогично, имеем $F(a_3) = \mathfrak{F}(a_3)$, и т.д., пока не получим в качестве заключения, что $F(a_n) = \mathfrak{F}(a_n)$, при произвольном целом положительном n.

Как видим, в этом доказательстве, в отличие от доказательства предшествующей теоремы, фигурируют два *разных* отношения равенства – для величин и для равенств величин, и только с учетом этого может быть внесена ясность в грассмановскую ссылку на № 2, а также, если привлечь словесное рассуждение Р. Грассмана, долженствующее пояснить описанное выше «формульное доказательство», – в смысл отсылки на теорему № 17 (ср. сказанное выше о распространении названной теоремы на отношение равносильности равенств и предпринятый нами в предшествующем разделе данной статьи анализ грассмановского доказательства теоремы № 22). Если разъяснения Р. Грассмана не столько поясняют, сколько запутывают суть дела из-за смешения разных отношений равенства, то конкретные применения разрешенного теоремой способа доказательства вполне проясняют ее смысл: он заключается в обосновании индуктивного доказательства, предполагающего *базис* индукции, *индуктивный переход* и *обобщающее заключение*.

Как явствует из доказательства теоремы 18, оно обосновывает обобщение только для конечных последовательностей. При доказательстве же свойств *произвольных* величин, когда требуется выход за рамки конечного, «теорема 18» становится недоказуемой – переходит в *постулируемый* принцип индукции (чего Р. Грассман не оговаривает).

В самом деле. Рассмотрим в качестве примера *поступательное доказательство* теоремы 25 («закона объединения, или скобочного закона»), гласящей, что в любой связи, для которой выполняется свойство ассоциативности, любую скобку можно как ввести, так и удалить[66]. Доказательство этой теоремы, по Р. Грассману, является поступательным (индуктивным) относительно $G_{1,n}b$ в выражении $a \circ G_{1,n}b_{\mathfrak{b}} \underset{Df}{=} a \circ (b_1 \circ b_2 \circ \ldots \circ b_n)$[67].

Требуется доказать, что для любого n:

$$a \circ (b_1 \circ b_2 \circ \ldots \circ b_n) = a \circ b_1 \circ b_2 \circ \ldots \circ b_n. \qquad \text{(I)}$$

Индукция ведется по длине n результата «последовательного связывания» $G_{1,n}b_{\mathfrak{b}}$, начиная с $n = 2$. Формулируется и доказывается *базис индукции*: (1°) равенство (1) справедливо для случая $n = 2$, ибо тогда (I) переходит в равенство $a \circ (b_1 \circ b_2) = a \circ b_1 \circ b_2$, верное в силу ранее доказанной в теоремы 24 (о ней еще пойдет речь). *Индуктивный переход*: (2°) путь равенство (I) верно для какой-то целостности $G_{1,n}b_{\mathfrak{b}}$; тогда можно показать, что оно верно и для целостности $G_{1,n+1}b_{\mathfrak{b}}$; ибо

$$a \circ (G_{1,n+1}b_{\mathfrak{b}}) = a \circ (G_{1,n}b_{\mathfrak{b}} \circ b_{n+1}) \qquad \text{(согласно 10}\mathfrak{b}\text{)}$$
$$= (a \circ G_{1,n}b_{\mathfrak{b}}) \circ b_{n+1} \qquad \text{(согласно 24);}$$

здесь 10𝔟 есть приводившаяся уже нами теорема, выражающая свойство последовательного связывания величин. Следовательно: (3°) согласно теореме № 18 равенство (I) *общезначимо*.

Это доказательство опирается на теорему № 24 – на *закон ассоциативности* $a \circ (b \circ c) = a \circ b \circ c$, обоснование которого ведется «для штифтов»: оно, как говорит Р. Грассман, является *элементарным* (основным) доказательством относительно c. Обоснование соответствующего способа доказывания составляет содержа-

---

[66] Р. Грассман включает в формулировку теоремы также утверждение о том, что в результате описанного процесса всегда можно получить величину, элементы которой будут связаны последовательно. Однако это заключение получается, только если привлечь предшествующие №№ 21–24 раздела 4 данной книги, особенно определение № 22, задающее соответствующую рекурсивную процедуру. Этот вопрос будет особо рассмотрен нами ниже.

[67] Вместо примененного нами знака равенства по определению $\underset{Df}{=}$ Р. Грассман использует обычный знак равенства; разумеется, знак $\underset{Df}{=}$ можно заменить более распространенным ныне знаком $\rightleftarrows$.

ние теоремы № 19, самой важной теоремы теории доказательств «учения о величинах». Вот ее формулировка и обоснование:

> Каждое равенство учения о формах, которое справедливо для одного штифта, или элемента, и которое таково, что, если оно справедливо для произвольной величины, то оно справедливо и для всякой величины, которая содержит одним элементом больше, справедливо для всех величин, строящихся посредством последовательного связывания.
>
> Доказательство получается непосредственно из № 18, если в качестве первой величины взять данный элемент, а в качестве непосредственно следующей величины последовательности каждый раз брать величину, содержащую одним элементом больше.

В формулировке этой теоремы речь идет о «равенствах», но на самом деле – это становится ясным уже из ее применения к доказательству теоремы № 23 – имеются в виду вообще высказывания, касающиеся величин и элементов. Хотя Р. Грассман и пишет, что обоснование этой теоремы получается непосредственно на основании предшествующей, это не совсем так. Специфика доказательства теоремы № 19, вводящей метод доказывания, который – вместе с рекурсиями, о которых мы будем говорить в следующем разделе этой статьи, – лежит по существу в основе всей «конструкции» теории величин и состоит в том, что подразумеваемая в нем последовательность величин $a_1, a_2, \ldots, a_n$ рассматривается построенной путем последовательного связывания (произвольных) элементарных величин, начиная с величины a_1, представляющей собой элемент: таким образом, упомянутая последовательность оказывается упорядоченной по длине n, выражающей число последовательно связанных элементов, начиная с $n = 1$ (или по длине $k = n - 1$ числа последовательных применений операции $\circ$, включая «пустое» применение). То, что каждую величину можно представить в виде целостности, являющейся результатом последовательного связывания элементов, становится обоснованным после доказательства теорем №№ 23, 24, а что отношение равенства двух произвольных величин всегда сводимо к отношению графического равенства такого рода целостностей, – после доказательства теоремы № 28, говорящей о коммутативности бинарной операции в применении к элементарным величинам.

Как и теорема № 18, теорема о «доказательстве для штифтов» (элементов) обосновывает определенную индуктивную процедуру. Так, доказательство теоремы № 24, осуществляемое «для штифтов», имеет следующий вид. Индукция проводится, говоря современным языком, по длине величины c, в только что разъясненном смысле понятия длины (Р. Грассман, как мы уже упоминали, говорит, что это «элементарное доказательство относительно c»). *Базис индукции* (пункт 1 доказательства) соответствует случаю $a = e$, когда доказываемое равенство переходит в равенство $a \circ (b \circ e) = a \circ b \circ e$, которое перед этим (№№ 21, 22) было принято в качестве определения связи величин, названной Р. Грассманом «объединением» (см. следующий раздел данной статьи). *Индуктивный переход*, с логической точки зрения целиком построенный на правиле замены равным, имеет вид:

2. Если это равенство справедливо для величины c (допущение), то оно справедливо также и для величины $c \circ e$, которая содержит одним элементом больше (заключение); ибо

$a \circ [b \circ (c \circ e)] = a \circ [b \circ c \circ e]$	(согласно 22)
$= a \circ [b \circ c] \circ e$	(согласно 22)
$= a \circ b \circ c \circ e$	(согласно допущению)
$= a \circ b \circ (c \circ e)$	(согласно 22).

3. Стало быть, данное предложение, в соответствии с № 19, общезначимо для всех величин.

Как мы уже говорили, во всех индуктивных доказательствах теории величин – «поступательных» для величин и «элементарных» для штифтов – в качестве пункта 1 фигурирует базис индукции, в качестве пункта 2 – индуктивный переход, а в качестве пункта 3 – констатация общезначимости доказываемого равенства; выписываемый справа от преобразуемых равенств «анализ доказательства» отличается от аналогичного анализа в книге Г. Грассмана 1861–1862 гг. лишь тем, что включает, хотя и опосредованно, через ранее доказанные теоремы, ссылки на свойства отношения равенства величин либо на его определение. В иных случаях Р. Грассман позволяет себе не воспроизводить полностью того или иного индуктивного доказательства, ограничиваясь пояснением его общего хода или приведением примера.

Изучение «Учения о величинах» 1872 г. показывает, что все доказательства равенств, имеющиеся в этом труде, в конечном счете сводятся либо к свойствам отношения равенства, либо к индукции «для штифтов», т.е. ведутся по (штифтовой) длине выделенной в индукции величины на основе предварительно введенной рекурсивной процедуры. При этом, однако, в отличие от грассмановской арифметики, где индукция осуществлялась по «основной последовательности» (а с определенного момента – по целым числам) в двух «направлениях», обусловленных наличием противоположных «единичностей», положительной и отрицательной, индукция в общей теории величин (но не в ее продолжениях, каковыми являются четыре ветви «теории форм») всегда «однонаправлена», но зато предполагает, в общем случае, неограниченно много попарно различных «элементов», природа которых, однако, не принимается в расчет в понятии длины выделенной в индукции величины. Очевидно, что многообразие допускаемых к рассмотрению элементарных величин не препятствует тому, что и в «учении о величинах», как ранее в грассмановской арифметике, отношение равенства (и отношение различия) между величинами сводится, как мы неоднократно говорили, к отношению графического равенства (равнозвучности, т.е. совпадения по написанию) либо графического же различия величин (формул), в которых явно выписаны все их элементы.

В связи с подходом Роберта (и Германа) Грассмана к индуктивным доказательствам естественно возникает следующий вопрос. Известно, что в последующем развитии математики и логики процедура «совершенной» (полной математической) индукции стала, как правило, задаваться с помощью *аксиомы* (схемы аксиом) или (недоказуемого) принципа (правила); во всяком случае, такой подход получил распространение после формулировки Дж. Пеано системы аксиом арифметики натуральных чисел, названной его именем. Но Р. Грассман – так же как и Р. Дедекинд (см. его «Теорему о полной индукции» за номером 59 в труде 1888 г.) – правомерность такого рода процедуры *доказывали*. Нетрудно убедиться в том, что подход этот соответствует тому, что позже, уже в XX веке, получило название *финитной точки зрения*. Чтобы у читателя здесь не осталось сомнений, приведем формулировку упомянутой точки зрения в труде Д. Гильберта и П. Бернайса, где она именуется также «элементарной точкой зрения» (ср. грассмановское «элементарное доказательство для штифтов»!). Дабы сделать понятной приводимую ниже цитату из упомянутого труда, отметим, что в рамках излагаемого в нем «финитного способа рассуждений» целые положительные числа отождествляются с «цифрами» вида 1, 11, 111, и т.д., а равенство чисел сводится – как много раньше предложили поступать Грассманы! – к графическому равенству «цифр». Способ умозаключения по методу полной индукции трактуется в этом случае так.

Допустим, что мы рассматриваем некоторое высказывание, относящееся к произвольной цифре и имеющее элементарно наглядное содержание. Пусть это высказывание верно для цифры 1, и пусть известно также, что всякий раз, когда оно верно для какой-то цифры n, оно верно и для цифры n + 1. Тогда отсюда мы делаем вывод, что рассматриваемое высказывание верно для любой заданной цифры n.

Действительно, a строится, начиная с цифры 1, путем ряда последовательных присоединений этой цифры. Раз мы констатировали, что рассматриваемое высказывание верно для цифры 1 и что при каждом присоединении этой цифры оно, в силу сделанного предположения, оказывается верным и для вновь полученной цифры, то в момент завершения построения a мы придем к выводу о том, что это высказывание верно и для a.

Таким образом, мы имеем здесь дело не с *каким-либо самостоятельным принципом, а лишь с некоторым следствием, извлекаемым нами из того факта, что построение цифр производится определенным конкретным способом*[68].

Ясно, что это полностью соответствует подходу братьев Грассманов к основаниям математики. В «учении о величинах», правда, вместо «цифр», построенных из единственного знака 1, фигурируют «величины» (формулы), построенные из элементарных величин – «штифтов», а «определенный конкретный способ построения» заключается в последовательном связывании величин, которое в конечном счете сводится к последовательному связыванию элементарных величин, связыванию, производимому с помощью операции $\circ$ (или некоторых других бинарных операций, которые появляются в последующем развертывании теории); высказывания же, имеющие «элементарно наглядное содержание», представляют собой в теории Р. Грассмана высказывания о величинах, преимущественно в форме равенств. Поэтому-то оба положения, вводящие индуктивные доказательства (№№ 18, 19), которые при ином подходе (когда предварительно введена аксиома либо принцип индукции) *сами могли быть доказаны индуктивно,* основываются просто на принятом способе конструирования величин. Аналогично обстоит дело и с теоремой № 17. Ее, конечно, тоже можно доказать по индукции, но Р. Грассман этого не делает: он базирует доказательство на возможности обозрения любого конечного ряда величин $a_1, a_2, \ldots, a_n$ при произвольном целом положительном n.

[68] *Гильберт Д., Бернайс П.* Основания математики. Логические исчисления и формализация арифметики / Перев. с нем. Н.М. Нагорного. М.: Наука, 1979. С. 47 (курсив наш. – *Б.Б.*).

РЕКУРСИВНЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ОПЕРАЦИЙ В ТЕОРИИ ВЕЛИЧИН. СВОЙСТВА АССОЦИАТИВНОСТИ, КОММУТАТИВНОСТИ И ДИСТРИБУТИВНОСТИ. ТРИ УРОВНЯ «СВЯЗЕЙ»

Развертывание учения о величинах состоит в том, что произвольная бинарная операция сначала наделяется свойством ассоциативности, а потом коммутативности. Далее вводится дистрибутивность, почему появляется еще одна (даже две, в случае обобщенной дистрибутивности) бинарная операция. После этого операции конкретизируются, распределяясь по уровням, определяемым их «неравноправной» ролью в равенствах, выражающих соответствующие дистрибутивные законы. Только упомянув (этому посвящен очень краткий раздел 3) неассоциативную бинарную связь «присоединения» (Anreihung), когда «нельзя ни удалить скобку, ни изменить расположение величин» в составе целостности, Р. Грассман обращается к случаю, когда операция $\circ$ *ассоциативна*; она получает у него название «объединения» (Einigung). Вводится эта операция с помощью *рекурсивного определения* – сначала в словесной форме (№ 21), а потом (№ 22) в виде равенства $a \circ (b \circ e) = a \circ b \circ e$, называемого «основной формулой объединения»; поясняя механизм, каким в № 22 задается вычисление (как сказали бы теперь) целостности вида $a \circ (b \circ e)$, Р. Грассман, правда, делает это не в разделе 4, посвященном «объединению величин», а во «Введении в учение о формах» – формулирует «конечный пункт» рекурсии[69]: $a \circ (e_1 \circ e_2) = a \circ e_1 \circ e_2$ (мы будем обозначать его через № 22°). Рекурсивность задания операции объединения $\circ$ как ассоциативной становится ясной после различения – в соответствии с тем, как мы выше реконструировали рекурсивный характер грассмановской арифметики, – (бинарной) *операции объединения величин и операции связывания величины со штифтом*[70]; обозначив последнюю через $'$ (т.е. считая, что $a' \underset{Df}{=} a \circ e$, где e есть произвольная элементарная величина, и учитывая № 9, мы получаем в явном виде следующее рекурсивное определение произвольной бинарной ассоциативной операции:

[69] В «Системе знания» 1890 года (Bd. I, Hälfte 2: Die Denklehre, S. 16) соответствующее равенство приводится в основном тексте, а именно в набранном петитом пояснении смысла «основной формулы объединения».

[70] Вопрос о том, какой ее считать – бинарной или унарной, не является существенным.

(22°) $a \circ e = a'$; (22) $a \circ b'(a \circ b)'$. На базе этого определения индуктивно доказываются: теорема № 23, согласно которой результат объединения величин a и b, в которых элементарные величины связаны последовательно, есть целостность $a \circ b$, также представляющая собой результат последовательного связывания элементарных величин; закон ассоциативности (теорема № 22) $a \circ (b \circ c) = a \circ b \circ c$, доказательство которого было нами приведено в предыдущем разделе; теорема № 25, называемая в разделе 4 «законом объединения (скобочным законом)», которая позволяет любую целостность тождественно преобразовать в величину, представляющую собой результат последовательного связывания всех входящих в нее элементов; словами эту теорему Р. Грассман формулирует так: «В любой связи произвольных величин, для которой выполняется объединение, любую скобку можно произвольным образом удалить или ввести, и целостность данной связи будет величиной, в которой ее штифты, или элементы, связаны последовательно».

Доказательства теорем №№ 23 и 24 индуктивны для элементов, а теоремы № 25 – для величин. Последней в разделе 4 доказывается – путем простой ссылки на «основную формулу объединения» – теорема № 26), согласно которой множество всех величин, говоря по-современному, замкнуто относительно бинарной ассоциативной операции.

Далее, в разделе 5, бинарная операция $\circ$ наделяется свойством *коммутативности*. Связь величин, которая, помимо ассоциативности, обладает этим последним свойством – такую связь Р. Грассман называет перестановкой (Vertauschung), – задается равенством (№ 28), в котором фигурируют два произвольных (но различных) элемента: $e_1 \circ e_2 = e_2 \circ e_1$. Этой «основной формулы перестановки» достаточно для доказательства теоремы, согласно которой в любой целостности, образованной с помощью «перестановок», можно любым допустимым образом вводить либо удалять скобки, изменять их расположение и обменивать местами входящие в нее величины. Доказательство этой теоремы подразделяется Р. Грассманом на три части: 1) $a \circ e = e \circ a$, для любых a, e; 2) $a \circ b = b \circ a$, для любых a, b; и 3) «в случае многих величин (входящих в произвольную целостность. – *Б.Б.*) каждая из них может занять любое место». Части 1) и 2) доказываются индукцией для элементарных величин, а доказательство части 3) опирается на 2), т.е. обычную формулировку коммутативности, но проводится для *примера* – целостности, состоящей из четырех величин; впрочем, словесное рассуждение, сопровождающее это формульное доказательство, для части 3) производится в общем виде. Заключительная теорема раздела 5 (№ 30) аналогична теореме № 26 и устанавливает замкнутость множества величин относительно «перестановки».

Дальнейший шаг в развертывании теории величин – он совершается в разделе 6 первой части «Учения о величинах» 1872 г. – состоит в том, что вводится новая бинарная операция, а рассматривавшаяся ранее ассоциативная (но не коммутативная!) операция – «объединение» расщепляется на две. Изучение того, как эта новая операция – а если следовать непосредственно изложению Р. Грассмана, то даже *две* однотипные новые операции – вводится в рассматриваемой теории величин, приводит к *двум трудностям,* на которых мы ниже остановимся особо.

Новая операция получает у Р. Грассмана название *отношения*, результат же ее применения – наименование *изделия*. По определению (№ 31) устанавливается, что *изделие из двух элементов в свою очередь является штифтом*, элементом: множество элементарных величин замкнуто относительно операции «отношения»; можно сказать, что таким путем в рассмотрение вводится то, что естественно назвать *сложными штифтами*. Далее, во втором пункте определения № 31 устанавливается соотношение, которое имеется между операцией «отношения» и операциями «объединения». Эта часть определения проясняется в следующем пункте раздела 6, где оно предстает в виде:

32. $$(a \circ e)b = ab \odot eb,$$
$$a(b \circ e) = ab \odot ae.$$

Вместо того, чтобы объединять некоторую величину со штифтом, или элементом, [входящим в изделие], можно объединить изделие, состоящее из обеих величин, с изделием, состоящим, соответственно, из этого элемента и второй величины.

В равенствах № 32 – первое из них мы будем обозначать через 32a, а второе через 32b – пропуск знака (пропуск, вместо которого в дальнейшем иногда используется обычный знак умножения « · ») означает операцию «отношения», а сами эти формулы получают название «законов отношения» или «законов удаления скобки»; во второй части «Учения о величинах» 1872 года, а также в труде 1890 г. «Система знания» эта операция получает название умножения. «Отношение» предполагает *две* бинарные ассоциативные операции, т.е. два «объединения»; для обозначения одного из них применяется уже известный нам знак $\circ$, для другого же используется новый знак $\odot$; когда две величины связаны с помощью первой из этих ассоциативных операций, Р. Грассман условливается говорить, что соответствующие величины «первообъединены» (erstgeeint), а когда с помощью второй – операции $\odot$, – что они «второобъединены» (zweigeeint). Операция «отношения» трактуется Р. Грассманом как связь более высокого уровня, чем связь объединения; ее результат, т.е. «изделие», в скобки не заключается. На современном логико-алгебраическом языке это можно выразить, сказав, что «отношение» связывает величины более тесно, чем операция «объединения». Скобка, фигурирующая в формулах вида $(a \circ b)c$, получает в теории величин название *скобки для отношения*.

Пункт № 32 предваряется текстом, который весьма примечателен для изложения теории величин 1872 г.; с ним связано первое из затруднений, которые были упомянуты нами выше. Мы читаем у Р. Грассмана:

> Для обеих величин, подлежащих связыванию посредством отношения ⟨zu beziehenden⟩, могут действовать различные виды отношения и, соответственно, различные виды объединения. Сообразно этому для каждого из обоих отношений мы различаем два вида объединения и называем их, если они встречаются вместе ⟨bei⟩ с одним и тем же отношением, соответствующими (там же).

Из сказанного здесь как будто следует, что в теории величин предлагается различать два вида «отношения», т.е. две – в общем случае разные – операции, задаваемые равенствами № 32. Как это понимать? Поначалу напрашивается мысль, что одна из двух операций «отношения» вводится равенством № 32a, а другая – равенством № 32b, т.е. что мы имеем здесь дело, говоря языком современной алгебры, с *левым* и *правым* «отношениями». Однако это предположение приходится отбросить.

В самом деле. Рассмотрим следующий пример. Пусть $c \underset{Df}{=} e_1 \circ e_2 \circ e_3$, $d \underset{Df}{=} e_4 \circ e_5 \circ e_6$. Попытаемся вычислить «изделие» cd, понимая «отношение» как левую операцию (№ 32a). Положив $a \underset{Df}{=} e_1 \circ e_2$, в силу чего $c = a \circ e_3$, получаем: $cd = (a \circ e_3)(e_4 \circ e_5 \circ e_6) = a(e_4 \circ e_5 \circ e_6) \odot e_3(e_4 \circ e_5 \circ e_6)$. Но – и в этом заключается первая трудность – дальнейшее вычисление оказывается невозможным: для него отсутствует надлежащая вычислительная схема. Чтобы продолжить процесс раскрытия скобок – он представляет собой, как мы увидим ниже, рекурсивную процедуру, – необходимо использовать равенство № 32b, т.е. считать «объединение» уже правой операцией. Действительно, положив $b \underset{Df}{=} e_4 \circ e_5$, откуда $d = b \circ e_6$, имеем: $a(b \circ e_6) = ab \odot ae_6 = (e_1 \circ e_2)b \odot (e_1 \circ e_2)e_6$; поскольку $(e_1 \circ e_2)e_6 = e_1e_6 \odot e_2e_6$ ((согласно 32b), получаем: $a(b \circ e_6) = (e_1 \circ e_2)b \odot e_1e_6 \odot e_2e_6$. Для вычисления значения величины $a(b \circ e_6)$ приходится снова обращаться к равенству № 32b. Продолжая этот процесс, мы в конце концов получим: $cd = e_1e_4 \odot e_1e_5 \odot e_1e_6 \odot e_2e_4 \odot e_2e_5 \odot e_2e_6 \odot e_3e_4 \odot e_3e_5 \odot e_3e_6$. Итак, мы пришли к тому, что «отношение» приходится трактовать то в качестве левой, то в качестве правой операции, что нельзя понять иначе, как свидетельство того, что в равенствах (уравнениях) 32a и 32b подразумевается *одна и та же* операция. В последующем развертывании теории величин 1872 года эта трудность снимается тем, что когда (во второй части этого труда в «Логике») речь вместо «отношения» заходит об *умножении*, последнее фигурирует уже в единственном «экземпляре»: в трудах же 1890 года «Учение о мышлении» (составляющем вторую половину тома I «Системы знания») и «Логика» вообще нет упоминания двух операций типа умножения: «переплетение» с самого начала вводится как одна операция.

Прежде чем переходить ко *второй трудности*, остановимся на тех теоремах, которые в теории величин доказываются для «изделий». Назначение этих теорем – сведение произвольной целостности, построенной с помощью операций «объединения» и «отношения», к целостности, которая приведена, как сказали бы мы теперь, к *нормальной форме*, представляющей собой результат последовательного связывания элементарных величин с помощью ассоциативной операции; как мы видели выше, каждую целостность, образованную посредством применения единственной операции такого рода, можно привести к этой нормальной форме. В соответствии с этим Р. Грассман доказывает теорему (№ 33), согласно которой «изделие» *ae*, состоящее из одной величины, элементы которой связаны последовательно, и еще одной элементарной величины, в свою очередь является величиной, элементы которой связаны последовательно.

Доказательство для штифтов, или элементов, относительно *a*.

1. Данное предложение справедливо, если *a* содержит только один элемент (т.е. если *a* есть величина вида e_1e_2. – *Б.Б.*), ибо e_1e_2 есть некоторый элемент (в соответствии с 31.1).

2. Если это предложение справедливо для *a* (допущение), то оно справедливо и для величины $a \bigcirc e_1$, которая содержит одним элементом больше (заключение); ибо имеет силу $(a \bigcirc e_1)e = ae \odot e_1e$ (в соответствии с № 32). Но *ae* есть величина, элементы которой связаны последовательно согласно

допущению, $e_1 \cdot e$ есть некоторая элементарная величина (в соответствии с 31.1), связанная последовательно, стало быть, $ae \odot e_1e$ есть тоже некоторая величина, элементы которой связаны последовательно.

3. Стало быть, в силу № 19 данное предложение общезначимо.

Таким же путем выводится, что eb есть некоторая величина, элементы которой связаны последовательно.

Далее, индукцией для элементов доказывается (№ 34), что «изделие» ab, состоящее из двух величин, элементы которых связаны последовательно, в свою очередь есть некоторая величина, элементарные величины которой связаны последовательно, и для такого рода «изделия» – это Р. Грассман оговаривает особо – выполняются все законы объединения. За этим следует важная теорема № 35: $(a \circ b)c = ac \odot bc$; $c(a \circ b) = ca \odot cb$, вводящая то, что можно назвать *обобщенной дистрибутивностью* операции «отношения» к операции «объединения»; обобщенность состоит в различии операций объединения $\circ$ и $\odot$, фигурирующих в левой и правой частях каждого из равенств. Операцию «отношения», для которой действует дистрибутивность, предполагающая как «перво-», так и «второобъединение», Р. Грассман называет «двойным отношением»; если операция объединения в левой и правой частях равенств (уравнений) 32a и 32b одинакова, он использует название «простое отношение». Для последней «закон отношения», т.е. дистрибутивности, приобретает обычный вид: $(a \circ b)c = ac \circ bc$; $c(a \circ b) = ca \circ cb$. Стоит отметить, что при индуктивном – для элементарных величин – доказательстве равенств, фигурирующих в теореме 32, используется ассоциативность операции $\odot$. Затем Р. Грассман доказывает теорему (№ 36) о дистрибутивности операции «отношения» относительно целостности, образованной путем последовательного «объединения» сколь угодно многих величин, что записывается им в виде: $[G_{1,n} \circ a_\alpha]b = G_{1,n} \odot a_\alpha b$; $b[G_{1,n} \circ a_\alpha] = G_{1,n} \odot ba_\alpha$; эти равенства имеют, соответственно, смысл: $(a_1 \circ a_2 \circ \ldots \circ a_n)b = a_1b \odot a_2b \odot \ldots a_nb$ и $b(a_1 \circ a_2 \circ \ldots \circ a_n) = ba_1 \odot ba_2 \odot \ldots \odot ba_n$. Наконец, следует важная теорема

37. В любой связи величин, для которой выполняется отношение, вместо штифтов, или элементов, можно подставлять любые построенные из них величины и таким способом получать новые величины; для этих величин тоже будут справедливы все законы отношения.

Доказательство. Все законы отношения выводимы из основной формулы объединения $a \bigcirc (b \bigcirc e) = a \bigcirc b \bigcirc e$ и аналогичных формул для отношения $(a \bigcirc e)c = ac \odot ec$ и $a(b \bigcirc e) = ab \odot ae$, но эти формулы в соответствии с №№ 24 и 35 справедливы и для произвольных величин (а не только для элементов. – *Б.Б.*), стало быть, и т.д.

Из этой теоремы вытекает, что множество величин замкнуто относительно операции отношения. Однако в теории величин 1872 г. это порождает новую трудность. Дело в том, что поскольку изделие, состоящее из элементов, есть в свою очередь элемент, изделие из величин есть в свою очередь величина, а объединение величин (также порождающее величины) возможно не только с помощью операции $\circ$, но и с помощью операции $\odot$, которая подобно операции $\circ$ обладает свойством ассоциативности, мы оказываемся перед фактом следующего *расширения понятий элемента и величины* (формулы). В сформулированное нами определение элемента, или штифта, добавляется пункт: (3) если e_i и e_j суть произвольные элементы (штифты), то e_ie_j тоже есть некий (сложный) штифт (в тексте Р. Грассмана этому пункту соответствует запись $e_1e_2 = e$), а в определение *величины* (формулы), в пункт (3) вводится указание на то, что если a и b суть произвольные величины, то $(a) \odot (b)$ и $(a)(b)$ тоже суть некоторые величины (с распространением на получаемые таким путем целостности того соглашения, которое в пункте (3) было помещено в скобках).

Это расширение понятия величины (формулы) допускает рассмотрение в качестве величин таких образований, в которых встречаются знаки $\circ$, и $\odot$. Но как тогда понимать выражения вида $(a \circ b) \odot d$ или $(a \odot b) \circ (d \odot c \odot f)$? И как определять значение образований вида $(a \odot b)c$ и $a(b \odot c)$, являющихся величинами в силу № 37? Эти вопросы в труде «Учение о протяженностях» 1872 г. не поднимаются.

Прежде чем показать, как Р. Грассман обходит эту трудность, выясним вид рекурсии, подразумеваемой в № 32. Обозначив бинарную операцию «отношения» – подлежащую определению – через f, операцию «объединения» $\odot$ через g и считая, что рекурсия ведется по двум переменным (двойная рекурсия), мы получаем возможность переписать 32a и 32b в виде: (1) $f(a', b) = g(f(a, b), f(e_i, b))$ и (2) $f(a, b') = g(f(a, b), f(a, e_i))$, где $a' \underset{Df}{=} a \circ e_1$, $b' \underset{Df}{=} b \circ e_j$, а g есть заданная операция. Если b есть произвольный элемент e, то из (1) можно извлечь:

$$f(a', e) = g(f(a, e), f(e_i, e)). \tag{I}$$

Если величина b не есть элемент, то она имеет вид: $b' \underset{Df}{=} c \circ e_j = c'$.

Тогда (1) переходит в равенство (3) $f(a', c') = g(f(a, c'), f(e_i, c'))$. Величина $f(a, c')$ может быть вычислена, исходя из (2), если вместо b взять c: (4) $f(a, c') = g(f(a, c), f(a, e_i))$. Подставив правую часть равенства (4) в равенство (3) вместо фигурирующей в нем величины $f(a, c')$, получим: (6) $f(a', c') = g(g(a, c), f(a, e_j)), f(e_j, c'))$. Величина $f(e_i, c')$ находится из (2):

$$f(e_i, c') = g(f(e_i, c), f(e_i, e_j)). \qquad \text{(II)}$$

Подставляя найденное значение величины $f(e_i, c')$ в правую часть равенства (6), получаем:

$$f(a', c') = g(g(a, c), f(a, e_j)), g(f(e_i, c), f(e_i, e_j))) \qquad \text{(III)}$$

для любых величин a и c. Наконец, очевидно, что для произвольных элементов e_i и e_j:

$$f(e_i, e_j) = e_ie_j, \qquad \text{(IV)}$$

где e_ie_j есть штифт, т.е. некоторый элемент e_i.

Равенства (I)–(IV) задают рекурсивную процедуру вычисления значения произвольного изделия ab, сводящую последнее к виду многочлена, в котором роль сложения играет операция $\odot$, а умножения – операция «отношения», иначе говоря, к виду $e_1 \odot e_2 \odot \ldots \odot e_n$, где элемент e_r (при $r =$ 1, 2,..., n) могут быть сложными, т.е. представлять собой изделия, построенные из элементарных величин[71]. Предоставляем читателю убедиться в этом на примере, который был рассмотрен нами выше; обращаем внимание на то, что при вычислении, на основе равенств (точнее, схем равенств) (I)–(IV), изделия cd приходится использовать *все* эти равенства.

В изделии, фигурировавшем в примере, рассмотренном нами выше, мы имели дело с величинами, представлявшими собой целостности, построенные из элементов путем последовательного связывания с помощью операции $\circ$. Однако это не ограничивает общности рассмотрений. Показанная в теории величин возможность приведения любой величины, построенной из элементов и вообще произвольных величин, к (равной) величине, представляющей собой целостность, образованную путем последовательного связывания с помощью операции $\circ$, приводит – и об этом, собственно, говорят все теоремы раздела 6, обоснованные на основе № 32 и позволяющие раскрывать скобки не только «для объединения», но и «для отношения», – к заключению, что совершаемая

---

[71] Р. Грассман для задания рекурсии использует (№ 32) непосредственно равенства (уравнения) (1) и (2), «прочитываемые», каждое, для *произвольных* величин a и b произвольного элемента e, что маскирует рекурсивный характер данного определения. Вопрос запутывается тем, что, как мы видели, перед этим он говорит о *двух* операциях «отношения».

на базе № 32 (и соответственно, на базе равенств (I)–(IV)) рекурсия всегда сводит определяемое изделие к многочлену указанного выше вида. При этом, однако, предполагается, что в изделии ab величины a и b *не содержат* операции $\odot$, ибо в противном случае при раскрытии скобок обязательно возникнет ситуация, когда надо будет вычислять изделия вида $(c \odot d)x$ или $x(c \odot d)$. Но вопрос, как производить подобное вычисление, как вообще осуществлять рекурсию, когда в величинах a, b содержатся *две* ассоциативные бинарные операции, в теории величин не обсуждается. Р. Грассман просто снимает его тем, что начиная с теоремы № 39 – ей предшествует определение (№ 38) упоминавшихся уже нами понятий *простого* и *двойного* отношений – операции $\circ$ и $\odot$ отождествляются. В результате доказываемый вслед за тем «закон простого отношения» (№ 39) $(G_{1,n}a_{\mathfrak{a}})(G_{1,}b_{\mathfrak{b}}) = G_{1,n\cdot 1,m}a_{\mathfrak{a}}b_{\mathfrak{b}}$, где индексы $\mathfrak{a}$ и $\mathfrak{b}$ пробегают соответственно, наборы чисел от 1 до n и от 1 до m, а также аналогичный закон (№ 40) для произвольного числа членов изделия, стоящих в левой части соответствующего равенства (эта теорема доказывается для частного случая трех целостностей $G_{1,n}$, $G_{1,m}$, $G_{1,p}$) позволяет путем заложенной в № 32 рекурсии сводить любую величину к многочлену, построенному из элементарных величин, связанных с помощью операции $\circ$. Тогда вопрос о равенстве двух произвольных величин a и b, в которых имеются только две операции – «объединения» и «отношения», оказывается сводимым к графическому равенству многочленов упомянутого вида, равных соответственно величинам a и b.

Как же тогда следует понимать теоремы №№ 33–37? Считать, что их надлежит переписать, отождествив $\circ$ и $\odot$? Такое решение было принято Р. Грассманом при изложении переработанного и расширенного варианта его теории величин в труде 1890 г., где операция «отношения» (называемая там с самого начала умножением) единственна и ее определение имеет вид: $a(b + e) = ab + ae$; $(a + e)b = ab + eb$[72]. Иной путь: расширение определения операции «отношения» путем дополнения равенств № 32 пунктами 32′a и 32′b, получающимися из равенств 32a и 32b посредством обмена местами знаков $\circ$ и $\odot$, требует некоторого *усиления* системы этих равенств, поскольку уже вычисление значения «изделия» вида $(e_i \circ e_j)(e_k \odot e_l)$, где e_i, e_j, e_k, e_l суть произвольные элементы, оказывается зависящим от порядка применения пунктов 32a и 32′b и потому неоднозначным; такое усиление может быть достигнуто заменой в равенствах 32b и 32′b произвольной величины a произ-

[72] *Grassmann R.* Das Gebäude des Wissens. Bd. 1, Halfte 2: die Denklehre. S. XVI, 47.

вольным элементом *e* (заметим, что подобная замена, проведенная только для системы равенств 32a и 32b, не нарушает рекурсивную процедуру определения «отношения», проанализированную нами выше, хотя и меняет несколько ее вид). Поскольку Р. Грассман не вступил на этот путь, мы позволим себе не останавливаться здесь подробнее на этом вопросе.

Коротко о второй части «Учения о величинах» 1872 г. – разделах 7–9. Здесь происходит конкретизация операций, введенных в первой части, и расположение возникающих в результате этого «связей» по трем уровням. Операция, обладающая только свойством *ассоциативности*, получает здесь название *сложения* (в широком смысле), или – в специфически грассмановской терминологии – «прибавления» (Fügung), ее результат – наименование *суммы*, а для ее обозначения используется обычный знак «плюс»; введение для сложения свойства *коммутативности* – так, как это было описано нами выше для «объединения», – дает сложение в *узком* смысле (добавление», Zufügung). Вводится величина, называемая *нулем* и характеризующаяся (№ 43) тем, что $a + 0 = a$, $0 + a = a$, для любого a. Сложение есть связь «низшего уровня», и штифты (элементы), величины, строящиеся из элементов путем последовательного прибавления, а также нуль называются *штифтовыми (элементарными) величинами* (Stiftgrösen, Elementargösen); это не что иное, как многочлены.

Операция, обладающая свойствами «простого отношения», называется *умножением в широком* смысле (или «переплетением», Webung): она считается относящейся ко второму уровню, и для нее вводится как обычная мультипликативная, так и специфически грассмановская терминология: если умножение ассоциативно, оно называется «вплетением», или умножением в *среднем* смысле, если же оно, кроме того, и коммутативно, то оно именуется «сплетением», или умножением в *узком* смысле. Для операции умножения в широком смысле доказываются теоремы, в которых фигурирует величина, называемая единицей (eins), и «закон переплетения (умножения в широком смысле)». Единица вводится как такая величина, которая, будучи «переплетена» с любым элементом *e*, не меняет значения последнего: $e \cdot 1 = e$, $1 \cdot e = e$, $1 \cdot 1 = 1$; на этой основе индуктивно обосновывается теорема (№ 51), согласно которой $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$. В теореме № 52 доказывается – в качестве упомянутого «закона переплетения» – приводимость любой формулы, содержащей операций сложения и умножения, к виду элементарной величины, а в следующей за ней теореме обосновывается, что $0 \cdot a = 0$ и $a \cdot 0 = 0$. Затем для операции умножения вводится – определение № 55 – свойство ассоциативности для элементов, и тогда умножение получает название «умножения в среднем смысле». Определение этого рода умножения $e_1(e_2e_3) = e_1e_2e_3$ можно рассматривать как его рекурсивное задание, в предположении, что запись $e_1e_2e_3$ читается по ассоциативности влево и что произведение двух произвольных элементов в свою очередь есть некоторый элемент. На основе этого определения строятся индуктивные доказательства (№№ 56, 57) теорем $a(e_1e_2) = ae_1e_2$ и $a(bc) = abc$ (последняя выражает свойство ассоциативности умножения) и «закона вплетения» (№ 58), утверждающего приводимость любой величины, в которой последней операцией является умножение в среднем смысле, к виду многочлена (штифтовой величине).

Связью наивысшего – третьего – уровня является в теории величин возведение в степень, или «возвышение» (Höhung). Эта связь также определяется рекурсивно, с помощью равенства (№ 62) $a^{b+e} = a^b \cdot a^e$, в предположении – в качестве «конечного пункта» рекурсии, что даны результаты возведения произвольных величин в «штучную степень»; затем следует доказательство того, что $a^1 = a$, $1^1 = 1$ и $a^0 = 1$, а также того, что $a^{b+c} = a^b \cdot a^c$ (и аналогичная теорема для любого числа слагаемых в показателе степени). Неясность смысла величины вида a^e, имеющая при этом место, отчасти снимается тем, что Р. Грассман предусматривает случай, когда в показателе степени в качестве элемента фигурирует единица. Грассмановская операция «возвышения» приобретает интерес в связи с последующим разветвлением теории величин. Однако рассмотрение этого вопроса не входит в нашу задачу.

КОНСТРУКТИВИСТСКИЙ ПАФОС КОНЦЕПЦИИ РОБЕРТА ГРАССМАНА

Итак, используемые в теории величин индуктивные доказательства и рекурсивные схемы, говоря словами Д. Гильберта и П. Бернайса, имеют смысл как «всего лишь соглашения о некотором способе сокращенного описания определенных процессов построения»[73], посредством которых одна или несколько заданных величин перерабатываются в некоторую новую величину, мыслимую, по существу, как некоторое слово в алфавите элемен-

---

[73] *Гильберт Д., Бернайс П.* Основания математики. Логические исчисления и формализация арифметики. С. 52.

тарных величин и знаков операций $\circ$ и $\odot$, при скобке в качестве вспомогательного знака. Примечательно – и достойно удивления, – что фундаментальность подобного подхода к основаниям математического знания, а также его новизна были вполне осознаваемы Робертом Грассманом, который выступал, можно сказать, воинствующим сторонником индуктивно-рекурсивного построения математики и трудился над его осуществлением. «Поступательному» (индуктивному) характеру доказательств в учении о величинах он придавал принципиальное значение, причем не только в научном, но и в педагогическом плане. Не случайно, поэтому, что во «Введение в учение о величинах», помещенном в книге 1872 г., Р. Грассман включил полемику (он затем перенес ее и в труд 1890 г. «Система знания», во вторую его часть – «Учение о мышлении») с предполагаемыми противниками его подхода, который он характеризовал как базирующийся на «поступательной, или индуктивной, форме доказательства». Здесь им обосновывается тезис, согласно которому только индуктивные (рекурсивные, как мы теперь можем сказать) построения величин из элементов и индуктивные же доказательства их свойств являются «строго научными». Обращаясь к гипотетическим оппонентам, Р. Грассман утверждает, что индуктивная форма доказательств кажется утомительной и непрактичной только для тех, кто привык к ненаучному пустословию; что нельзя – и в науке, и в преподавании – начинать сразу со сложного: сначала должны быть введены элементарные величины и из них с помощью операций (связывания, соединения) должен совершаться переход к построенным из них конструкциям; «поступательное (индуктивное) продвижение вперед – полагание штифтов, или элементов, и последовательное связывание элементов в величины – является необходимым, только оно является правильным, только оно является основополагающим.

Доказательства, основанные на свойствах «связи равенства», и «поступательные» доказательства, по Р. Грассману, есть единственно то, что относится к общему учению о формах: непрямые, или косвенные, доказательства, указывает он, появляются лишь в «учении о понятиях»; подобные доказательства часто используются в разветвлениях теории, форм и «в приложениях учения о формах, особенно в учении о пространстве».

В связи с типами доказательств, применяющихся в общем учении о величинах, – тождественными преобразованиями и «поступательными» выводами, а также рекурсивными процедурами – Р. Грассман высказывает следующий взгляд на *определения*. Он пользуется примером «связи объединения». Если, пишет он, ввести объединение как такую связь величин, при которой каждая скобка может быть как угодно поставлена или удалена (т.е., переходя на современный язык, если по определению объявить объединение ассоциативной операцией), то получится слишком широкое – и потому «ненаучное» – определение, поскольку тогда скрытым останется то, что данное свойство можно вывести из гораздо более узкого определения; при слишком широком определении невозможно установление того, каково же то предположение, которое *необходимо* для того, чтобы выполнялся «закон объединения» в целом. Согласно Р. Грассману. «хорошее определение не должно устанавливать ничего, кроме допущения, совершенно необходимого для дела». Этому требованию и удовлетворяют последовательное, по шагам связывание элементарных величин, предполагающее возможность удаления скобки: $(a \circ e_1) \circ e_2 = a \circ e_1 \circ e_2$, и определение $a \circ (b \circ c) = a \circ b \circ c$ (при подразумеваемом случае $a \circ (e_1 \circ e_2) = a \circ e_1 \circ e_2$) – средства, достаточные для того, чтобы в произвольной величине, содержащей только знаки объединения $\circ$, удалить все скобки.

Поскольку, как мы видели, конечной целью преобразований величин является приведение их к «штифтовому» виду, позволяющему устанавливать их равенство или неравенство, – а такое преобразование предполагает раскрытие скобок – свойство *ассоциативности* бинарной операции является для Р. Грассмана естественно *предшествующим* свойству *коммутативности*. В этом можно видеть некое предвосхищение подхода современной алгебры, при котором ассоциативность как свойство определенной операции обычно рассматривается прежде, чем свойство коммутативности (ср. переход от ассоциативных исчислений и полугрупп к группам и от них к абелевым группам, о чем мы говорили выше).

В теории величин, как она изложена в труде 1872 г., обращает на себя внимание *отсутствие обратных операций*. В «Предисловии» к учению о величинах, содержащемся в труде 1890 г. «Учение о мышлении», – труде, который, как мы уже говорили, воплощает расширенный и обогащенный вариант теории форм, представленной в книге 1872 г., – Р. Грассман следующим образом объясняет это обстоятельство. Тогда, в 1872 г., он считал, что операции, обратные прямым операциям теории величин, – эти обратные операции он называет теперь «разъединением» (Trennung) – имеют смысл в математике, но не имеют смысла в логических науках; но дальнейшая разработка теории привела его к иному заключению. Это изменение позиции, с которым

Р. Грассман, по-видимому как раз и связывает снятие «несовершенства» теории величин 1872 г., описывается им следующим образом:

> В учении о формах, или математике, для каждого [способа] связи имеется и соответствующее разъединение, для сложения – вычитание, для умножения – деление, для возведения в степень – извлечение корня и логарифмирование. Все эти [способы] разъединения в издании 1872 г. были опущены автором, так как он считал, что они имеют силу только для учения о формах, но не для логических наук ⟨...⟩ В предлагаемом новом издании 1890 года автор рассматривает и эти [способы] разъединения, так как в учении о величинах как раз и должны быть разработаны все те [способы] соединения, которые возможны для человеческого ума; в учении о величинах, стало быть, должны быть рассмотрены также способы разъединения, показана область их действия и пределы. Уже введение этих способов разъединения придает учению о величинах существенно более широкий характер и обогащает его теоремами. Поэтому в новом издании «Учения о величинах», в котором разрабатываются виды и роды связей, а также три их уровня, имеется 270 теорем, что более чем в три раза превышает их число в старом издании 1872 г.

Не вдаваясь в детали, заметим, что обратные операции теории величин, как и прямые, позволяют осуществлять в ней соответствующие рекурсивные процедуры; они определяются в терминах соответствующих прямых контекстуально – с помощью равенств, делающих возможным эффективное вычисление их результатов. Так, в предположении однозначности ассоциативной операции обратная ей операция, обозначаемая (как это делал еще Г. Грассман в труде 1844 г.) знаком $\cup$, задается равенствами[74]: $a = a \circ b \cup b$ и $a = a \cup b \circ b$.

Эффективный характер грассмановской общей теории величин очевиден. Задаются исходные, не разделяемые на части величины – элементарные, представляемые буквой e или той же буквой с положительными целочисленными индексами; при этом, как явствует из «разветвлений» учения о величинах, на которых мы коротко остановимся ниже, элементарные величины могут образовывать конечный набор (конечный алфавит) и даже исчерпываться, как в арифметике неименованных целых чисел, двумя элементами – положительной и отрицательной «единичностями», либо образовывать (благодаря упомянутой индексации) потенциально бесконечное множество; индуктивно определяется понятие величины (формулы); рекурсивно задаются бинарные операции над ними – «соединения», «связи», с помощью которых в конеч-

[74] Скобки, отсутствующие в правых частях приводимых нами равенств, мыслятся расставленными по ассоциативности влево.

ном счете строятся все величины; доказательства носят индуктивный характер либо опираются на свойства отношения равенства и на использование элементарных актов обобщения. Таковы бесспорные свидетельства конструктивности грассмановской концепции. Тут, однако, возникает следующий вопрос.

Ныне мы знаем, что конструктивный подход, оперирующий описанными выше средствами, недостаточен для представления арифметики действительных чисел и ее геометрических аналогов. Как же поступает Р. Грассман? Чтобы не нарушать своей финитной установки (о которой мы говорили в предыдущем разделе и к которой вернемся в следующем), он в арифметике и «учении о протяженностях» (образующих третью и четвертую «ветви» теории величин) старается, по-видимому, не рассматривать, так сказать, существенно бесконечностных случаев. Тем не менее ему это не удается, и грассмановский «протоконструктивизм», начиная с некоторых пунктов, явно буксует. Ниже мы ограничимся тем, что покажем, с какой трудностью финитная установка Р. Грассмана сталкивается в *логике*. Но предварительно напомним читателю грассмановский принцип ветвления его теории величин.

Не будем касаться деталей эволюции взглядов автора этой теории на характер – математический или логический – тех наук, которые возникают в результате упомянутого ветвления. Место идей Р. Грассмана на этот счет в современном видении проблемы мы укажем в заключительной части. Здесь лишь заметим, что в книгах 1872 г. все четыре ветви – логика, учение о соединениях, теория чисел и учение о протяженностях – считаются относящимися к математике как «общему учению о формах», а в «учении о мышлении» 1890 г. первые две причисляются к «стволу» *логических наук*, остальные же – к «стволу» наук математических, причем оба названных «ствола» рассматриваются – вместе с общей частью теории величин – как то, что Р. Грассман, начиная с трудов 1875 г., именует «учением о мышлении».

«ВЕТВЛЕНИЕ» ТЕОРИИ ФОРМ. ГРАССМАНОВСКОЕ «УЧЕНИЕ О ПОНЯТИЯХ»

В первом труде 1872 г. разветвление теории величин производится следующим образом. В качестве основания выступает вопрос о том, чтó собой представляет результат соединения двух одинаковых элементов – совпадает ли он с каждым из них или от них отличен, т.е., говоря современным языком, вопрос об идемпотентности произвольной бинарной операции $\circ$, применяемой к произвольному элементу e (равна или нет элементарной величине e величина $e \circ e$): «если имеет место первое, то целостность, состоящая из соединения сколь угодно многих e, есть то же самое e; если имеет место второе, то соединение равных e постоянно порождает все новые и новые величины». Первый случай, по Р. Грассману, соответствует связи *представлений* в мышлении, где два одинаковых представления или понятия, сливаясь вместе, образуют представление, совпадающее с исходным, почему соединение, которое обладает свойством такой, как можно выразиться, «штифтовой идемпотентности», получает название *внутренней* связи – в отличие от связи *внешней*, соответствующей соединению вещей во внешнем мире, где две одинаковые вещи, соединяясь вместе, никогда не составляют вещь, занимающую в пространстве место того же размера, что и одна из них. Внутреннее и внешнее соединения могут выступать и как суммирование, и как умножение (переплетение), что дает четыре варианта. В двух из них, согласно Р. Грассману, мы имеем дело с «представлениями в нашей голове, со связью представлений или понятий», в двух же других соответствующие операции «учения о мышлении» касаются «исключительно внешнего мира». Так получаются операции внутреннего и внешнего сложения, а также внутреннего и внешнего умножения, отличительные свойства которых задаются соответственно равенствами[75] (1) $e + e = e$, (2) $e + e \neq e$, (3) $ee = e$, (4) $ee \neq e$, определяющими четыре ветви теории величин. Равенства (1) и (3) являются характеристическими для *учения о понятиях*, или *логики*, равенства (1) и (4) – для *учения о соединениях*, или *комбинаторики*, равенства (2) и (3) – для *учения о числах*, или *арифметики*, а равенства (2) и (4) – для «учения о внешнем», или *учения о протяженностях*. Как мы уже говорили, каждому из этих «учений» в серии изданий 1872 г. посвящена отдельная книга.

Эта классификация Р. Грассмана, достаточно искусственна, но без сомнения оригинальна. Здесь налицо определенная трансформация описанного в труде Германа Грассмана 1844 г. разделения «форм» на непрерывные и дискретные, интенсивные и экстенсивные величины. В самом деле, слова Г. Грассмана о том, что «число есть объединение того, что полагаемо как одинаковое», а комбинация – «объединение того, что полагаемо как различное», становятся понятными, если учесть, что в арифметике положи-

[75] Вместо грассмановского знака $\gtrless$ мы используем принятый ныне знак $\neq$.

тельных целых неименованных чисел в качестве единственного элемента фигурирует единица, вместо которой можно использовать – это означает переход к именованным числам – любой элемент, ибо, поскольку в учении о числах имеет место равенство $1 \cdot e = e$ для любого элемента e, мы получаем: $e + e + ... + e = 1 \cdot e + + 1 \cdot e + ... + 1 \cdot e = (1 + 1 + ... + 1)e$; но тогда $e + e + ... + e$ превращается в именованное число, в котором $1 + 1 + ... + 1$ есть «чистое», т.е. неименованное число, а e есть его имя[76]. Суммирование единиц и одинаковых, отличных от единицы, элементарных величин – это и есть «полагание одинакового», порождающее числа. По иному, нежели в арифметике, обстоит дело в «учении о протяженностях»: последнее определяется Р. Грассманом как «ветвь математики, в которой складывается много различных единичностей». Заметим, что классификация «ветвей» математики и логики, предложенная младшим братом, представляет собой существенное видоизменение грассмановской позиции по данному вопросу.

Обратимся теперь к *логике*. Из характеристических для нее равенств (1) и (3), показывает Р. Грассман, следует идемпотентность сложения и умножения любых величин; величинами в логике являются *понятия*, и названные операции истолковываются, говоря современным языком, как соответственно объединение и пересечение их объемов (т.е. классов). Оставляя пока в стороне грассмановскую концепцию логических наук, а освещение проблемы взаимоотношения логики и математики отодвигая до следующего раздела Послесловия, сосредоточим внимание на поставленном выше вопросе о проведении Р. Грассманом в данной «ветви» теории величин финитно-конструктивистской установки. Согласно определению Р. Грассмана, объем понятия есть сумма его элементов; в соответствии с этим устанавливается, что сумма двух понятий есть сумма всех различных элементов, содержащихся в обоих понятиях, и что произведение двух понятий есть сумма всех элементов, которые являются общими для обоих понятий. Но тогда, поскольку для понятий в логической теории Р. Грассмана из определения отношения *отрицания* одного понятия другим следует то, что обычно называют *законом исключенного третьего*, в данном случае в формулировке $a + a' = T$ (для любого a), где a' есть отрицание понятия a, а T – т.е. «всеобщность» (All), или

[76] Заметим, что вместо $e + e + ... + e$ Р. Грассман пишет $e + e + e + ...$ (и соответственно представляет выражения, содержащие вместо e единицу), однако при этом очевидным образом подразумевается, что речь идет о *конечных* выражениях. Поэтому мы изменили способ записи.

«тотальность» (Totalität), – представляет собой «сумму всех штифтов, или элементов», получается, что либо объемы всех понятий (и, значит, «тотальности», *T*) должны быть конечны, либо – в противном случае – закон исключенного третьего без каких-либо ограничений оказывается распространенным на бесконечные классы (совокупности). Первое неприемлемо потому, что закрывает путь каким-либо существенным применениям логики в математике, поскольку последняя «переполнена» понятиями с бесконечными объемами. Второе же объективно означает выход за пределы конструктивистской позиции, тем более что бесконечные объемы понятий мыслятся им в виде *бесконечных сумм* элементов – сумм, какого-либо эффективного способа построения которых логическая концепция Р. Грассмана не предусматривает.

Р. Грассман, по-видимому, не заметил всей «деликатности» описанной ситуации. Владевший им конструктивистский пафос был столь силен, что взор создателя теории величин, высвечивая такой ведущий аспект финитного подхода, как индуктивно-рекурсивная методология, не проникал в тень, где таились глубокие трудности последовательного проведения конструктивистской установки – трудности, которые были вряд ли преодолимы для логики, математики и методологии науки XIX века.

Характеристическая для подхода Р. Грассмана в логике конструктивистская установка сочеталась с сохранением им законов *классической* логики, включая закон исключенного третьего. Логика при этом понималась в традициях немецкой классической философии XVIII–XIX вв.: как теория понятий (угол зрения, под которым смотрели на логику также Э. Шрёдер и Г. Фреге). Нетрудно видеть, что сохранить сочетание «логической классики» с логическим конструктивизмом во времена Грассманов можно было только одним способом – рассматривать лишь понятия конечного объема (т.е. конечные множества, конечные классы). В этом состоит объяснение того, почему Р. Грассман трактует объемы понятий, по сути дела, как конечные суммы «штифтов».

Итак, покажем, что учение о понятиях Р. Грассмана было *теорией классов конечного объема*, и это – вместе с теорией форм – определяло ее индуктивно-рекурсивный характер; что, используя терминологию Д. Гильберта и В. Аккермана, логика Р. Грассмана представляла собой *комбинированное исчисление* – классов и высказываний; что по своему логическому содержанию она не выходила за рамки традиционной силлогистики, хотя и (консервативно) расширяла ее за счет введения *отрицательных* терминов; и что *главная* проблема алгебры логики XIX столетия – разработка методов решения *логических уравнений,* впервые поставленная Дж. Булем, – не была признана Р. Грассманом таковой: как только он с ней ознакомился, а произошло это уже *после* публикации «Логики» 1872 года, проблема эта была отнесена им не к логике, а к математике[77].

Обратимся к теореме, содержащейся в № 5 «Логики» 1872 г. Приводимые в ней доказательства *идемпотентности* операций объединения и пересечения классов проходят *только* при условии их конечности: объемы понятий рассматриваются как *конечные суммы* вообще говоря попарно различных элементарных величин. То же самое можно сказать и о теореме, фигурирующей в № 7. Но ведь именно эти теоремы определяют, по Грассману, специфику логики! Ибо *все* представители алгебры логики XIX в. вводили эти законы, характеристические для логической науки, как *недоказуемые постулаты.*

Логическое учение Р. Грассмана представляло собой, теорию классов, в которой весьма «экономно» использовались средства пропозициональной теории – в словесной либо знаковой форме. Автор оперирует словами «*и*» и «*или*» (ср. № 14, где соответствующим образом поясняется смысл знака $\leq$), выписывает знаки конъюнкции (+) и эквиваленции ($\doteq$), пользуется переходами от оснований к следствиям (ср. № 16). Все это освещено в Комментариях. Здесь стоит добавить лишь, что в процессе доказательств формул, содержащих операции конъюнкции и эквиваленции, используются – помимо, разумеется, тождественных преобразований – условные умозаключения. Что касается отрицаний, то они выступают как дополнения к классам, и вся теория образования суждений и умозаключений, в которой, естественно, фигурируют и отрицательные высказывания, строится с помощью также и отрицаний *понятий.* Только в «Логике» 1890 г. Р. Грассман отчасти изменяет этой манере, вводя нечто подобное отрицаниям *суждений*: отрицание общеутвердительного суждения «Все a суть u» передается как $0a < u$ (где $<$ понимается как $\leq$), а отрицание частноутвердительного суждения «Некоторые a не суть u» – как $a \leqslant u$ (теоремы № 170 и 171). «Нормальные формы» (как сказали бы мы теперь) рассматриваемых им суждений не содержат квантификации предиката. Квантификация *предиката* как таковая появляется, когда обосновывается равносильность ($\doteq$) некоторых формул суждений, например, $xa < u$ и $xu < a$, где «умножение» оз-

[77] Заметим, что и Буль считал эту проблему – и приемы, разработанные им для ее решения, – математическими.

начает пересечение классов, знак $<$ понимается как $\leq$, то есть включение класса в класс, а x есть «неопределенный указатель, или артикль». В ходе упомянутого обоснования появляются формулы $xa = yu$ и $yu = xa$, предикаты которых ограничены «неопределенными указателями». Используется квантификация и в теории умозаключений (см. № 67).

Под «логикой» Р. и Г. Грассманы разумели прежде всего ассерторическую силлогистику, решительно отвергая силлогистику модальную как не дающую, по их мнению, ничего нового. Вместе с тем, стремясь наиболее полно описать формы суждений и умозаключений, которыми пользуется человеческое мышление, они «расширили» силлогистику за счет введения *отрицательных терминов*. При этом ими четко осознавалось, что с теоретической точки зрения подобное «расширение» не дает ничего нового; это прямо доказано в теореме № 63. Грассмановская силлогистическая теория, гораздо более обильная по числу формул, нежели традиционная ассерторическая, тем не менее по своему логическому содержанию не богаче «форм старой логики»: все, что выразимо и верно в традиционной ассерторической силлогистике (использующей пропозициональную логику), выразимо и верно и в грассмановской теории. В последней вместе с тем отсутствует что-либо, выводящее за пределы логической «традиции». И «цепные умозаключения», и умозаключения «суммирующие», и «продуктивные умозаключения», и умозаключения разделительные в их грассмановской трактовке вполне «силлогистичны» и полностью охватываются комбинированным исчислением.

Таким образом, Р. Грассман прошел мимо главных проблем алгебры логики XIX века – решения логических уравнений и поиска следствий (соответственно, гипотез) из заданных посылок (соответственно, для данных посылок). Здесь он не шел вровень со своим временем. Но одну новацию в данную проблематику он ввел: показал (в «Логике» 1890 г.), каким образом процедуру решения логических уравнений можно строго представить в индуктивно-рекурсивном стиле. Насколько нам известно, ни до, ни после него этого никто не делал.

* * *

...На протяжении своей долгой жизни Р. Грассман не раз обращался к самым разным вопросам логики. Во-первых, он существенно детализировал положения логического сочинения 1872 г., разработанного совместно с братом. Во-вторых, он предпринял попытку выйти за рамки этих положений, для чего попытался сочетать выдвигавшееся им требование «научности» с идеями диалектического характера. Конспективно изложенное – несмотря на сохранение прежнего стиля выписывания теорем и попыток их обоснования, – сочетание это, однако, оказалось весьма скудным по содержанию.

В самом деле, логический труд Р. Грассмана 1890 г. (переизданный им через десять лет) был опубликован под претенциозным названием «Логики и *другие логические науки*» (выделено нами. – *Б.Б.*). Следуя античной традиции, он противопоставил «Аналитике», основное содержание которой составила логика в аристотелевском смысле, – «Синтетику» как учение об умозрении в смысле Платона и Гегеля. Говоря детальнее, к аристотелевской логике как «первой ветви» логических наук, он попытался добавить «вторую ветвь» – «*Учение о развитии, или Тропику*»[78], как «более высокую ветвь Аналитики». Хотя эта «ветвь» и была разделена им на три раздела, они заняли в его книге немногим более пяти (!) страниц. Главная идея Р. Грассмана состояла здесь в замене жестких и неизменных понятий, с которыми имела дело «первая ветвь», понятиями подвижными, изменяющимися; понятиями, свойства которых, меняясь, могут давать начало новым понятиям. Эти грассмановские идеи для конца XIX в. были банальны. Однако в разделе *Die Sippenlehre*, где речь шла о непрерывности развития понятий, родов, свойств и т.п. и их взаимодействиях, проглядывала идея, которая впоследствии, у Л. Витгенштейна приобрела вид известной концепции семейного сходства. В целом, однако, ничего сколько-нибудь оригинального автор здесь высказать не смог, а его немногочисленные попытки представить предполагаемые им переходы одних понятий в другие с помощью формул оказались не более, чем «изобразительной математикой».

Третью ветвь логических наук, по Р. Грассману, составила уже упоминавшаяся нами комбинаторика – она была изложена на элементарном уровне, но достаточно подробно.

К «Синтетике» Р. Грассман отнес учение об умозрении, где рассматривались противоположности, возникающие в процессе мышления. Он рассуждает о взаимодействии понятий в мыслительном процессе, в частности о ситуации, когда два понятия – зачастую представляющие собой противоположности – сливаются в некое единство, которое оказывается уже новым понятием.

---

[78] Die Wandlungslehre oder Tropic (от лат. tropica – перемены, изменения).

Видно, что Р. Грассман пытается развить нечто вроде диалектической логики, но однажды усвоенный автором стиль «теорем» сковывал его мысль, и неудивительно, что на эту тему он смог «выжать» всего 20 страниц. Трудно понять, какой вид могла бы здесь принять его теория величин как однозначно опознаваемых объектов, а ведь она мыслилась им в качестве фундамента всего «учения о мышлении» и, значит, его диалектической части.

Таким образом, хронологические рамки действительно реальных научных достижений братьев Грассманов мы должны ограничить рамками 40–70-х годов позапрошлого века.

ГРАССМАНЫ И ШРЁДЕР, ГРАССМАНЫ И ФРЕГЕ. ОПЫТЫ РЕКОНСТРУКЦИИ ГРАССМАНОВСКИХ ТЕОРИЙ

Логические исследования Роберта (и Германа) Грассмана оказали воздействие на развитие формальной логики прежде всего через труды Э. Шрёдера «Сфера операций логического исчисления» и «Лекции по алгебре логики»[79]. Шрёдер широко использовал грассмановские результаты. Что касается Р. Грассмана, то при издании «Логики» 1872 г. он был в неведении об уже имевшихся математико-логических построениях. В «Логике» 1890 г. он, однако, уже учитывает достижения Дж. Буля, С. Джевонса, Ч. Пирса и особенно Э. Шрёдера, но не соглашается с их подходами. Как мы уже говорили, им, в частности, решительно отвергается возможность в логике обратных операций; соответствующая критика со стороны Р. Грассмана, как было показано еще Шрёдером, была несостоятельной.

Основное размежевание Р. Грассман – Э. Шрёдер проходило по двум линиям: Шрёдер не принял (и не понял) смысла грассмановской финитной установки в логике, Р. Грассман же отверг значимость для логики того круга задач (выведение всех следствий определенного вида из заданных посылок, решение логических уравнений и т.п.). которые решались большинством математических логиков XIX в., хотя его логическая теория содержит все необходимые для этого средства. В этом последнем пункте подход Р. Грассмана напоминал путь, которым спустя семь лет после

---

[79] См.: *Schröder E.* Der Operationskreis des Logikkalküls. Leipzig. 1877; *Idem.* Vorlesungen über die Algebra der Logik. Leipzig, 1890–1895 (Bd. 1. 1890; Bd II. 1891; Bd. III. 1895).

грассмановской «Логики» 1872 г. пошел Г. Фреге в своем знаменитом сочинении 1879 г. «Запись в понятиях»[80].

Но в одном весьма важном отношении Фреге и Р. Грассман составляли противоположности: они совершенно по-разному смотрели на взаимоотношение между математикой и логикой. Об этом взаимоотношении мы вскоре будем говорить особо. Здесь просто отметим что Роберт (и Герман) Грассман в отличие от Фреге (и Шрёдера) не считал логику предшествующей математике. Такая позиция была обусловлена специфически грассмановским пониманием того, что́ следует, а что́ не следует относить к сфере логического. Исключая из последней умозаключения относительно «форм», основанные на отношении равенства, а также рекурсии и индукции, Грассманы получали возможность истолковывать логические законы как выражающие только отношения между понятиями по объему, т.е. как законы, «надстраивающиеся» над общей теорией величин. Эта позиция вторичности логики аргументировалась тем, что в противном случае получился бы порочный круг в обосновании логики: последняя должна была бы обосновывать сама себя. Как известно, подобный подход был впоследствии возрожден в интуиционизме и конструктивизме. Грассмановское понимание сферы логических закономерностей – исторически ограниченное (ведь, как уже отмечалось, строгое построение теории чисел предполагало средства хотя бы логики высказываний, которые у Грассманов для данной цели не формулировались) – не имело аналогов. Естественно, что взгляды Г. Грассмана (не говоря уже о той феерии воззрений, которую развил его брат Роберт) с трудом воспринимались современниками – философами, математиками и логиками XIX в.; отсюда, например, неубедительность критики грассмановского определения операции сложения, предпринятой Г. Фреге в его «Основаниях арифметики» 1884 г., о чем уже шла речь. Если говорить о методе рекурсивных определений, то независимо от Г. Грассмана к ним обратился спустя 15 лет Р. Дедекинд[81]. Из современных Грассманам математиков и логиков ближе всех к ним (в области оснований дедуктивного знания) стоял Э. Шрёдер.

Нам известны два опыта реконструкции грассмановской теории целых чисел: В.Ф. Кагана (1929) и Хао Вана (1957). Анализ

---

[80] См.: *Frege G.* Begriffsschrift., eine der arithmetischen nachgebildete Formelsprache des reinen Denkens. Halle, 1879. Русск. перев. в кн.: *Фреге Г.* Логика и логическая семантика. М.: «Аспект-Пресс», 2000.

[81] См.: *Dedekind R.* Was sind und was sollen die Zalen? Braunschweig, 1888.

этих реконструкций показывает, что, хотя первая гораздо менее «проработана», чем вторая, она ближе подходу Г. Грассмана; впрочем, и реконструкция В.Ф. Кагана имеет ряд существенных отклонений от содержания рассматриваемого грассмановского труда. Что касается реконструкции Хао Вана, то, прежде всего представляя Грассманову теорию целых чисел в виде аксиоматической системы в современном смысле, он упускает главное в подходе Г. Грассмана – индуктивно-рекурсивную установку. Реконструкция Хао Вана и формально неадекватна теории Г. Грассмана; впрочем, этот дефект легко устраним путем введения в реконструкцию Хао Вана двух дополнительных постулатов: одного, утверждающего, что двум разным целым числам должны соответствовать два разных же непосредственно следующих за ними (предшествующих им) числа, и другого, говорящего о том, что единица не следует ни за каким целым положительным числом, – которые содержатся в теории Г. Грассмана.

Изучение вопроса о месте грассмановской арифметики в истории дедуктивного знания приводит к уже высказанному заключению, согласно которому – в противовес распространенному взгляду, повторенному С.К. Клини в 1980 г., – возникновение теории рекурсивных функций естественно связывать не только с именем Р. Дедекинда (работа 1888 г.), но и с именем Германа (а также Роберта) Грассмана. При этом, однако, следует подчеркнуть, что подход Г. Грассмана – явно не теоретико-множественный! – делал излишним как доказательство представимости арифметических функций с помощью примитивных рекурсий (каковое предъявил Дедекинд), так и формулировку того, что ныне известно как «аксиомы Пеано». Последние в построении Г. Грассмана – подчеркнем это еще раз – вытекают из индуктивного определения «основной последовательности» (соответственно ряда целых чисел) совершенно так же, как эти «аксиомы» извлекаются из правила порождения системы натуральных чисел, например А. Гейтингом.

И с полным основанием мы можем утверждать: Г. Грассман во многом предвосхитил «рекуррентный способ мышления» Т. Сколема, работа которого 1923 г. отличается от грассмановской – помимо, разумеется сколемовского замысла элиминации кванторов, каковой вряд ли мог возникнуть в 60-х годах позапрошлого века, – главным образом явной формулировкой логических средств. В свете работы Т. Сколема становится ясным, что использование Г. Грассманом в его арифметике «кванторных слов» (выражений «все» и «существует») не выходит за рамки конструктивного подхода.

ГРАССМАНОВСКИЙ ПОДХОД И ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ОБ ЭФФЕКТИВНОЙ ВЫЧИСЛИМОСТИ В ФИЛОСОФСКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ И ЛОГИЧЕСКОЙ МЫСЛИ XX ВЕКА

Начнем подводить итог. Осмысляя работы Германа и Роберта Грассманов, относящиеся к изысканиям в области логики и фундамента математического знания, мы явственно обнаруживаем в них предвосхищения некоторых отличительных черт ряда главных неклассических математико-логических концепций, развившихся уже в XX столетии: интуиционизма Брауэра – Гейтинга, финитизма Гильберта, рекурсивного способа мышления Сколема – Гудстейна, конструктивизма Маркова. Предвосхищения эти – их можно охарактеризовать как *протоинтуиционистскую* и *протоконструктивистскую* установку – не были случайны, органически вытекали из философского мышления Грассманов, из их концепции строгого знания и их взглядов относительно места математики, логики и философии в системе наук. Рассмотрим систематически, резюмируя выводы, которые уже были во многом сделаны, те пункты в их философско-логико-математической концепции, которые на новой базе были возрождены и всесторонне развиты упомянутыми направлениями, а также отметим те выдвигаемые ими положения, которые не имели – и не могли иметь – аналогов в воззрениях Грассманов.

Начнем с *философско-математического интуиционизма.* Интуиционизм, возникновение которого связано с известной диссертацией Л.Я.Э. Брауэра (1907 г.)[82], обычно характеризуют как совокупность философских, математических и логических идей и методов, для которых характерно понимание математики как науки об «умственных построениях»: возможность осуществления таких построений представляет собой, согласно А. Гейтингу, одну из самых основных способностей человеческого разума, и именно ее изучает интуиционистская математика[83]. Эта позиция, будучи взята в общей форме, повторяет взгляды Грассманов: философия и математика, по Герману Грассману, суть науки о (мыслительных) формах, почему доказательства в этих науках заключаются в комбинировании различных мыслительных актов;

---

[82] На «прединтуиционистской» позиции представителей так называемой французской школы теории множеств и функций, а также на соответствующих взглядах А. Пуанкаре мы позволим себе не останавливаться.

[83] См.: *Гейтинг А.* Интуиционизм. С. 12, 19.

учение о величинах, которое, согласно Роберту Грассману, обнимает математику и логику, характеризуется тем, что в нем самом мышление производит, «полагает» простые величины – элементы, осуществляет их связывание в сложные величины, устанавливая законы этого связывания, возможные для человеческого разума. То обстоятельство, что в труде 1890 года учение о величинах было вынесено Р. Грассманом за пределы собственно математики, поскольку рассматривалось в качестве «общей части» как математических, так и логических наук, в принципе дела не меняет: разрабатывая детализованный вариант теории величин, Р. Грассман трактовал последнюю как отдел «учения о мышлении» – его исходный точный отдел, на котором базируются как математика, так и логика. Л.Э.Я. Брауэр в определенном смысле рассуждал аналогично, так как для него математика совпадает с точной частью человеческого мышления (ср. характеристику интуиционизма, данную в статье А.С. Есенина-Вольтина[84]). Разумеется, конкретные представления интуиционистов – во всяком случае, Брауэра и Гейтинга – об «умственных построениях» были уж слишком «привязаны» к субъекту – их носителю, чего нельзя сказать о подходе Грассманов, которые вряд ли согласились бы с гейтинговским представлением об общей форме математического высказывания: «Я выполнил в уме построение *А*»[85].

Развертывание арифметики Г. Грассман начинает с описания процесса порождения элементов «основной последовательности» как определенных знаковых конструкций; изложение учения о величинах Р. Грассмана имеет в качестве исходного пункта постулирование элементарных величин и их «последовательного связывания», приводящего к процедурам, частным случаем которых оказывается процесс построения числового ряда. Но и интуиционисты избирают в качестве основы своих рассуждений, говоря языком Грассманов, «полагание мышлением» объектов сходного рода, которые они трактуют в качестве натурального ряда; если не обращаться к брауэровской «изначальной интуиции», с которой голландский математик и философ связывал умственное конструирование объектов этого ряда, а придерживаться более четких разъяснений представителей его школы, то точка зрения интуиционистов по данному вопросу, резюмированная отечественным автором, выглядит так: «Естественно предположить, что можно построить произвольное натуральное число в виде последова-

---

[84] Интуиционизм // Философская энциклопедия. М., 1962. Т. 2. С. 300.
[85] *Гейтинг А.* Интуиционизм. С. 28.

тельного ряда однородных предметов, например ряда параллельных черточек. В рамках такой же идеализации можно допустить, что, построив некоторое натуральное число, можно построить затем и следующие, добавив к уже построенному еще одну черточку»[86]. Но на подобной идеализации основывались и все рассуждения Грассманов в их общей теории форм (величин) и арифметике (целых чисел).

Правда, следует учитывать своеобразие позиции по данному вопросу основоположника интуиционизма. Как уже говорилось, в отличие от Грассманов Брауэр не связывал математику как таковую с какой-либо знаковой, языковой или логической деятельностью; для него математика – в интуиционистском понимании, интуиционистская математика – *предшествует* языку, так как является «существенно безъязыковой деятельностью разума [mind]»[87]; «в системе (edifice) математического мышления ⟨...⟩ язык не играет иной роли, кроме как эффективного – но никоим образом не безошибочного – средства запоминания математических конструкций и связывания их друг с другом»[88].

Р. Грассман рассматривал язык как орудие *усвоения* учения об однозначных объектах – величинах, теория которых, в свою очередь, способствует точности мышления и языка. Брауэр же, наоборот, подчеркивал исходную *неточность* всяких, в том числе и математических, языковых средств – неточность, устранение которой, как он считал, в принципе невозможно; поэтому язык – и вообще любые знаковые системы – не могут, с его точки зрения, служить исчерпывающей передаче существа (интуиционистской) математики. Неудивительно, что этот выдающийся мыслитель даже предлагал смотреть на его высказывания о природе математического знания как на монологическую речь, не подлежащую адекватной расшифровке со стороны слушателей[89].

---

[86] *Драгалин А.* Интуиционизм // Математическая энциклопедия. М., 1979. Т. 2. С. 637–638.

[87] *Brouwer L.E.J.* Historical background, pripciples and methods of intuitionism // South African Journal of Science. Vol. 49, N 3–4. P. 140–141 (перепеч. в кн.: *L.E.J. Brouwer.* Collected Works. Vol. 1: Philosophy and Foundations of Mathematics / Ed. by A. Heyting. Amsterdam, 1975).

[88] *Brouwer L.E.J.* Points and space // Canadian Journal of Mathematics. Vol. VI, N 1. 1954 (перепеч. в кн.: *L.E.J. Bromver.* Collected Works. Vol. 1).

[89] Мы имеем здесь в виду, в частности, слова, сказанные Брауэром в его докладе «Сознание, философия и математика» на Международном философском конгрессе, состоявшемся в Амстердаме в 1948 г., когда он, желая подчеркнуть трудности языкового общения, утверждал, что его выступление не рассчитано

Поэтому для последователей Брауэра мышление – во всяком случае, в его «точной» части – не только не связано с языком (позиция, с которой в определенном смысле согласился бы, пожалуй, и Р. Грассман, считавший, что *законы* теории величин не зависят от *законов* языка), но и не способно сделать язык (и, значит, выражаемые в языке результаты мышления) ясными и общезначимыми – представление, которое, как нами уже отмечалось, расходится со взглядами Грассманов, Их концепция «умственного конструирования» скорее предвосхищала финитизм и конструктивизм, нежели описанный аспект интуиционизма с его учением о вне языковой математической интуиции.

Расхождение между пониманием математики основоположником интуиционизма и «протоинтуиционизмом» Грассманов очевидно: для последних математика как «учение о формах (величинах)» с самого начала предполагает знаковую, на точном искусственном языке, фиксацию математических (и логических) данностей. Впрочем, последователи Брауэра – уже А. Гейтинг – придавали гораздо большее значение знаковому представлению математических объектов, прежде всего натуральных чисел: «с каждым элементом построения ⟨натурального числа⟩ x, – писал он, – мы связываем, например, точку на бумаге»[90]; А.А. Марков, редактор русского перевода книги А. Гейтинга, в примечании к этому высказыванию замечает, что по существу мы таким образом приходим к понятию натурального числа, принятому в конструктивной математике: натуральное число – это слово в алфавите |, т.е. ряд вертикальных штрихов[91].

Здесь позиция интуиционизма соприкасается с позицией логико-математического конструктивизма. Однако прежде чем переходить к рассмотрению концепции Грассманов в свете этого направления, обратимся к программе *финитизма* Д. Гильберта. Эта программа – ее идея была впервые высказана великим ученым еще в 1904 г., – как известно, изложена в серии Гильбертовых публикаций 1920-х годов; однако для нас удобнее воспользоваться фундаментальным трудом Д. Гильберта и П. Бернайса (вышедшим первым изданием в 1934 г.), который ныне имеется в рус-

---

на понимание и «его можно рассматривать как монолог»; высказывания Бруэра в русском переводе приводятся в книге: *Бирюков Б.В., Тростников В.Н.* Жар холодных чисел и пафос бесстрастной логики. Формализация мышления с античных времен до эпохи кибернетики. М.: «Знание», 1977; 2-е изд. М.: «Знание», 1985. С. 114–115.

[90] *Гейтинг Л.* Интуиционизм. С. 24.

[91] Там же. С. 162.

ском переводе. Знаменитая «финитная установка» Гильберта, особенно если рассматривать ее в исходных основоположениях и вне рамок гильбертовского *формализма* как концепции, нацеленной на «спасение» классической математики от «разрушительной критики» интуиционистов, вполне конструктивна; основоположения эти касаются элементарной арифметики и алгебры. Вот как в применении к этим разделам математики выглядит эта «финитная установка»:

> здесь в области элементарной арифметики и алгебры ориентировка на прямые содержательные рассуждения, осуществляемые *без предположений аксиоматического характера* (выделено нами. – *Б.Б., Л.Б.*), разработана в наиболее чистом виде. – Характерной особенностью этой точки зрения является то, что рассуждения здесь рассматриваются как *мысленные эксперименты* над предметами, которые являются *конкретно заданными* ⟨...⟩. В арифметике у нас имеется некоторый *исходный объект* и, кроме того, некоторая операция порождения. И то, и другое мы должны будем зафиксировать некоторым наглядным образом ⟨...⟩. Мы возьмем в качестве исходного объекта цифру 1, а в качестве операции порождения – приписывание 1[92].

Тут все напоминает отправные пункты концепции Грассманов. В их работах была вполне воплощена ориентировка на рассуждения, не связанные с предположениями аксиоматического характера; мысленное полагание элементов и их связывание, о чем неоднократно писали братья, – это, конечно же, не что иное, как мысленное экспериментирование с конкретно представляемыми объектами; в «учении о формах (величинах)» мы также имеем исходные объекты и операции порождения – «прибавления единичностей», «связываний штифтом»; объекты в грассмановской арифметике и общей теории величин оказываются, как и в «финитной арифметике» Гильберта–Бернайса, словами («цифрами», «многочленами») определенного вида, а равенство или неравенство этих объектов понимаются как графическое совпадение либо не совпадение этих конкретно заданных предметов; операции (функции) в арифметике и общей теории величин Грассманов, как и в «финитных» теориях математики XX века, вводятся путем рекурсивных определений, естественно предполагающих, говоря словами Гильберта–Бернайса, «принципиальную представимость объектов» и «принципиальную выполнимость операций»[93].

---

[92] *Гильберт О., Бернайс П.* Основания математики. Логические исчисления и формализация арифметики. С. 45–46.

[93] Там же. С. 59.

Содержательные рассуждения, совершающиеся в виде «мысленных экспериментов», производимых над «наглядно представляемыми» образованиями и не зависящие от постулатов аксиоматического рода, Гильберт и Бернайс называют финитивными, а соответствующую методологическую[94] позицию характеризуют как *финитную установку* или *финитную точку зрения*. Поэтому мы можем сказать, что грассмановская арифметика и «общее учение о величинах» были финитными теориями в *гильбертовском смысле*, а питавшая их методологическая устремленность – *финитной установкой*. Правда, остается один пункт, нуждающийся в уточнении. Поясняя смысл упомянутой установки, Гильберт и Бернайс говорят о «прямых содержательных рассуждениях», мы же в наших рассмотрениях арифметики и общей теории величин Грассманов подчеркивали *формальность* их построения. Можно ли считать грассмановскую «формальность» («строгую научность», как они выражались) тождественной гильбертовской «содержательности»? В определенном смысле – да.

Дело в том, что Гильберт и Бернайс смотрят на «элементарную арифметику» фактически с позиций «рекуррентного способа мышления» Т. Сколема, примитивно-рекурсивную арифметику которого они затем (в гл. VII своего труда) подвергают аксиоматизации. Отличие этой арифметики от арифметики Грассманов состоит, грубо говоря, в том, что у Сколема к аппарату примитивных рекурсий (служащему для задания не только арифметических функций, но и предикатов), умозаключениям на основе свойств отношения равенства и индуктивным доказательствам – средствам, в общем, содержавшимся в построениях Грассманов, – присоединяется формализм фактически пропозициональной логики[95]. Это придает сколемовскому построению ту «логическую завершенность», которой не могло быть у Грассманов, использовавших в арифметике и теории величин логические связки естественного языка, для которых не формулировались правила их употребления. Поэтому можно сказать, что упомянутые грасс-

---

[94] В русском переводе это понятие не совсем адекватно передано термином «методическая».

[95] Основная идея рекурсивной арифметики Сколема – если говорить о ее логической стороне – заключалась, по характеристике Н.А. Шанина, в построении теорий «на основе *бескванторных* (или иных, но *как можно более простых*) языков – таких языков, в которых суждения допускают достаточно отчетливое понимание» (*Шанин Н.А.* Вступительная статья. О рекурсивном математическом анализе и исчислении арифметических равенств Р.Л. Гудстейна // Р.Л. Гудстейн. Рекурсивный математический анализ. С. 23).

мановские теории были *формальными* лишь на *дологическом* уровне, т.е. уровне, не базирующемся на явно сформулированных средствах логики, уровне, который с позиций современной математической логики признается *содержательным*. Правда, логические процедуры, применявшиеся Грассманами в арифметике (целых чисел) и общем учении о формах, были достаточно «просты» и вполне удовлетворяли «финитной установке». Но это не отменяет того факта, что их теории «форм» и целых чисел содержали не выявленную логическую компоненту – что и не удивительно, так как и по своему исполнению, и исторически они принадлежали к дологическому, т.е. не связанному с разработкой формализованной логики, периоду в исследованиях по философии и основаниям математики[96]. Между тем без выявления этой компоненты не могло быть и речи о распространении «рекуррентного (рекурсивного) способа мышления» на математический анализ и теорию функций; это, как известно, много позже, начиная с 40-х годов XX века, было осуществлено Р. Гудстейном на базе его «исчисления равенств», являющегося развитием подхода Т. Сколема.

Переходя к сопоставлению грассмановской концепции с отечественным конструктивизмом, подчеркнем, что предвосхищения братьев Грассманов здесь касались не столько того специфического, что отграничивает школу А.А. Маркова от других конструктивистских течений в математике XX века (и даже от интуиционизма), сколько того, что было им общо. Из «трех китов», на которых, по выражению Н.А. Шанина, основывается конструктивная математика: теории порождаемых множеств конструктивных объектов (называемой также общей теорией исчислений), теории алгоритмов и конструктивной математической логики[97], – построения Грассманов имели отношение только к первому. Но не будем забывать, сколь существен этот «кит»: понятия *конструктивного объекта* и *конструктивного процесса* как непосредственные предметы изучения в конструктивной математике составляют краеугольный камень этого направления. В отличие от других конструктивистских концепций XX столетия в конструктивной математике и логике, развивавшихся в России, с самого начала подчеркивалась *широкая общность* этих понятий. И именно эта общность была предвосхищена в грассмановской теории форм (величин).

---

[96] В качестве условной даты начала исследований по *логическим* основаниям математических теорий обычно принимается 1879 год, когда Г. Фреге опубликовал свой эпохальный труд «Запись в понятиях».

[97] *Шанин Н.А.* Вступительная статья... С. 39.

В самом деле, приведем, следуя высказываниям представителей отечественного конструктивизма, характеристику понятий конструктивного процесса и конструктивного объекта. Предварительно заметим, что, рассматривая упомянутые процессы, конструктивисты всегда имеют в виду *конкретный*, хотя, быть может, и не специфицированный процесс. Относительно этого процесса предполагается, что заданы объекты, которые в данном процессе порождения выступают в качестве нерасчленяемых далее образований (исходные конструктивные объекты); что объекты эти однозначно опознаваемы – различаемы и отождествляемы; что сформулирован конечный набор правил (предписаний) переработки одних конструктивных объектов – исходных и не исходных, т.е. полученных ранее в данном процессе, в другие конструктивные объекты; что переработка эта производится дискретно, отдельными четко отличными один от другого шагами; что правила, определяющие эту переработку, общепонятны и относительно их применения не может возникнуть каких-либо неясностей; что результат каждого шага преобразований однозначно определен используемым правилом и характером тех конструктивных объектов, к которым оно применяется; что поэтому все конструктивные объекты являются однозначно опознаваемыми; и что выбор того или иного правила на каждом шаге порождения конструктивных объектов – конструктивного процесса – произволен в тех рамках, которые определены набором ранее построенных конструктивных объектов[98]. Эта характеристика полностью применима к тем процедурам обращения с объектами, которые вводятся в теории чисел братьев Грассманов и в теории форм младшего брата. Так, в книге Г. Грассмана 1861–1862 гг. заданными исходными конструктивными объектами являются положительная и отрицательная «единичности»: элементы e и $-e$, причем $-e$ выступает в качестве не расчленяемого далее единого знака: в учении о формах изначально данными, не расчленяемыми на что-либо конструктивными объектами являются элементарные величины, представляемые тоже буквой e или той же буквой с целочисленными положительными индексами; в обоих «учениях» – о числах и о величинах в широком смысле – предъявляется конечный набор правил построения

---

[98] Ср.: *Шанин Н.А.* Конструктивные вещественные числа и конструктивные функциональные пространства // Труды Математического ин-та АН СССР. Т. LXVII: Проблемы конструктивного направления в математике. 2. М.; Л.: Изд-во АН СССР. 1962. С. 16.

конструктивных объектов – «величин» и «равенств» («уравнений»), что обусловливает возможность построения одних конструктивных объектов из других конструктивных объектов с помощью индуктивных определений либо рекурсивных процедур, вводящих в состав образуемых величин знаки (унарных, типа «прибавления положительной единичности», либо бинарных) операций, а также индуктивных доказательств и тождественных преобразований, порождающих – в качестве «доказанных» – конструктивные объекты вида равенств (уравнений); правила эти общепонятны (хотя не все из них описаны в явном виде; это касается, в частности, правил, определяющих тождественные преобразования); процесс порождения носит дискретный характер, полностью регулируется имеющимися правилами, результаты применения которых на каждом шаге однозначно определены характером тех величин либо равенств, которые по этим правилам перерабатываются.

Во всех конструктивистских теориях, о которых речь шла выше, числа – натуральные, целые, рациональные – и другие математические «сущности» понимаются как определенные знакосочетания. В отечественном конструктивном направлении эта позиция принимает следующий вид: знакосочетания предполагаются имеющими линейный характер, т.е. вид слов; слова в тех или иных алфавитах становятся единственным типом конструктивных объектов, которые в нем рассматриваются (при этом на примерах показывается, что конструктивные объекты иного рода – конечные матрицы, конечные графы, деревья формул и пр. – могут быть представлены в виде слов в подходящих алфавитах). В «учениях» Грассманов величины тоже оказываются словами в определенных алфавитах[99], а опознаваемость величин вытекает из истолкования отношений равенства и различия, предполагающих, как мы видели, графическое сравнение слов.

МАТЕМАТИКА И ЛОГИКА

В свете сказанного неудивительно сходство взглядов братьев Грассманов на соотношение математики и логики с соответству-

---

[99] В грассмановской арифметике и общей теории форм встречаются и такие знакосочетания, которые отклоняются от линейной формы (из-за индексации элементов и величин, сохранения привычной записи результата операции возведения в степень и т.п.), однако они могут быть без труда представлены, после введения соответствующих соглашений, в виде слов.

ющими представлениями интуиционистов и конструктивистов. Роберт (и Герман) Грассман не считал логику предшествующей ни математике, в целом, ни «учению о величинах» – в обоих его трактовках: и как части математики (Р. Грассман, 1872), и как такого раздела «учения о мышлении», который должен быть предпослан логическим и математическим наукам (Р. Грассман, 1890), так как это, с грассмановской точки зрения, вело к порочному кругу. Такая позиция была, разумеется, связана со специфическим пониманием логики, при котором из сферы логического исключались рассуждения, основанные на свойствах отношения равенства, индуктивные доказательства и определения, а также рекурсии; к логике относилось (по крайней мере, в труде 1872 г.) только «понятийное, или логическое, умозаключение ⟨Schluss⟩ или доказательство», состоящее в выводе «от некоторого более широкого понятия к понятию, которое ему подчинено, или является более узким». Поскольку упомянутых «нелогических», с точки зрения Р. Грассмана, средств – по его убеждению – было достаточно для построения (общей) теории форм, последняя не нуждается в «понятийном, или логическом, умозаключении»: ведь «в доказательствах учения о величинах мы имеем дело не с подчиненными, а только с равными или неравными величинами». Наоборот, само «учение о понятиях, или логика», должно, по Р. Грассману, основываться на теории форм; поэтому попытка строить последнюю, используя средства логики – в ее грассмановском понимании – привела бы к кругу в умозаключениях.

Вопрос о роли логического начала в математике не прост. Уже в труде Г. Грассмана 1861–1862 гг. неявно предполагается – да и как же могло быть иначе? – использование средств логики высказываний и (по крайней мере элементарных) понятий кванторной логики; без (хотя бы некоторых) пропозициональных логических связок естественного языка нельзя, конечно, обойтись и при развертывании общей части теории форм, если же говорить о ее ветвях – мы не имеем здесь в виду логику[100], – то использование аппарата теории предикатов и кванторов здесь неизбежно. Но не это здесь существенно. Интересно то, что тезис о предшествовании математики логике, появившийся в методологии дедуктивных наук, по-видимому, гораздо позже обратного, «логицистского» те-

---

[100] Потому что тут возникает тонкий вопрос о логических средствах, используемых при построении формализованной (алгебры) логики и разработке ее теории – вопрос, который вывел бы нас далеко за рамки задач, стоящих перед нами в данном случае.

зиса (любопытно было бы установить, кто в истории математики и логики в этом отношении может считаться предшественником Грассманов!), на новой основе и в сопровождении иной аргументации возродился в интуиционизме и конструктивизме.

В самом деле, в решении вопроса об отношении логики к математике интуиционисты, в общем и целом, заняли позицию, сходную с грассмановской. Так, Брауэр подобно Грассманам считал, что попытка логического обоснования математики приводит к кругу, так как логика как составная часть «точного мышления» сама оказывается частью математики. «*Математика*, – писал основатель интуиционизма в своей диссертации 1907 г., – *не зависит от логики*»; более того: «*Логика зависит от математики*»; «практическая логика и теоретическая логика суть приложения различных частей математики»[101]. Правда, интуиционисты гораздо резче, чем Грассманы, сформулировали «антилогицистский» тезис, связывая его с пониманием математики как доязыковой и дологической конструктивно-мыслительной деятельности, для которой язык и логика суть только формы ее объективации, а не неотделимые от нее компоненты. Следующие слова А. Гейтинга, вкладываемые им в уста главного персонажа его книги «Интуиционизм» – «Инта» – не оставляют в этом сомнений:

> Логика – не почва, на которой я стою. Да и как это могло бы быть? Она в свою очередь нуждалась бы в обосновании, которое содержало бы гораздо более запутанные и менее прямые принципы, чем принципы самой математики. Математическое построение должно быть таким непосредственным для разума, и его результат должен быть столь ясным, чтобы не нуждаться ни в каких обоснованиях. Можно очень хорошо понимать, является ли рассуждение правильным, не пользуясь логикой; достаточно ясного научного сознания[102].

И тем не менее позиции Грассманов и интуиционистов в ряде существенных аспектов совпадают даже в деталях. И те, и те, например, должны были исключить из логики, по существу, одни и те же средства обращения с математическим материалом, в частности, индуктивные доказательства и рекурсивные определения. И когда А. Гейтинг говорит: «Коль скоро мы обладаем основными методами индукции и рекурсии, построение арифметики натуральных чисел не встречает серьезных трудностей, равно как и построение арифметики целых чисел и даже арифметики рацио-

---

[101] *Brouwer L.E.J.* Over de grondslagen der wiskunde. Amsterdam – Leipzig, 1907; англ. перев.: On the foundations of mathematics // L.E.J. Brouwer. Collected Works. Vol. I. P. 72, 73, 99.

[102] *Гейтинг А.* Интуиционизм. С. 14.

нальных чисел[103], он высказывает взгляд, под которым, наверное, подписались бы братья Грассманы – и не только потому, что индукция и рекурсия были *их* методами, но и потому, что методы эти для них, как и для Гейтинга, были *дологическими*.

Позиция конструктивизма по вопросу о соотношении математики и логики, бесспорно, «мягче», чем позиция интуиционизма. Но и для него сохраняет силу грассмановская концепция *вторичности* логики и представление о дологической природе конструктивных процессов. Конструктивистская математика, с точки зрения А.А. Маркова и его школы, *требует* определенной логики – в том смысле, что *вызывает* ее, – но заранее заданной не предполагает; характер логики конструктивной математики зависит при этом от природы рассматриваемых конструктивных процессов и объектов.

Но здесь рассматриваемая нами историческая параллель заканчивается. Для Грассманов логика – единственна, интуиционизм же и конструктивизм не только, так сказать, на деле продемонстрировали возможность «логического плюрализма», но и – по крайней мере если говорить об отечественном конструктивном направлении в математике и логике – провозгласили его в качестве неотъемлемого элемента своей принципиальной позиции. А.А. Марков выразил этот взгляд в свойственной ему решительной форме:

> В идее неединственности логики, разумеется, нет ничего удивительного. В самом деле, с какой стати все наши рассуждения, о чем бы мы ни рассуждали, должны управляться одними и теми же законами? Для этого нет никаких оснований. Удивительным, наоборот, было бы, если бы логика была единственна[104].

Однако это – взгляд, характерный для другой математико-логической эпохи: эпохи, открытой теоретико-множественными и логическими антиномиями, брауэровской критикой закона исключенного третьего. В XIX веке, наверное, трудно было найти ученого, сомневавшегося в том, что логика – будь то логика реальных рассуждений людей или отражающая ее логическая теория, логика содержательных математических доказательств или формализованная логика – едина в своей основе. На этой позиции стояли и Дж. Буль, и Э. Шрёдер, и Г. Фреге. Стояли на ней и братья Грассманы.

---

[103] Там же. С. 23–24.

[104] *Марков А.А.* О логике конструктивной математики. М.: «Знание», 1972. С. 14.

* * *

Изучение наследия Грассманов остро ставит проблему «математика и/или логика». Ее решение во многом зависит от того, какими мы будем считать индуктивно-рекурсивные процедуры – логическими или внелогическими, а также какое значение, какой «удельный вес» мы будем им придавать в развертывании математических теорий и математики как науки в целом; крайне важен и вопрос об «одноступенчатом» (Брауэр) или «двухступенчатом» (Гильберт) их введении в рассмотрение. Обозначив «логическое» через *Л*, а «индуктивно-рекурсивное» (внелогическое, математическое) – через *ИР*, стрелкой же выразив отношение концептуального предшествования, мы можем схематически изобразить логицизм: (1) *Л* $\to$ *ИР*; интуиционизм (конструктивизм): (2) *ИР* $\to$ *Л*; и финитизм: (3) *ИР* $\to$ *Л* $\to$ *ИР*.

К сказанному следует добавить соображения, связанные с различием между формализованной и неформализованной, данной в мышлении логикой. Логика последнего рода всегда присутствует в математике, и в *этом смысле* она *всегда* предшествует математическому и любому другому научному мышлению. За примерами ходить недалеко. Так, отношение одинаковости знаков, которому столь большая роль придается и в финитизме, и в конструктивизме, и которое имеет все свойства логического отношения равенства, очевидным образом *предшествует* формализованному отношению равенства в любом формальном языке. Это надо понимать не только в том смысле, что второе «моделирует» первое, но и в том, что задать второе невозможно, не используя какой-либо формы первого. А.А. Марков, создатель отечественного направления конструктивных математики и логики, искал выход из этого положения, ссылаясь (в подстрочном примечании!) на отношение одинаковости знаков, основывающееся на абстракции отождествления, которой, однако, не давалось никакого – ни «точного», ни «неточного» – определения. Относится ли эта абстракция к логике? Гильберт и Бернайс также начинают с отношения одинаковости знаков, над которым в ходе дальнейшего развертывания теории – через 165 страниц в русском переводе! – «надстраивается» некое «настоящее» логическое равенство. Относятся ли оба эти отношения к логике? Или только второе? Или оба они – внелогические отношения?

По нашему мнению, любое решение интересующей нас проблемы должно предполагать существование неформализованных логических рассуждений: умозаключений, основанных на отношении одинаковости (равенства, тождества) объектов, которое имеет те же свойства, что и формализованное равенство; обобщений, оперирующих словом «все» и его эквивалентами, без которых невозможно придать надлежащую всеобщность «финитным способам рассуждений», логическим операциям, выражающимся союзами «и», «если..., то» и т.п. *Такая* логика столь же «первична», что и «интуитивно-очевидное» порождение натурального ряда.

Изложенные нами соображения самым тесным образом «привязаны» к противопоставлению логического и индуктивно-рекурсивного. Но, может быть, решая проблему соотношения математики и логики, разумнее идти другим путем, например, исходить из «определения» Г. Вейля[105]. «Математика есть наука о бесконечном»? Это как будто снимает решения (1) и (2), а решению типа (3) придает вид проблемы о взаимодействии двух наук. И хотя вопрос о том, что чему предшествует – математика ли логике или логика математике – утрачивает прежний смысл, тем не менее понимание Вейлем математического знания – быть может, вразрез с тем, как думал сам Вейль, – наталкивает на мысль считать логику более «простой» наукой и в *этом* смысле предшествующей математике.

Здесь, однако, возникает следующая трудность. Однотипные обобщающие умозаключения:

(I) $$\frac{A(a_1), A(a_2), \ldots, A(a_n)}{\forall x A(x)}$$

(II) $$\frac{A(t)}{\forall x A(x)}$$

(III) $$\frac{A(a_1), A(a_n) A(a_{n+1})}{\forall x A(x)}$$

(IV) $$\frac{A(a_1), A(a_2), \ldots, A(a_n), A(a_{n+1}), \ldots}{\forall x A(x)}$$

т.е. правило полной *нематематической индукции*, «правило Локка» (правило введения квантора общности), принцип полной математической («совершенной») индукции и «правило Карнапа» придется относить к *разным* областям знания, что выглядит неестественно. Первое правило конечно («финитно») без всяких ого-

[105] Вейль продолжает: «Ее целью является постижение человеком, который конечен, бесконечного с помощью знаков» (*Weyl H.* The Open World: Three lectures on the metaphysical implications on science. New Haven; L., 1932. P. 7. Это понимание математики связано с общефилософскими взглядами Вейля, которые коротко охарактеризованы в кн.: *Бирюков Б.В.* Вейль и методологические проблемы науки // *Вейль Г.* Симметрия. М., 1968.

ворок. Во вторую и третью схемы бесконечность «прокрадывается» в снятом виде: обе они «финитны» в смысле Гильберта. Четвертая схема, похожая по-своему на каждую из предшествующих (это принцип бесконечной индукции для случая счетности посылок), нефинитна. И все четыре схемы выражают обобщающие умозаключения. Однако, рассуждая «по Вейлю», последнюю следует исключить из логики и отдать математике...

Кроме того – и это соображение еще более существенно, – если математика есть наука о бесконечном, то из нее надлежит исключить конечную и машинную математику, т.е. математику, реализуемую на ЭВМ, что по меньшей мере странно и в наш век информатики и кибернетики «несовременно».

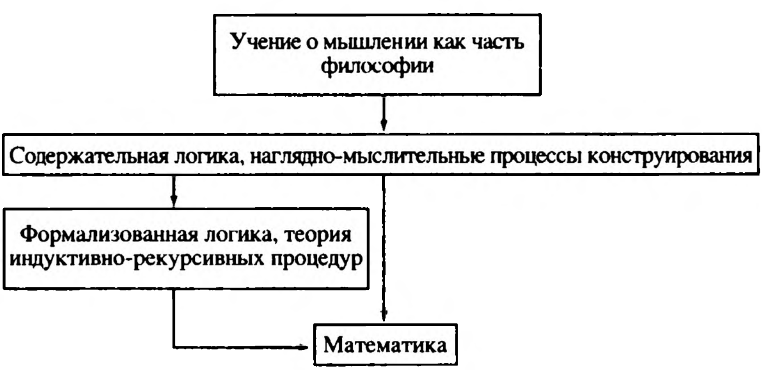
Заключения, к которым приводят размышления над тем, что впервые пытались одолеть Грассманы, а также их неизменная ориентация на философию приводит нас к следующим выводам:

1. Содержательная логика и наглядно-мыслительные процессы конструирования предшествуют математике и формализованной логике.

2. Вопрос о том, что чему предшествует – математика формализованной логике или формализованная логика математике – зависит от того, куда отнести теорию порождающих процессов и эффективной вычислимости: к математике или логике.

3. По нашему мнению, можно принять любое решение вопроса 2, так как все зависит от того, как будет очерчена сфера логического, а это в значительной мере вопрос соглашения. Рассел был прав, когда писал Фреге, что основания математики и формальной логики трудно разграничить.

4. Но все же опыт Грассманов делает убедительной схему:



Мы оставили в стороне вопросы, связанные с теорией множеств, аксиоматическим методом, теорией моделей, новейшим развитием логики и информатики. Но, как представляется, их привлечение хотя и усложнит обсуждение проблемы и потребует детализации предлагаемой схемы, общего хода аргументации и выводов не нарушит.

ДОН КИХОТ XIX ВЕКА

Создаваемые человеком формализмы науки всегда были – и, надеемся, останутся – феноменом, отражающим лишь одну сторону творческой деятельности познающих личностей и коллективов таких личностей с их содержательно-диалектическим мышлением. Наука, тем более «строгая», лишь одно из ее проявлений, технологически наиболее эффективных, но лишенных, в значительной мере, духовно-нравственного начала. Это понимал Роберт Грассман, но не смог сказать здесь сколько-нибудь существенного.

В этом контексте следует оценивать не только грассмановский протоконструктивизм, но и вообще конструктивное и финитное направление в математике и логике. Поэтому позиция Гильберта и Бернайса, выраженная в следующих их словах, совершенно естественна:

> в арифметике потребность в выходе за пределы финитной точки зрения на самом деле не является такой уж ощутимой; действительно, едва ли можно указать такое выполненное в рамках арифметики доказательство, в котором нельзя было бы при помощи сравнительно легких модификаций обойтись без применения нефинитных способов умозаключений; ⟨в отличие от этого математический⟩ анализ в его обычном изложении совершенно не согласуется с финитной точкой зрения; напротив, он самым существенным образом опирается на дополнительные логические принципы[106].

Мы не станем здесь останавливаться на этих «дополнительных принципах», в числе которых – если говорить о классической логике и математике, – как известно, были и давно сформулированные, типа закона исключенного третьего, и совсем новые, вроде принципа произвольного выбора. Мы также не можем здесь пытаться выяснить, где в многообразных философских, логических и математических построениях Грассманов конкретно давала осечку их финитная ориентация. Однако заведомо ясно,

---

[106] *Д. Гильберт, П. Бертнайс.* Основания математики... С. 64, 70.

что «протоконструктивность» математики их времени не могла быть продвинута достаточно далеко. Она не могла «сработать» при переходе к действительным числам, конструктивное осмысление которых, например в школе А.А. Маркова, связано с использованием уточненного понятия алгоритма. Уточнение это, как известно, есть вполне достижение XX века. В эпоху же, когда не была осознана необходимость уяснения логического фундамента математики, когда не существовало еще формализованной логики, приспособленной для аналитического рассмотрения основных математических понятий и методов, когда – особенно – не было теории эффективной вычислимости, – в эту эпоху, эпоху братьев Грассманов, финитистские, (прото)конструктивистские устремления в математике и логике не могли принести сколько-нибудь существенных плодов. Вспомним, что даже в середине прошлого века многие математики смотрели на интуиционизм и конструктивизм как на нечто «несерьезное». И лишь наступление эры автоматизации вычислительных процедур, связанное с появлением электронной вычислительной техники, информатики и кибернетики, привело к переоценке ценностей.

Ныне интуиционистско-конструктивистские концепции – не только признанные теоретические направления математико-логической мысли, но и источник интересных идей и аппарата, находящего приложение в программировании вычислительных машин, в проблематике «искусственного интеллекта» и формализованного представления знаний. Здесь они трансформируются в осязаемо-вещную форму *практической вычислимости*; ибо тут – монопольное царство тех финитных процессов, значимость которых для дедуктивного знания с таким пафосом, пусть на весьма скромном научном материале, отстаивали Герман и Роберт Грассманы. В реальности этого царства – оправдание грассмановской борьбы за «подлинно научный метод» построения математики и логики. Конечно, машинная математика не тождественна интуиционистской и конструктивистской; конечно, эти «математики» не исчерпывают поля математического (и логического) поиска, в котором человеческая мысль и воображение привлекают – и, мы убеждены, всегда будут привлекать – нефинитные, неконструктивные представления. Пусть так! Но все же концепция Грассманов – если взглянуть на нее сквозь призму современной вычислительной математики и «искусственного интеллекта», для которых существующими являются только такие объекты, которые могут быть машинно реализованы, – была по-своему пророческой. В этом – основание того, чтобы считать описанные в этой статье идеи принадлежащими (также и) предыстории нынешнего XXI века – века информатики, века Интернета.

Но Интернет не альтернативен Человеку, подобно тому, как Наука не альтернативна Знанию.

Знание же в той или иной форме есть всегда Система. Это не то чтобы понимал Роберт Грассман: скорее, он это чувствовал всем своим нутром. И хотя чаемое им «Здание знания» не могло строиться на ограниченной базе «протоконструктивизма», – замысел автора был благороден уже потому, что не противопоставлял Знание – Вере. Последний Дон Кихот «строгой науки» XIX века, он не мог не потерпеть поражения. В XX веке таковых уже не наблюдается. Что-то принесет век XXI?

Б.В. Бирюков

КОММЕНТАРИИ

Часть первая

Герман Грассман

Учение о формах и Философия математики. Избранное

Ниже помещено: «Очерк общего учения о формах», «Наука об экстенсивных величинах, или Учение о линейных протяженностях. Введение»; Предисловия к изданиям «Учения о протяженностях» 1844 и 1878 гг.; начальные, философско ориентированные разделы труда «Геометрический анализ основанный на открытой Лейбницем геометрической характеристике»; и большая часть «Арифметики» Германа Грассмана, раскрывающая суть его индуктивно-рекурсивного метода. Такое расположение текстов вызвано тем, что он – в отличие от своего брата Роберта – не оставил работ, специально посвященных философско-математическим и методологическим вопросам. Даже «Очерк общего учения о формах», который можно считать отдельной работой, включен им в качестве предваряющего его «Учение о протяженностях» 1844 г. «Очерк» ориентирован не только на те результаты, которые затем излагаются в математических трудах Германа Грассмана, но и на *грассмановскую логику*, которую позднее изложил Роберт Грассман. По этой причине мы именно «Очерком» открываем тексты Г. Грассмана, переводы которых предлагаются вниманию читателя. Последующие тексты Г. Грассмана подобраны с таким расчетом, чтобы раскрыть разные стороны его *философских* воззрений, в центре которых была *генетическая* методология. Суть этой методологии он обычно излагал во введениях и первых параграфах своих математических сочинений – за исключением «Арифметики», где эта методология получила практическую реализацию.

Очерк общего учения о формах

Оригинал: *Hermann Grassmann*. Uebersicht der allgemeinen Formenlehre. Очерк помещен в книге Г. Грассмана «Учение о протяженностях» – Die Wissenschaft der extensiven Grösse oder die Ausdehnungslehre ⟨...⟩ Erster Theil: die lineale Ausdehnungslehre (Leipzig, 1844. Verlag von O. Wigand) – непосредственно после «Введения» (перевод «Введения» читатель найдет ниже) и представляет собой относительно самостоятельную работу, в которой строятся самые исходные алгебраические структуры (начиная с группы), подводящие к алгебраическому представлению логики. В книге Грассмана этот «Очерк» занимает с. 1–14 (во втором издании данного труда, выпущенном в 1878 г., те же с. 1–14). Так как оба издания представляют собой библиографическую редкость, следует отметить, что труд Г. Грассмана 1844/1877 гг. вошел в фундаментальное издание: *Hermann Grassmanns* Gesammelte mathematische und physikalische Werke (Ersten Bandes erster Theil), hrsg. von F. Engel, где данный «Очерк» можно найти на с. 33–45. Следует заметить, что к тексту этого «Очерка» – § 1–12 – мы добавили начальные параграфы собственно «Учения о протяженностях» 1844–1878 гг., показывающие, каким способом идеи этого «Очерка» служили развертыванию последующей грассмановской математической конструкции. Издавая в 1877–1878 гг. (первым из названных годов помечено «Предисловие» автора ко второму изданию), Г. Грассман в подстрочных примечаниях сделал некоторые добавления; они помечены – (1877).

1* Г. Грассман имеет в виду диалектический характер противоположности тождества и различия. Намек на требующийся для «философского определения» понятия равенства «аппарат определения понятий» предполагает, как, по-видимому, считал Г. Грассман, привлечение категорий изменения и взаимопроникновения противоположностей. Во «Ведении», которое у Грассмана *предшествует* данному «Очерку», он фактически показал, в каком направлении могут идти поиски этого «философского определения».

Относительно диалектической взаимосвязи тождества и различия Г. Гегель писал: «Это тождество с собой есть *непосредственность* рефлексии. Ее отрицательность есть ее бытие. Оно не такое равенство с собой, как *бытие* или *ничто*, а такое, которое устанавливает себя как единство, причем это установление не есть восстановление из чего-то иного, а чистое спонтанное и внутреннее установление; *существенное* тождество. Поэтому оно не *абстрактное* тождество, иначе говоря, не возникло через относительное подвергание отрицанию, которое происходило бы вне его и лишь отделило бы от него то, что от него отлично, в остальном же оставило бы это отличное по-прежнему как *сущее*. Нет, бытие и всякая определенность бытия сняли себя не относительно, а в себе самих, и эта простая отрицательность бытия в себе и есть само тождество». И далее: «...то тождество, которое находится вне различия, и то различие, которое находится вне тождества, суть продукты внешней рефлексии и абстракции, произвольно задерживающейся на этой точке безразличной разности». «Различие есть полагание небытия как небытия иного. Но небытие иного есть снятие иного и, стало быть, самого различения. Однако в таком случае различение имеется здесь как соотносящаяся с собой отрицательность, как небытие, которое есть небытие самого себя, небытие, которое имеет свое небытие не в ином, а в себе самом. Имеется, следовательно, соотносящееся с собой, рефлектированное различие, или чистое *абсолютное различие*» (*Гегель Г.В.Ф.* Наука логики. М., 1971. Т. 2. С. 32 и сл.). «Тождество есть, следовательно, в себе самом абсолютное нетождество. Но оно есть также и определение тождества в противоположность нетождеству» (Там же, с. 33). «Тождество есть лишь определение простого, непосредственного, мертвенного бытия; противоречие же есть корень всякого движения и жизненности; лишь поскольку нечто имеет в себе самом противоречие, оно движется, обладает побуждением и деятельностью» (*Гегель Г.В.Ф.* Наука логики. М., 1937. Т. 1, кн. 2. С. 42).

2* Г. Грассман приводит восходящее к Лейбницу, а еще раньше к схоластическим логикам (без упоминания этого) определение равенства, следующее из него правило замены равным и одно из свойств отношения равенства, которое вытекает из этого правила. При этом не оговаривается, но неявно подразумевается, что речь идет об *истинных* высказываниях (суждениях). Это – знаменитый принцип salva veritate (замена с сохранением истинности).

3* Понятие *соединения* (связи, связывания) – это у Г. Грассмана прежде всего произвольная бинарная операция, обозначаемая словами Knüpfung, knüpfen, Verknüpfung и т.п.; но не только – это и *результат* связи, т.е. соответствующая *форма*. И это несмотря на то что выше автор различает соединение и результат соединения; но в словах: «сочленение, состоящее из многих членов» имеется в виду не операция, а ее результат – многочленная форма. Такое же терминологическое смешение будет затем и в трудах Роберта Грассмана. Впрочем, это не препятствует пониманию рассуждений Грассмана, так как из контекста всегда можно установить, о чем идет речь: об операции или ее результате, т.е. полученной с ее помощью форме, или величине. Напомним, что и в современной логике такие термины, как конъюнкция и дизъюнкция, понимаются тоже двояко, обозначая, в зависимости от смысла рассуждения, то операцию & или $\vee$, то конъюнктивную либо дизъюнктивную формулу.

4* «Скобкой» Герман Грассман – а потом и Роберт – называют совокупность *двух* знаков – открытия и закрытия скобки (в современной логике – совокупность левой и правой скобки). Как следует из сказанного, в языке «теории форм», содержащем единственную бинарную операцию $\frown$, скобка (в грассмановском смысле) может удаляться тогда, когда она либо внешняя (для всей формы), либо форма многочленная, и скобки могут быть восстановлены, говоря современным языком, по ассоциативности влево.

5* Грассман употребляет термин «совместимость» (die Vereinbarkeit) для обозначения свойства, которому в настоящее время в математике соответствует «ассоциативность».

6* То есть из закона ассоциативности для операции $\frown$. Следующее далее доказательство того, что ассоциативность может быть распространена на формы, которые содержат любое число членов, связанных операцией $\frown$, – и, значит, скобки могут быть удалены по ассоциации влево, – представляет собой «свернутое» индуктивное доказательство. Вводя для «форм» единственную бинарную ассоциативную операцию $\frown$, Г. Грассман получает понятие *полугруппы*.

7* Это аналогичное – «свернутое» индуктивное – доказательство свойства операции $\frown$, подчиняющейся законам ассоциативности и коммутативности, и Г. Грассман после введения операции, обратной по отношению к операции $\frown$, приходит к понятию *коммутативной* группы.

8* Аналитическая процедура – разыскание x, такого что: 1) $x \frown b = a$ или 2) $b \frown x = a$. В случае коммутативности операции $\frown$: $x \frown b = b \frown x = a$. Так как x зависит от a и b, то есть порождается из них с помощью некоторой бинарной операции, которую ниже Г. Грассман обозначает знаком $\smile$, то мы имеем: $(a \smile b) \frown b = b \frown (a \smile b) = a$.

9* Из определения аналитического сочленения следует, что в формуле $a \smile b \frown b = a$ форма $a \smile b$ рассматривается как нечто единое, то есть исходное выражение следует воспринимать как $(a \smile b) \frown b = a$, а запись вида $a \smile b \smile c$ предполагает ассоциативность аналитической операции влево, то есть что $a \smile b \smile c = (a \smile b) \smile c$. Последующие выкладки Г. Грассмана становятся яснее, если в нужных случаях расставлять скобки, отсутствующие в используемых им формах.

10* Это рассуждение имеет вид:

$$\begin{aligned}((a \smile b) \smile c) \frown (b \frown c) &= ((a \smile b) \smile c) \frown (c \frown b)\\ &= (((a \smile b) \smile c) \frown c) \frown b\\ &= a.\end{aligned}$$

Здесь и в последующих выкладках существенно используется правило замены равным.

11* Например, $a \cup b \cup c \cup d = a \cup b \cup (c \cap d)$
$$= a \cup (b \cap c \cap d).$$

12* Это рассуждение Г. Грассмана становится более понятным, если восстановить скобки:

$$a \cup (b \cup c) = ((a \cup (b \cup c)) \cup c) \cap c$$
$$= (a \cup ((b \cup c) \cap c)) \cap c = (a \cup b) \cap c.$$

13* Например:

$$a \cup (b \cap (c \cup (d \cap f))) = a \cup b \cup c \cup d \cup f.$$

14* То есть из принятых допущений не следует, что

$$c \cap (a \cup b) = (c \cap a) \cup b.$$

15* «Однозначность анализа», согласно определениям Г. Грассмана, означает: если $a \neq a'$, то $a \cap b \neq a' \cap b$, откуда получается, что равенство $a \cap b = a' \cap b$ влечет $a = a'$. Тогда из того, что $((a \cap b) \cup b) \cap b = a \cap b$, следует, что $(a \cap b) \cup b = a$.

16* Выкладки Г. Грассмана в этом параграфе становятся понятнее, если в рассматриваемых формах восстановить подразумеваемые в них скобки.

17* Здесь Г. Грассман заканчивает определение понятия *коммутативной группы*. См. об этом Послесловие (в данной книге, с. 358–361).

18* Заметим, что Г. Грассман для «сложения и вычитания однородных форм» еще не определил отношение «больше»; оно представляется здесь ему, по-видимому, интуитивно понятным, так как уже все подготовлено для перехода к арифметике *целых* чисел.

19* Ф. Энгель в комментариях к «Учению о протяженностях» (1844 г.) считает эту фразу Г. Грассмана непонятной: ему не ясно, почему одна операция должна быть определена с помощью другой (*Engel F.* Anmerkunger zur Ausdehnungslehre von 1844 // Hermann Grassmann Gesammelte mathematische und physikalische Werke. Bd. I. Thl. 1. S. 407). Однако смысл слов Г. Грассмана легко усмотреть из сказанного им перед тем: он переходит к рассмотрению *отношений* между двумя различными операциями, а задание такого отношения может рассматриваться как определение одной операции с помощью другой.

20* Приводимые в нашем переводе параграфы 13 и 14 – «Das Ausdehnungsgebilde, die Strecke und das System erster Stufe», а также параграф 16 – «Systeme hoherer Stufen» (так же как пропущенный при переводе параграф 15, не представляющий интереса с точки зрения целей данного издания) уже не относятся к «учению о формах». Этими параграфами открывается первый раздел «Учения о протяженностях», обозначенный как «теоретическое построение». Мы приводим перевод только трех параграфов этого раздела с тем, чтобы дать представление о том, каким образом понятия, развитые в данном «Очерке» Г. Грассмана, применяются в процессе развертывания его теории. При ознакомлении с этими параграфами полезно учесть «Введение в науку об экстенсивных величинах...», перевод которого помещен ниже.

Параграфы 13 (кроме первого абзаца и подстрочного примечания к нему), 14 и 16 имеются в русском переводе, выполненном Б.А. Розенфельдом (см.: Хрестоматия по истории математики. Арифметика и алгебра. Теория чисел. Геометрия / Под ред. А.П. Юшкевича. М.: «Просвещение», 1976. С. 290–294). Этот перевод и примечания к нему были учтены при подготовке данного издания.

21* В переводе, указанном в предшествующем комментарии, термин Г. Грассмана *der erzeugende Punkt* передан выражением «образующая точка». Такой перевод грассмановского термина соответствует сложившейся математической терминологии, но не отвечает «генетической» установке его автора. Поэтому мы остановились на выражении «порождающая точка».

22* Г. Грассман имеет в виду возврат от отношений геометрии как «реальной» науки к отношениям «формальным» – устанавливаемым на основе «чистого учения о формах». Б.А. Розенфельд в примечании к этому месту грассмановского текста истолковывает «понятийные отношения» как отношения многомерной геометрии в современном смысле – в отличие от «пространственных» отношений геометрии трехмерного пространства (см. книгу, упомянутую в коммент. 21*).

23* В оригинале *das Gebilde*. Этот термин по-русски можно передать как «образ» (как и поступает Б.А. Розенфельд). Однако этот перевод не передает всей тонкости мысли Г. Грассмана. *Das Gebilde* у него – это то, что порождено, образовано, т.е. *образование*.

24* Впоследствии «протяженное образование первой ступени» окажется ориентированным отрезком, начало и конец которого суть начальный и конечный элементы.

25* «Система (область) первой ступени» относится к «протяженному образу первой ступени» как прямая – к ориентированному отрезку этой прямой (примечание Б.А. Розенфельда).

Наука об экстенсивных величинах, или Учение о линейных протяженностях. Введение

Это Введение (Einleitung) помещено в «Ausdehnungslehre» 1844/1878 гг., оно занимает в нем с. XIX–XXXII (1844 г.) и с. XXI–XXXIV (1878 г.); в издании Ф. Энгеля его можно найти в т. I, части 1, с. 22–32.

1* Деление наук на реальные и формальные восходит, по крайней мере, к Лейбницу. Но во времена Г. Грассмана в философии и математике этот взгляд был отнюдь не общепринят, хотя в преподавании нашел отражение в подразделении учебных заведений на классические и реальные.

2* Подобная трактовка «формальных наук», к которым Г. Грассман относил математику и логику, сразу встретила возражения. Так, Э.Ф. Апельт (Apelt), экстраординарный профессор Иенского университета, в письме к Мёбиусу, датированном 3 сентября 1845 г., писал, что, по его убеждению, в основе «грассмановского странного учения о протяженностях» лежит «ложная философия математики. В ней, как кажется, совершенно проигнорирован существенный характер математического познания – наглядность. Столь *абстрактное* учение о протяженностях, которое он пытается развить, может быть разработано, только если базироваться на [одних] понятиях. Но источник систематического познания заключен не в понятиях, а в наглядном созерцании» (цит. по: *Engel F.* Hermann Grassmans Gesammelte mathematische und physikalische Werke. Druck und Verlag von B.G. Teubner. Leipzig. 1911. С. 101).

3* Эти слова – предвосхищение позднейшего взгляда интуиционистов и конструктивистов на математику и (математическую) логику как на науку об умственном конструировании. Ср.: *Марков А.А.* О логике конструктивной математики. М.: Знание, 1972. С. 4.

4* Таким образом, основополагающие допущения – Grundsätze, т.е. аксиомы, по Г. Грассману, обязаны носить *содержательный* характер. Эта точка зрения господствовала в философии математики вплоть до работы Д. Гильберта «Основания геометрии» (1899) и вообще развития *аксиоматического метода*.

5* Из этого, добавленного в 1877 г., примечания Г. Грассмана следует, что он считал себя, и по праву, одним из создателей математической логики, которую он здесь – в соответствии со своей концепцией формальных и реальных наук – называет *формальной* логикой. Ни в одном из доступных авторам этих строк сочинении по истории математической (символической) логики Герман Грассман не указан как один из создателей алгебры логики, получивший свои результаты независимо от Дж. Буля, А. Де Моргана, Ст. Джевонса и др. В лучшем случае упоминается Роберт Грассман.

6* Этот взгляд на философские науки, включая диалектику как логику, отражает влияние Шлейермахера. Фридрих-Эрнст Шлейермахер (1768–1834), немецкий богослов и философ, профессор Берлинского университета, член академии наук Берлина. Отличался чрезвычайной религиозностью. Религию понимал как интимную жизнь духа, защищал полную свободу религиозной жизни от вмешательств государства. Отрицательно относился к культу и обрядам. *Schleiermacher*. Reden ueber die Religion (1799, 1888), Monologen (1800, 1871), Der christische Glaube (1821–22, 1889).

7* Это так в *немецком* языке, где различаются *vermehren* и *vermindern*, с одной стороны, и *vergrössern* и *verkleinern* – с другой. Русский язык этого различия не улавливает.

8* Впоследствии Р. Грассман, развивая идеи старшего брата, использовал термины «форма» и «величина» как синонимы, причем предпочитал последний термин.

9* Поначалу может показаться, что здесь вполне кантовское понимание пространства и времени: ведь, согласно Канту, эти категории – априорные формы чувственного восприятия, о чем фактически говорит и Г. Грассман. Однако то обстоятельство, что автор «учения о протяженностях» исключает из (чистой) математики геометрию – совсем не кантовская мысль.

10* *Форометрия* (die Phorometrie от греч. *Pherei* – нести) – то же, что кинематика.

11* Здесь и далее рассуждения Г. Грассмана о противоположности и взаимопроникновении одинакового и различного, дискретного и непрерывного, становящегося и ставшего, актов полагания и связывания, интенсивных и экстенсивных величин и т.п. были вполне в духе диалектической философии его времени: и Гегеля, и Шлейермахера, да и других представителей немецкой философии его эпохи. Они не встретили понимания современников Г. Грассмана – математиков и логиков. В своем Предисловии к изданию трудов Г. Грассмана по математике и физике Ф. Энгель отмечает, что философские установки последнего отталкивали от него специалистов (*Engel F*. Vorbermerkungen // Hermann Grassmanns Gesammelte mathematische und physikalische Werke. Bd. I. T. 1. S. V). Например, Мёбиус, один из немногих математиков, благосклонно относившихся к математическим исканиям Г. Грассмана, писал в одном из своих писем (декабрь 1846 г.), что он смог одолеть лишь две страницы его книги (Ibid. S. 102).

12* См. коммент. 2* к работе Р. Грассмана «Учение о величинах ⟨…⟩ Введение».

13* Здесь «вещь» (Ding) – свойство, особенность (Besonderheit). Это существенно, так как «вещь» может пониматься как принадлежащая к реальности, Грассман же имеет в виду умственные конструкции, поскольку речь у него идет о «чистой математике».

14* Ср. § 13, 14 которыми открывается грассмановское «учение о протяженностях», – их перевод помещен в конце «Очерка общего учения о формах» (с. 72–76 наст. изд).

15* В оригинале Kraft – сила, т.е. вектор. Термин «масса», принятый в переводе труда Ф. Клейна «Лекции о развитии математики в XIX столетии» (М.: Наука, 1989. Т. 1. С. 198, переводчик Н.М. Нагорный) соответствует скалярной величине.

16* Кратко об историко-математических фактах, которые имеет в виду автор, см.: «История математики: В 3 т. / Под ред. А.П. Юшкевича. М., 1970. Т. 2. Гл. 5 и 8.

17* См. выше «Очерк общего учения о формах» (с. 59, 181, 222–223, наст. изд.), а также помещенный ниже перевод «Учения о величинах» Р. Грассмана.

18* В этом параграфе, как и в предшествующем изложении, Г. Грассман в рамках своей *генетической* концепции осмысления математического и философского знания раскрывает то, что в истории философии носит название *принципа индивидуации*. Это – «одна из старейших философских проблем, определяющих неповторимость (индивидуальность) любой природной субстанции. Философские представления о мире неизменно формулировались в категориях "единое–многое", а это естественно порождало вопрос: если каждый элемент множественности причастен к единому, то в чем он отличен от единого как его элемент?». Те или иные ответы на этот – и связанные с ним – вопрос получили название упомянутого принципа после появления труда Фомы Аквинского «De principio individuationis». См.: *Новоселов М.М.* Индивидуация // Новая философская энциклопедия. М., 2001. Т. 2. С. 103 и далее. В случае абстрактных объектов – а именно они рассматриваются здесь Г. Грассманом – индивидуация неотделима от соответствующей научно-философской концепции, контуры которой и пытается обрисовать автор в настоящем «Введении».

19* Ср. ниже § 13, 14 и коммент. к ним.

20* Математический смысл сказанного в этом и предшествующем параграфе сводится к теории *n*-мерных пространств.

21* Это понимание научности восходит к Шлейермахеру.

22* При всей ориентации на чисто абстрактный подход к «формальным наукам» Г. Грассман, таким образом, учитывал и *эвристическую* сторону дела, что понятно, так как преподавательская деятельность занимала в его жизни значительное место.

Предисловия к сочинениям об учении о формах и протяженностях

Предисловие к сочинению 1844 года

Текст этого предисловия (*Vorrede*) к первому изданию «Учения о протяженностях (1844) занимает в нем с. III–XIV, помещен в издании трудов Г. Грассмана по математике и физике, осуществленном Ф. Энгелем: Hermann Grassmann's Gesammelte mathematische und physikalische Werke. Bd. 1. Theil 1. Herausgegeben von F. Engel. Leipzig, 1911. S. 7–17. Настоящий перевод выполнен по этому изданию.

1* Основное назначение этого *Vorrede* – обоснование развиваемого Г. Грассманом подхода к математике как науке, а также ее отношения к «родственным предметам», особенно физике. Существенно, что автор выходит за рамки того, что ниже он представляет вниманию читателя, очерчивая вопросы, которые должны были войти в задуманную им вторую, так и не написанную, часть его труда.

2* Лагранж Жозеф Луи (*La Grange – J.L. Lagrange*) (1736–1813) – французский математик, механик, астроном, член Парижской Академии наук, почетный член Петербургской Академии наук. Его «Аналитическая механика» (Mecanique analytique) издана в 1788 в одном томе; позднее переиздана в двух томах (1811–1815). Имеется перевод на русский язык: *Лагранж Ж*. Аналитическая механика. Т. 1, 2. М.; Л.: ГТТИ, 1950.

3* Относительно исследования Грассманом проблемы приливов и отливов см. *Engel F*. Grassmanns Leben // Hermann Grassmanns Gesammelte mathematische und physikalische Werke, dritten Bandes, zweiter Thl. X Kapital.

4* Лаплас Пьер Симон (*La Place, Laplace P.S.)* (1749–1827) – французский математик, физик, астроном, член Парижской Академии наук, председатель Палаты мер и весов. Пятитомная «Небесная механика» (Traite de mecanique celeste) Лапласа публиковалась с 1799 по 1825 г.

5* Отказ от использования системы координат – отличительная черта «новой науки» Г. Грассмана, позволившая ему развить теорию многомерных пространств.

6* Грассман имеет в виду сочинение Мёбиуса «Барицентрическое исчисление» (Das barycentrische Calcul. Leipzig, 1827. О Мёбиусе см. коммент. 1 к соч. «Геометрический анализ».

7* Мотивы, по которым Г. Грассман исключает геометрию из математики как чисто абстрактной науки, более подробно изложены им во «Введении» к сочинению 1844 г. (см. с. 79 наст. изд.).

8* В данном Предисловии дается экспозиция того, что Г. Грассман собирался изложить во второй части своего труда. Хотя эта часть так и не была разработана, идеи, излагаемые им ниже, вошли в «евклидов» вариант «Учения о протяженностях», опубликованный в 1861/62 гг.

9* «Внешнее произведение» Г. Грассмана – это в современной математике *векторное произведение*. Независимо от автора «Учения о протяженностях» оно было открыто У.Р. Гамильтоном. Попытки построения трехмерного аналога комплексных чисел привели Гамильтона к созданию теории кватернионов, которую он изложил сначала в работе «О кватернионах, или О новой системе мнимостей в алгебре» (On quaternions, or On a new system of imaginaries in algebra. Dublin, 1844–1850), а затем в «Лекциях о кватернионах» (Lectures on quaternions. Dublin, 1853). См., напр.: *Кузичева З.А*. Векторы, алгебры, пространства. М.: Изд-во «Знание», 1970. Подробно история векторного исчисления изложена в кн.: *Александрова Н.В*. Из истории векторного исчисления. М.: Изд-во МАИ, 1992.

10* Здесь Г. Грассман наметил представление теории комплексных чисел, перекликающееся с изложением Л. Эйлера (1707–1783) в его трактате «Введение в анализ бесконечного». 1748.

11* Как отмечает Ф. Энгель, можно лишь удивляться, что Г. Грассман создал свой труд в условиях очень большой педагогической загруженности. См.: *Engel F*. Grassmanns Leben... цитированное в Kap. XII S. 92.

12* Ср. сказанное о Гегеле и его школе во «Введении» к труду 1844 г. (с. 225, 243, 247, 338 наст. изд.).

13* Эта установка – указать место учения о протяженностях в «системе знания» – впоследствии, уже в сочинениях его брата Роберта, вылилась в многотомный труд, далеко отошедший от первоначальных скромных замыслов Г. Грассмана.

Предисловие к изданию 1877–1878 годов

14* «Строго научный, основанный на исходных понятиях» способ изложения математики, на преимуществах которого до конца дней настаивал Г. Грассман (ибо только этот способ, по его убеждению, позволяет разобраться в этом «целостном сооружении», которое представляет собой математика), – это и есть та *генетическая* установка, которая изложена им во Введении к труду 1844 г. и которая в простейших разделах математики и логики оборачивается Грассмановым индуктивно-рекурсивным подходом. Мысль об оправданности своего «способа изложения» Г. Грассман считал настолько важной, что вернулся к ней в конце данного Предисловия и подчеркнул, что считает его «полностью определенным», хотя он больше отвечает философски образованному читателю, чем читателю-математику.

15* Г. Грассман дважды безуспешно пытался добиться места преподавателя (профессора) в университете. См.: *Engel F.* Grassmanns Leben... Кар. IX.

16* Клебш А. (*Clebsch A.*, 1833–1872) – известный немецкий математик, в 60-е годы XIX в. работал профессором Политехнической школы в Карлсруэ.

17* Шлегель В. (*Schlegel S.V.*, 1843–1913) – немецкий математик, изучал в Берлине математику и естественные науки. В математике был последователем и пропагандистом идей Грассмана; ему принадлежат следующие сочинения: «Untersuchungen über eine Flache 3 Ordnung nach Grassmann's Ausdehnungslehre» (1871); «System der Raumlehre. Nach den Principien der Grassmann'schen Ausdehnungslehre und als Einleitung in dieselbe darstellt. I Theil. Geometrie. Die Gebite des Punktes, der Geraden und der Ebene» (Leipzig, 1892); II Theil. Die Elemente der modernen Geometrie und Algebra (Leipzig, 1875); «Hermann Grassmann's Leben und Werke» (Leipzig, 1878) и др. Не без влияния Грассмана Шлегель занимался и многомерными геометриями, сочинения этого цикла он публиковал в 80-е годы XIX века.

18* Г. Грассман перечисляет следующие свои работы: «Zur Theorie der Curven 3. Ordnung», «Über zusammengehorige Pole und ihre Darstellung durch Producte», обе статьи опубликованы в *Göttingen Nachrichten*, 1872; S. 505, 567 соответственно; «Die neuere Algebra und die Ausdehnungslehre», in: Math. Annalen, Bd. VII, 1874; S. 538–548; «Die Mechanik und die Principien der Ausdehnungslehre», in: Math. Annalen, Bd. XII, S. 222–240, 1877; «Der Ort der Hamilton'schen Quaternionen in der Ausdehnungslehre», in Math. Annalen, Bd. XII, S. 375–386, 1877.

19* «Verwendung der Ausdehnungslehre für die Polarentheorie und den Zusammenhang algebraische Gebilde», in: Crelle-Borchardt Journal, Bd. 84. S. 273–283, 1878.

Геометрический анализ, основанный на открытой Лейбницем геометрической характеристике

1* «Геометрический анализ» – конкурсная работа Г. Грассмана, выполненная для представления на премию Общества князя Яблоновского в Лейпциге. Конкурсное задание было опубликовано 9 марта 1844 года в газете *Leipziger Zeitung*. Согласно условиям конкурса, работы должны были быть представлены до конца ноября 1845 г. Но весной 1846 года Общество связало конкурс с празднованием двухсотлетней годовщины со дня рождения Лейбница и отсрочило представление работ до марта 1846 г., при этом денежная премия была повышена вдвое – до 48 дукатов. По данной теме на конкурс поступила только работа Г. Грассмана, и он получил премию.

Перевод осуществлен З.А. Кузичевой с изданного Ф. Энгелем текста «Hermann Grassmanns gesammelte mathematische und physikalische Werke. Erster bandes erster Thl: die Ausdehnungslehre von 1844 und die Geometrische Analyse».

На титульном листе значится: «Geometrische Analyse, geknupft an die von Leibniz erfundene Geometrische Charakteristik. Gekronnte Preisschrift von H. Grassmann. Mit einer erlaeuternden Abchandlung von A.F. Moebius. Leipzig, Weidmann'sche Buchhandlung, 1847.

Мёбиус Август Фердинанд (1790–1868), с 1816 г. работал сначала астрономом-наблюдателем, а затем директором Плейсенбургской астрономической обсерватории в Лейпциге, одновременно был профессором математики Лейпцигского университета. Широкую известность получил его трактат «Барицентрическое исчисление» (Der barycentrische Calcul. Leipzig, 1827). «Барицентрические координаты» точек Мёбиус вводит так: пусть в вершинах фиксированного треугольника помещены массы m_1, m_2, m_3, тогда центр тяжести этих масс можно характеризовать числами m_1, m_2, m_3, определенными с точностью до общего множителя. «Барицентрические координаты» представляют собой частный случай однородных координат. См., напр.: *Розенфельд Б.А.* История неевклидовой геометрии. М.: Наука, 1976. С. 145–147; *Он же.* Геометрия // Математика XIX века. Геометрия. Теория аналитических функций / Под ред. А.Н. Колмогорова и А.П. Юшкевича. М.: Наука, 1981. С. 37–39.

2* Ньютон Исаак (1643–1727), учился в Кембридже, в 1668 г. получил степень магистра, с 1669 г. профессор в этом университете. В 1696 г. принял пост хранителя, а с 1699 г. – директора Монетного двора. С 1703 г. Ньютон – президент Лондонского королевского общества. В своем исчислении Ньютон исходил из кинематических соображений. Переменные величины он называл флюентами, рассматривая их как функции времени. Скорости изменения флюент, т.е. производные, он называл флюксиями. Свое исчисление он открыл в 1665 г. во время эпидемии чумы, от которой спасался в деревне. Ньютон неохотно публиковал свои сочинения, поэтому его результаты в этой области увидели свет поздно. Наиболее полно теория Ньютона изложена в сочинении «Метод флюксий и бесконечных рядов», опубликованном лишь в 1736 г.

3* Лейбниц Готфрид Вильгельм (1646–1716), учился в университетах Лейпцига и Иены, изучал философию и юриспруденцию. Отказавшись от университетской карьеры, Лейбниц поступил на службу сначала к Майнцкому курфюрсту, а в 1676 г. – к Ганноверскому герцогу. В 1700 г. Лейбниц организовал Берлинскую Академию наук и стал ее первым президентом. В отличие от Ньютона Лейбниц исходил из геометрических соображений при построении дифференциального исчисления, которое он открыл в 1675 г. Работа Лейбница «Новый метод максимумов и минимумов, а также касательных, для которого не служат препятствием ни дробные, ни иррациональные величины, и особый для этого вид исчисления» опубликована в 1684 г. С этого года исчисляется официальная история математического анализа. См.: напр.: *Петрова С.С., Демидов С.С.* Развитие математического анализа // Очерки по истории математики // Под ред. Б.В. Гнеденко. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1997. С. 7–93.

На русском языке в переводе А.П. Юшкевича опубликованы «Избранные отрывки из математических сочинений Лейбница» // Успехи математических наук. 1949. Вып. 1, № 3. С. 165–204.

4* В упомянутом в предшествующем примечании переводе А.П. Юшкевича, под заголовком «Геометрическая характеристика» помещены отрывки из писем Лейбница к Х. Гюйгенсу (от 8 сентября и от ноября 1679 г.) и к Лопиталю (от

27 декабря 1694 г.). В конце публикации А.П. Юшкевич дает примечание: «Во всех своих набросках по геометрическому исчислению Лейбниц пользуется понятием величины и, в сущности, не отказывается от координатных систем (биполярных и пр.). Каких-либо новых конкретных результатов Лейбниц при этом не получил, и его принципиальные соображения не нашли у современников сочувственного отклика, а затем были просто забыты.

Дальнейшее развитие геометрические идеи Лейбница получили уже в XIX веке и притом в различных направлениях (Мёбиус, Штаудт, Г. Грассман, векторное исчисление и т.д.). Г. Грассман посвятил разбору приведенного наброска Лейбница специальную работу: «Geometrische Analyse...» (цит. соч., с. 204).

5* Под «родственным анализом» Г. Грассман, вероятно, понимает связанные с идеями Лейбница работы математиков (Эйлер, Листинг), которые привели к созданию топологии (у Лейбница встречается термин analysis situs – анализ положения). См., например, упомянутую выше «Геометрию» Б.А. Розенфельда, § 6.

В конце XIX – начале XX в. изучением наследия Лейбница занимался Л. Кутюра, в результате он опубликовал сочинение: *Couturat L.* La logique de Leibniz. Paris, 1901, – в котором на с. 388–430, 529–538 рассматриваются относящиеся к топологии попытки Лейбница. Отмечается, в частности, что при этом Лейбниц опирался на понятие подобия.

6* О том, что это не тот путь, каким я пришел к своему анализу, вряд ли стоит говорить». Действительно, Грассман в своем геометрическом анализе не развивает топологический поход. Он строит новый анализ в духе «Учения о протяженностях», развивая и уточняя понятия и операции, введенные в этом учении. Изложение геометрического анализа уже не предваряется туманными «философскими» рассуждениями, какими изобилуют Предисловие и Введение к труду 1844 г. И стиль в этом сочинении таков, что все понятия и операции представляются естественными и убедительными. Удивительно, поэтому, что и на геометрический анализ современники не обратили должного внимания. Тем более что работе (заслуженно!) присуждена премия Яблоновского общества.

7* Разбивка текста Грассмана на параграфы, названия которых помещены в квадратных скобках, осуществлено в переиздании в 1969 г. составленного Энгелем двухтомного собрания сочинений Г. Грассмана. Следующий параграф в этой рубрикации назван «Конгруэнтность и коллинеарность». В этом параграфе Грассман вместо отношения конгруэнтности вводит отношение равенства фигур и в дальнейшем уже не использует обозначений Лейбница.

Третий параграф озаглавлен «Точечные и линейные величины». В последующих параграфах (их в работе 23) вводятся операции над линейными и точечными величинами, в частности, определяются операции сложения этих величин, а также внутреннее и внешнее умножение. Затем дается приложение развитого учения к геометрии, к теории движения и к некоторым разделам механики (параграфы 10–13).

В последующих параграфах обобщаются полученные в упомянутых разделах результаты. На основании даже такого краткого описания того, как построено сочинение Грассмана, ясно, что он развивает здесь свои идеи, заложенные в «Ausdehnungslehre».

8* В письме к Гюйгенсу Лейбниц так определяет конгруэнтность фигур: «...Между треугольниками *ABC* и *DEF*, согласно порядку точек, существует конгруэнция, [если] они могут занимать в точности одно и то же место и один из них можно наложить или поместить на другой, не меняя в этих фигурах ничего, кроме местоположения» (см.: Лейбниц. Новый метод максимумов и минимумов, а также касательных для которого не служат препятствием ни дробные, ни иррациональные величины, и особый для этого вид исчисления // Избр. отрывки из математических сочинений Лейбница / Пер. А.П. Юшкевича // Успехи матем. наук. 1949. Вып. 1, № 3. С. 200).

9* Грассман считает основным отношением не конгруэнтность, а коллинеацию, – одно из проективных преобразований (соответствий). Соответствие плоскостей π и π' называется коллинеарным (коллинеацией), если каждой точке и каждой прямой плоскости π соответствует единственная точка и единственная прямая плоскости π', при этом сохраняется инцидентность точки и прямой. Говорят, что прямая и точка инциденты, если точка лежит на данной прямой или прямая проходит через данную точку.

10* Здесь Г. Грассман молчаливо предполагает, что рассматриваемая ограниченная прямая и отрезки, на ней лежащие, имеют одинаковую длину, т.е. «отрезок» отличается от «ограниченной прямой» только тем, что для него указаны начальная и конечная точки.

11* Определение 4 – привычное для нас определение скалярного произведения двух векторов как произведение их длин на косинус угла между ними, если учесть, что внутреннее произведение параллельных отрезков Грассман определяет как произведение их длин (Определение 3).

12* Внешнее умножение отрезков Г. Грассман определяет в «Учении о протяженностях», при этом его основная цель – определить внешнее умножение произвольных протяженностей. Этому определению посвящено несколько разделов трактата. В качестве наглядного примера он приводит внешнее умножение направленных отрезков. Внешнее произведение непараллельных отрезков есть ориентированный параллелограмм, построенный на этих отрезках в предположении, что они исходят из одной и той же точки. Внешнее произведение отрезков a и b не является коммутативным: $a \cdot b = -b \cdot a$. Внешнее произведение параллельных отрезков равно нулю.

13* Отмеченный Г. Грассманом параллелизм в настоящее время называют принципом двойственности, согласно которому, заменяя в любом верном предложении все входящие в него понятия двойственными им, получаем верное предложение. Например, в проективной геометрии двойственными являются точка, инцидентная прямой, и прямая, инцидентная точке.

14* В следующих параграфах Г. Грассман иллюстрирует преимущества методов геометрического анализа, решая некоторые задачи геометрии и механики. Затем продолжает развивать свою теорию, распространяя введенные ранее операции на новые объекты, вводя и исследуя новые операции. Поскольку приведенного материала для освещения данной темы достаточно, а последующий не содержит для нас принципиальных моментов, то мы их не приводим.

Из «Арифметики»

1* Lehrbuch der Arithmetik für hohere Lehranschalten von *Hermann Grassmann*, professor am Gymnasium zu Stettin. Berlin, 1861. Verlag von Th. Chr. Fr. Enslin (Adolf Enslin). Сочинение частично было опубликовано впоследствии в собрании сочинений Г. Грассмана: Lehrbuch der Mathematik für hohere Lehranschalten etc. Erster Theil: Arithmetik. In: Hermann Grassmann Gesammelte mathematische und physikalische Werke. Zweiten Bandes erster Thl: die Abhandlungen zur Geometrie und Analysis.

Herausgegeben von E. Studi, G. Scheffers, F. Engel. Leipzig. Druck und Verlag von B.G. Teubner, 1904. S. 295 ff: XXIII. Stucke aus dem Lehrbuch der Arithmetik.

2* В настоящее время в такой ситуации часто говорят: «скобки восстанавливаются по ассоциации влево».

3* Вероятно, это первое в математике и логике рассуждение о скобках. Ср., напр.: *Клини С.К.* Введение в метаматематику. М.: Наука, 1957. С. 28–29.

4* Термин Грассмана *Grundreie* традиционно переводится как «основной ряд». Термином «последовательность» мы передаем немецкое *Reihe*, если в тексте Грассмана идет речь о «ряде», отличном от основного.

5* Термин Грассмана *Eincheit* мы передаем словом «единичность». Словом «единица» мы переводим термин Грассмана *Eins*, который он использует для случая натурального ряда чисел: 1, 2, 3, ...

6* Определение 15 Грассмана, по существу, является рекурсивным.

7* Доказательство формулы 17, таким образом, основано на применении правила замены равного равным и продвижении слева – направо.

8* Доказательство, в ходе которого указываются номера используемых (на каждом шаге) предложений, является не чем иным, как доказательством с анализом.

9* Доказательство Предложения 20 – первый случай индуктивного доказательства. Начинается с индукционного шага по правой части основного ряда.

10* Теперь индукционный шаг – по левой части основного ряда.

11* Случай, когда $a = e$, – это базис индукции.

12* Предложение 22 – это свойство ассоциативности сложения.

13* В скобках, относящихся к последней строке доказательства под номером 17b, Грассман имеет в виду переход справа – налево в равенстве 15.

14* Иными словами, прибавление нуля к a не меняет значения этого a.

15* В дальнейшем тексте мы используем термин «разность».

16* Равенство 28: $a - b + b = a$, следует воспринимать как $(a - b) + b = a$.

17* В равенстве $a + b - b + b = a + b$ слагаемое $a + b - b$ предполагается (молчаливо) заключенным в скобки.

18* Указанное в примечании преобразование осуществляется на основе замены равных равными.

19* В настоящее время в математике вместо оборота «положительное значение числа» говорят «абсолютная величина числа». Заметим, что еще в начале XX в., для того чтобы показать, что некоторое число – отрицательное, писали, например, $-a$, т.е. под буквой a (без знака) понимали положительное число.

20* Операции умножения Грассман также дает рекурсивное определение.

21* Грассман употребляет термин «именованные числа» в смысле, отличном от того, в каком этот термин употреблялся в арифметике. В русских учебниках арифметики было принято подразделять числа на отвлеченные и именованные. Последние определялись, например, так: «*Именованное число*, в отличие от отвлеченного, всякое число единиц одного известного рода, например, 5 человек, фунтов и т.д.» (*Брокгауз Ф., Ефрон И.* Малый энциклопедический словарь. Т. 2. 1907 (репринтное издание 1997 г.), с. 1830). В Англии были употребительны термины «конкретные» и «абстрактные» числа соответственно. См., напр.: *Morgan A.De.* Elements of Algebra. London, 1827. P. II, где он пишет: «Когда 1, 2, 3, ... означают 1 миля, 2 мили, 3 мили, ...или 1 пинта, 2 пинты, 3 пинты, и т.д., тогда эти числа называются *конкретными*, но когда мы, отвлекаясь от (конкретных) понятий, говорим *один, два* и т.д., тогда числа называются *абстрактными* (отвлеченными)».

Часть вторая

Логическое и методологическое учение

Учение о формах

Титульный лист книги: Die Formenlehre oder Mathematik. Von Robert Grassmann. Stettin, 1872. Druck und Verlag von R. Grassmann. Контртитульный лист: Die Wissenschaftslehre oder Philosophie. Von Robert Grassmann. Zweiter Ergänzungstheil die Formenlehre. Выходные данные те же. Поскольку все книги Р. Грассмана выходили в его издательстве и печатались в его типографии, в дальнейших ссылках на его книги мы не будем приводить их одинаковые выходные данные. На с. 16 книги появляется новый титульный лист: Die Grösenlehre. Ersters Buch der Formenlehre oder Mathematik (выходные данные те же; объем всей книги – 52 страницы; при последующих ссылках: Die Formenlehre, 1872). «Учение о формах» Роберта Грассмана 1872 года явилось первой книгой серии из пяти книг, изданных, по-видимому, одновременно, во всяком случае, в одном и том же году. Четырьмя остальными были: Die Begriffslehre oder Logik. Zweites Buch der Formenlehre oder Mathematik, перевод которой помещен ниже (оригинал составляет 43 страницы; при дальнейших ссылках: Die Logik, 1872); Die Bindelehre oder Combinationslehre. Drittes Buch der Formenlehre oder Mathematik, 24 страницы; Die Zahlenlehre oder Arithmetik. Viertes Buch der Formenlehre oder Mathematik, 62 страницы; Die Ausenlehre oder Ausdehnungslehre. Fünftes Buch der Formenlehre oder Mathematik, 26 страниц; Worterverzeichniss (ко всем пяти книгам 1872 г.), 7 страниц. Эти книги представляют собой единое целое, и в экземпляре, которым пользовался переводчик, переплетены в единый том. В его конце помещен предметно-именной указатель ко всем пяти книгам. Помета на контртитуле книги «Die Formenlehre», относящаяся ко всем пяти, – «Часть вторая, дополнительная» подразумевает *основную* часть, которая вышла *позже*, в 1875–1876 гг.

1* «Введение в учение о формах» (Einleitung in die Formenlehre) занимает в книге с. 5–14. Далее следует еще один титульный лист: «Учение о величинах» (с. 16). Затем пагинация продолжается, охватывая с. 17–52.

2* Вводя в «Учение о формах (величинах)» свою необычную терминологию, Р. Грассман каждый термин сопровождает – в подстрочных примечаниях – этимологическими пояснениями, свидетельствующими об основательных его познаниях в области сравнительного языкознания. Мы в нашем переводе не всегда будем их воспроизводить, а там, где мы это делаем, мы не пытаемся сопоставлять их современным лингвистическим представлениям.

Грассмоново Formenlehre мы переводим «учение о формах». Перевод «теория форм» хотя и отвечал бы принятому в отечественной литературе термину «теория множеств», но он не согласуется с Wissenschaftslehre штеттинского мыслителя. Впрочем, по стилистическим соображениям в научном аппарате данного издания (послесловие, комментарии) мы будем использовать и термин «теория форм» (соответственно, величин).

3* По Р. Грассману, учение о формах не нуждается в учении о языке, но, как становится ясно из последующего, *изложение* учения о формах должно следовать за учением о языке.

[4*] У Р. Грассмана фигурируют термины Knüpfung(en), Verknüpfung(gen) и соответствующие глаголы. Они служат для обозначения как бинарной (двуместной) операции над формами (величинами), так и ее результата – получающейся формы или величины. Поэтому напрашивается как будто бы однозначный перевод: *связь, связка* (и соответствующие глаголы), но это не всегда отвечает сути дела. Мы будем передавать соответствующую терминологию Грассмана выражениями, зависящими и от контекста, и от стиля той или иной фразы: *связывание, соединение, связь, связка*.

[5*] В этом абзаце формулируется грассмановская генетическая установка. «Учение о формах» рассматривается как наука об умственном конструировании, умственных конструкциях. См. об этом наше Послесловие.

[6*] Р. Грассман присоединяется, не оговаривая этого, к известному Лейбницеву определению отношения равенства; эта же формулировка дословно повторяется в разделе 1 «Определения и обозначения» (с. 184, 192, 290 наст. изд.). Читателю следует быть готовым к тому, что в дальнейшем данное определение равенства распространяется и на предложения, получающиеся из величин путем связывания их знаком равенства. Полностью смысл грассмановского истолкования равенства раскрывается ниже, когда он рассматривает предложения, относящиеся к равенству, и формулирует два «закона равенства», определяющие метод «прямого доказательства», и метод доказательства «поступательного», или индуктивного.

[7*] Это определение отношения неравенства у Р. Грассмана неверно. Вместо слов «ни в одной связи» должно стоять: «хотя бы в одной связи». Это определение противоречит последующим его определениям и рассуждениям. Например, в *Учении о понятиях* (№ 10) доказана формула $a + a \cdot b = a$, где «+» и « · » понимаются как операции объединения и пересечения объемов понятий. Согласно грассмановскому определению неравенства, ни в одной связи учения о величинах (а учение о понятиях предполагает его данным) величину b нельзя заменить никакой величиной c, не изменив значения формулы $a + a \cdot b = a$. Но из свойств указанных операций следует, что $a + a \cdot b = a + a \cdot c = a$ для любых a, b, c. Странно, что подобное определение неравенства Р. Грассман повторяет *во всех* своих сочинениях, где говорится о теории величин.

[8*] Это замечание Р. Грассмана можно понять так, что *мысли* о собаке, любви и пр., возникающие в разное время и в разных ситуациях, не одинаковы. Здесь он противопоставляет понятиям как явлениям мышления формы (величины) как *конструктивные объекты*. Впрочем, в его «учении о понятиях» понятия трактуются тоже как такого рода объекты. В сочинении 1900 г. Р. Грассман поясняет: элемент – это «не отдельный вид величин, вовсе нет. Все, что человек может помыслить, можно рассматривать в качестве чего-то простого, того, что подлежит связыванию с другими величинами; в остальном элемент может содержать сколь угодно много частей, охватывать сколь угодно много предметов» («Логика», 1890, с. 3).

[9*] В работе 1872 г. Р. Грассман систематически использует термин «штифт», лишь изредка наряду с ним прибегая к его синониму – «элемент». Но в «Логике» 1890 г. он вместо «штифта» говорит о «простейшем» (Einfache), поясняя, что это *ein elementum*. На этом основании мы в нашем переводе используем слово «элемент», кроме тех случаев, когда автор прибегает к оборотам типа «штифты, или элементы».

[10*] Заметим, что буквы, используемые Р. Грассманом в качестве знаков величин, в оригинале набраны прямым шрифтом. В переводе мы во всех случаях

заменяем их курсивными буквами, что соответствует современной традиции формульной записи.

11* Р. Грассман делает очевидную для нас ошибку, утверждая, что *каждое предложение, которое доказано для некоторой буквы, тем самым справедливо для всех величин, которые может обозначать эта буква, т.е. для какой угодно величины.* Здесь его подводит увлеченность общностью, которая достигается с использованием буквенных обозначений. Впрочем, следующее затем предложение несколько смягчает (но не устраняет) это ошибочное утверждение.

12* Таким образом, буквы выступают в качестве (свободных) переменных для форм (величин). Вводимое ниже понятие о *связующих знаках* означает трактовку последних как переменных – для (бинарных) операций над величинами. Впрочем, *алгебраическая* экспликация построения Р. Грассмана позволяет избежать понятия *переменной*. Таковое станет необходимым только в логике, где Р. Грассману придется ввести (вернее, использовать) – он делает это неявно – квантификацию понятий.

13* «Скобкой» Р. Грассман называет совокупность двух знаков – открытия и закрытия скобки, без связи с характером их написания. В последующем переводе мы следуем в этом Р. Грассману, допуская, однако, и более привычное нам выражение «в скобках». Об использовании термина «скобка» см. также примеч. 4*к «Очерку общего учения о формах» Г. Грассмана.

14* В самом деле, при $n = 2$ число k скобок (в смысле Р. Грассмана) равно нулю: $k = 2 - 2$; таким образом, получается формула $a_1 \circ a_2$; при $k = 3 - 2 = 1$ мы имеем $(a_1 \circ a_2) \circ a_3$ и т.д. Таким образом, *внешних* скобок в формулах «теории форм» не предполагается. Р. Грассман был, насколько нам известно, первым из логиков, кто предполагал то, что ныне называется «теоремами о скобках в формулах». Стоит заметить, что, в отличие от современной логической практики (но в соответствии с практикой его времени), Р. Грассман считал, что если в формуле имеется *много* скобок, то целесообразно использовать скобки *различного* вида: круглые, квадратные, фигурные и т.д. Если же скобок *очень много*, то можно использовать индексированные скобки: (), (), (), …, ().

15* Здесь Р. Грассман очертил систему из четырех бинарных операций, определенных на элементах, замкнутых относительно этих операций, к которой он будет неоднократно возвращаться. Она возникает как спецификация произвольной бинарной операции $\circ$. Эту спецификацию можно представить следующими схемами:

Внутреннее (мыслимое) связывание элементов	Внешнее связывание элементов (ориентация на внешний мир)
$e \circ e = e$	$e \circ e \neq e$
сложение умножение	сложение умножение
$e + e = e \quad e \circ e = e$	$e + e \neq e \quad e \circ e \neq e$

В связи с соответствующими рассуждениями Р. Грассмана может возникнуть вопрос, каким же образом в случае *умственных* операций элементарные величины (штифты) могут трактоваться как конструктивные объекты. Впрочем, аналогичный вопрос можно поставить и по поводу «внешних операций», если считать их относящимися к вещным образованиям, которые могут быть изменчивыми и «неоднозначными». Ответ на этот вопрос заключается в том, что элементарные величины для Р. Грассмана суть проявления конструктивной деятельности ума, порождающей элементы, обладающие «одним, а не многими значениями» каждый, и представленные буквами, отличающимися свойством однозначной распознаваемости.

16* К различию четырех частных «ветвей» учения о формах, вытекающему из дистинкции внутреннего и внешнего сложения и умножения – операций, из которых только тот случай, когда $e + e \neq e$ и $e \cdot e = e$ приводит к обычному арифметическому пониманию суммирования и перемножения, – Р. Грассман присоединяет: в *логике* условие $e_1 + e_2 = 0$, где $e_1 \neq e_2$; в *комбинаторике* – возможность как того, что $e \cdot e = 0$, так и того, что $e \cdot e \neq 0$, а также того, что перемножение штифтов может быть коммутативным и некоммутативным; в *арифметике* – число единицу; в *учении о протяженностях* – также возможность как того, что $e \cdot e = 0$, так и того, что $e \cdot e \neq 0$; в связи с этим учением вводятся понятия об операциях *сплетения* (когда умножение штифтов коммутативно) и *заплетения* (когда оно некоммутативно), которыми он впоследствии будет активно пользоваться. Обратим внимание читателя на слова Р. Грассмана о том, что этой последней «ветви» учения о формах «больше всего *соответствует* внешний мир и его соотношения». Оно ясно показывает, что грассмановское «учение о внешнем» как *часть его «теории форм»* относится к внешнему миру лишь опосредованно – через создаваемую человеком теорию величин и двух ее «внешних ответвлений». Аналогичным является соотношение двух ее «внутренних ответвлений» и психического мира человека, включая мышление.

17* Это письмо отсутствует в русском переводе трудов Лейбница. Его следовало бы поместить во втором или третьем томе издания: Готфрид Вильгельм Лейбниц. Соч.: В 4 т. М.: Мысль, 1983. Т. 2; 1984. Т. 3. Р. Грассман цитирует Лейбница по изданию Л. Дютана: «G.V. Leibnitii opera omnia, nunc primam collecta in classes distributa prae fatigonibus et indicibus exornata, studio Ludovici Dutens. V. I–IV, Genovae, 1768». При жизни Роберта Грассмана появился еще ряд собраний сочинений Лейбница, более полных (издания И. Эрдмана, К. Герхардта и др.), но, насколько можно судить, автор «учения о формах» к ним не обращался.

18* В данном тексте Вагеций именуется «из Гиссена» (in Giessen), но во Введении к «Учению о величинах» 1890 г. (см. в наст. изд. с. 290) он пишет «in Giesen», т.е. «из Гизена». Соответствующее место в сочинении 1890 г. почти дословно повторяет сказанное в книге 1872 г., только цитата из письма Вагецию более полна.

19* Под «способом развертывания» у Грассмана фигурирует оборот: der Weg der Entwicklung, – судя по всему, имеются в виду эвристические компоненты дедуктивной работы ума, которые были постоянно в поле зрения Лейбница. Упоминаемая Р. Грассманом scientia de magnitudine – это проектировавшаяся великим мыслителем «универсальная характеристика» и «исчисление умозаключений», которые должны были сочетать логику доказательств и логику открытия.

20* Так же, как и Г. Грассман, Роберт Грассман считал – и с полным основанием, – что в «теории форм» следует сначала ввести *закон ассоциативности* (закон *объединения*, или *раскрытия скобок*), и лишь потом – *закон коммутативности* (закон *перестановки* величин); операцию, подчиняющуюся первому закону, он назвал *объединением* (Einigung), а второму закону – *перестановкой*. Ниже, возвращаясь к этому вопросу, он поясняет, почему «одна перестановка без объединения не дает ничего нового». Впрочем, здесь Р. Грассман не совсем прав, ибо, например, в векторном исчислении скалярное произведение двух векторов коммутативно, но неассоциативно. См. ниже примеч. 27*.

21* Бинарная операция, которую Р. Грассман называет (простым) *отношением*, – это операция, *дистрибутивная* относительно операции $\circ$ – операции более низкого «уровня», обладающей свойством ассоциативности. В его записи *отношение* выражается тем, что «относящиеся» друг к другу величины записываются одна после другой (или разделяются точкой). В дальнейшем отношение оказывается *умножением* («переплетением») в грассмановском смысле. *Двойное* отношение – это операция, подчиняющаяся *более общему* дистрибутивному закону, при котором раскрытие скобок предполагает введение новой операции, которая тоже ассоциативна и имеет более низкий «уровень», чем отношение. Необходимость в «двойном отношении» выясняется, когда Р. Грассман рассматривает «наивысший уровень связи величин» – *возвышение*, или возведение в степень. См. ниже раздел 6 «Отношение величин» части первой и раздел 9 «Возвышение величин» части второй данного сочинения. В № 31, в частности, объясняется, почему автор для простого и двойного отношения не вводит разные знаки.

22* Этот и следующий за ним абзацы очень важны: в них разъясняется, почему *логику* нельзя считать предшествующей математике, которая, как и логика, начинается с учения о величинах.

23* Это – применение хорошо известного правила замены равным, вытекающего из Лейбницева определения отношения равенства – определения, принимавшегося Р. Грассманом и составлявшего основу тождественных преобразований, о которых здесь идет речь. Стоит заметить, что в отличие от почти общепринятой в современной методологии точки зрения, согласно которой законы равенства относятся к логике (ср. «исчисление предикатов с равенством»), Р. Грассман исключает их из логики. Что касается вводимого затем «предложения о поступательном доказательстве», т.е. принципа совершенной («полной математической») индукции, который он также считает нелогическим, то по вопросу об отнесении его к логике либо математике до сих пор существуют различные взгляды. От ответа на этот вопрос во многом зависит решение проблемы о «первичности» той или другой науки. Хотя индуктивный переход (т.е., грубо говоря, умозаключение от n-й к $(n + 1)$-й величине) и требует, вообще говоря, *логических* рассуждений, Р. Грассман и тут обходится тождественными преобразованиями, что спасает его подход от упрека в том, что его Grösenlehre содержит логические компоненты.

24* Далее следует обоснование индуктивно-рекурсивного подхода в логике и философии математики, т.е. то, что можно считать главным логико-философским достижением Роберта (и Германа) Грассмана. Этот подход, являющийся «общим местом» *современной* дедуктивной логики и логических оснований математики, остался непонятым в науке XIX в. Три вопроса, которые ниже задает Р. Грассман, не получили ответа со стороны его современников; даже Э. Шрёдер, которому были отлично известны грассмановские работы 1872 года, не обратил на это внимания. Возможно, виной тому – чрезмерно заносчивый тон Р. Грассмана и его уверенность в том, что он один (ну разве что с братом) монопольно владеет «научностью».

25* Здесь выражение «прибавление» (Zufügen) еще не применяется как термин грассмановской теории. Далее, в таблице «Виды связи в учении о величинах», для «прибавления» (сложения) используется термин Fügen, см. также примечание к этой таблице.

26* В принятой классификации операций, возможно, это и так, но не в общем случае. Упомянутое в примечании 21* скалярное произведение двух векторов, как известно, коммутативно, однако оно является не вектором, а числом, следовательно, свойство ассоциативности не присуще скалярному произведению. Вряд ли можно согласиться с автором в том, что векторное произведение не «дает ничего нового».

27* Математики не пошли по пути присваивания своего наименования каждому виду умножения, сохранив единственный термин «умножение». В контексте, естественно, употребляются определительные термины, говорят о векторном, скалярном, матричном умножении и т.п., результат соответствующей операции обычно называется «произведением».

28* В современной немецкой математической литературе принята терминология: Addition – сложение, Multiplikation – умножение, Produkt – произведение, Faktor – сомножитель.

29* Пожалуй, излишне говорить, что грассмановская попытка реформировать математическую (и, как мы увидим в дальнейшем, и логическую) терминологию не удалась. Математики, логики, философы прошли мимо терминологических новаций штеттинского автора. То же касается и педагогов, которые вряд ли могли принять грассмановские дистинкции типа Fugen – Anfugen – Einfugen – Zufugen в немецкой «народной школе» (Volksschule) – дистинкции, психологически неубедительные, так как они являются вариациями выражений, имеющих один и тот же корень, и потому трудно запоминаемые и расходящиеся со сложившейся научной терминологией. Даже гораздо менее претенциозные терминологические изобретения Германа Грассмана были отторгнуты современными ему математиками.

30* Эту таблицу читателю полезно иметь перед глазами, так как она помогает следить за выкладками автора. Заметим, что выше Р. Грассман еще не ввел термина einfügen; он появится – в форме Einfügung – лишь во второй части «учения о величинах» (№ 45). То же касается и термина einweben, который определяется только в № 54 той же части.

31* Очевидно, что плюсовыми будут, например, скобки в формулах $a + (b + c)$, $a + (bc)$, $(a \cdot b) + (c \cdot d)$.

32* Das Fach – согласно современному словарю: ящик (стола); полка (шкафа); отделение, часть (чего-то); клетка (наборной кассы); отдел (науки).

33* См. коммент. 11*.

34* Здесь Р. Грассман исходит из того, что *гарантированно* однозначной можно задать связь только *двух* величин. Для того чтобы связь, например, трех величин была однозначной, она должна обладать свойством ассоциативности. Так, разность $m - n$ имеет единственное значение, но $(m - n) - p \neq m - (n - p)$, где m, n, p – целые числа, тогда как, $m + n + p = (m + n) + p = m + (n + p)$, поскольку сложение чисел ассоциативно. Произвольная бинарная операция, вообще говоря, не обладает свойством ассоциативности.

35* См. коммент. 14*.

36* Предполагается, что связывание величин происходит слева направо, что определяет соответствующую расстановку скобок (которая может только подразумеваться). На языке современной логики это выполнение бинарной операции по ассоциативности влево.

37* Здесь, насколько нам известно, впервые в логике вводится отношение, которое ныне называется *графическим равенством* формул. Вообще, в свете этого и двух следующих абзацев, можно считать, что у Грассмана налицо *семантическое* и *синтаксическое* определения *равенства – неравенства*. Приводимые в № 2 определения отношения равенства и неравенства (в предположении исправления последнего, см. коммент. 7*) являются семантическими, так как в них речь идет об отношении величин. Здесь же говорится о равенстве (одинаковости) и неравенстве (неодинаковости) *формул*. Наиболее сильным является *равнозвучность* формул (предполагающая равенство обозначаемых ими величин, что Грассманом не оговаривается). Из определения равнозвучности двух формул получается – как его отрицание – отношение *различия* формул: если две формулы не различны (т.е. одинаковы), то они равнозвучны. Более слабым, чем отношение равнозвучности, является отношение *соответствия* двух формул; например, если $F(a)$ есть формула $(a \circ c) \circ d$, а $F(b)$ – формула $(b \circ c) \circ d$, то $F(a)$ и $F(b)$ являются соответствующими друг другу. Таким образом, соответствие формул, по Грассману, есть их *структурная* одинаковость.

В «Логике» 1890 г. Р. Грассман дает примеры формул, находящихся в упомянутых отношениях. В приводимых ниже формулах знак «+» обозначает операцию объединения объемов двух понятий, а «·» (знак, который может и опускаться) – операцию их пересечения. *Равнозвучные* формулы $a + b(c + a)$ и $a + b(c + a)$; *соответствующие* формулы: $a + b(c + a^n)$ и $m + b(c + b^m)$ – одна из них есть «формула от величины a», другая «отвеличины m». Соответствующие они потому, что если в первой из них заменить a на m, то получится формула, равнозвучная второй. Таким образом, соответствующие формулы выражают одинаковый способ соединения величин в целостность, различаясь обозначением выделенной величины (величин). Если a и m в вышеприведенных формулах рассматривать как предметные переменные, может показаться, что здесь необходимо ввести указание на совпадение областей их определения; однако в теории Р. Грассмана это излишне, так как подобного рода переменные «пробегают» в соответствующих формулах – если не оговорено противное – все возможные величины. Понятие соответствующих формул играет вспомогательную роль в доказательствах теории величин, чего нельзя сказать о понятии формульного различия. Так, формулы $a + b(c + a)$ и $a + bc + ba$ – *различны*, но в случае, когда для операций «·» и «+» действует закон дистрибутивности первой относительно второй – что, как мы увидим, в теории величин на самом деле имеет место, – эти различные формулы оказываются равными как преобразуемые одна в другую по данному закону и выражающими поэтому одну и ту же целостность. Равнозвучные формулы всегда равны (что, говорит Р. Грассман в № 10, вытекает из № 9, т.е. из рефлексивности равенства величин) и, как станет ясным из его дальнейшего изложения, доказательство равенства величин, в конечном счете, сводится к установлению их равнозвучности – графической одинаковости – выражающих их формул.

Следует заметить, что различение семантического и синтаксического уровней определений равенства у Р. Грассмана не очень четко. Так, устанавливается, что две *различные* (в упомянутом выше смысле) формулы *равны*, если одна может быть преобразована в другую без изменения *значения* обозначаемых ими величин; преобразования же формул, которые в этом случае возможны, – это *тождественные* преобразования, *основанные* на *семантическом* определении равенства величин. Вводимое ниже (№ 12) отношение *условного равенства* величин отчетливо семантическое, а вот появившееся ранее синтаксическое понятие *формулы от величины* в дальнейшем (№ 14) фактически отождествляется с понятием *функции от величины*, которое естественно считать семантическим.

[38*] Формулы $G_{1,n+1}(a_\alpha)$ и $G_{1,n}(a_\alpha)$ следует, по-видимому, понимать в смысле определения «формулы от a», данного в № 8 – с тем отличием, что вид формул (Р. Грассман употребляет также выражение «функций») G раскрывается во втором из приведенных равенств. Последнее естественно считать выражающим

«равенство по определению», a индексировано, и индекс a пробегает в одном случае 1, 2, ..., n, $n+1$, а в другом 1, 2, ..., n,

В дальнейшем автор ссылку «от такой-то величины» оформляет по-разному: в № 25 она принимает вид $G_{1,n}(b_b)$ (что расшифровывается заданием соответствующего «равенства по определению»), а в № 36 – вид $G_{1,n} \circ a_\alpha$, где а пробегает числа 1, 2, ..., n.

39* Очевидно, что отношение условного равенства – это просто иная форма логического перехода, опирающегося на общее определение отношения равенства, т.е. логический переход

$$\frac{a=b}{\Gamma(a)=\Gamma(b)}.$$

При этом Г – не высказывание, т.е. не равенство теории величин, а произвольная «формула (фукция) от a», или величина. Ниже, в № 14, это правило и представляется как получающееся из определения отношения равенства (№ 2).

В «Логике» 1890 г. Отношение условного равенства формулируется так:

Теорема 16. $F \circ a = F \circ b$	Условие: $a = b$
Допущение (посылка) $a = b$	Следствие: $F \circ a = F \circ b$,

для любой формулы F.

Здесь «о» – знак бинарной операции, и видно, что данное правило «привязано» к языку теории величин. Было бы ошибкой видеть в подобном правиле выход за рамки средств, задаваемых отношением равенства.

40* Здесь выясняется, что, как мы уже показали в коммент.4*, грассмановское понятие связи (связывания, соединения и пр.) распространяется и на отношение равенства. В самом деле, термин *Verbindung* здесь применяется к *приравниванию* величины a величинам b и c. Отсюда допустимость, с точки зрения Р. Грассмана, использования знака равенства в двух разных смыслах: как означающего *равенство величин* и как выражающего *равносильность* (эквивалентность) *высказываний*. В современной логике эти различные смыслы передаются разными знаками: во втором случае вместо знака = обычно используется знак ≡. Но у Р. Грассмана отсутствует индуктивное определение формулы теории величин; он может назвать формулой и соединение величин с помощью бинарной операции, и выражение, представляющее собой высказывание о равенстве (соединений) величин. Впрочем, из контекста всегда ясно, какой смысл в каждом конкретном случае несет знак равенства. Так, очевидно, что в записи «заключения» $(a = b) = (a = c)$ знак «=», связывающий $a = b$ и $a = c$, если читать эту запись буквально, означает операцию *эквиваленции* логики высказываний. Однако выходить за рамки средств, вытекающих из свойств отношения равенства, в данном случае не обязательно: переход от $a = b$ и $b = c$ к $a = c$ оправдывается *транзитивностью* отношения равенства (составляющей содержание данного № 16), и переход этот можно записать в виде цепочки $a = b = c$. Поскольку, однако, различие этих двух смыслов равенства в дальнейшем, особенно в «Логике», будет играть существенную роль, мы над знаком равенства выражающего эквивалентность, мы будем ставить точку, т.е. писать $\doteq$.

41* В № 18 Р. Грассман формулирует один из основополагающих для всей его теории принцип индуктивного доказательства. Он имеет у него вид теоремы, и это требует пояснения.

Грассмановская индукция – согласно формулировке теоремы – строится следующим образом. Ведется она по величинам a_i произвольной последовательности величин, индексированных числами натурального ряда. Базис индукции состоит в утверждении, что для первой величины последовательности имеет место совпадение значений двух произвольных формул (функций) F и $\mathfrak{F}$, зависящих от a_1, т.е. справедливо равенство $F(a_1) = \mathfrak{F}(a_1)$. Обозначим свойство элемента a_1, задаваемое этим равенством, через $\Gamma(a_1)$ и обратимся к индуктивному переходу, т.е. шагу, ведущему от утверждения о наличии свойства Г у произвольного элемента a_α последовательности величин, т.е. от $\Gamma(a_\alpha)$, к наличию этого свойства у непосредственно следующего элемента $a_{\alpha+1}$, т.е. к утверждению $\Gamma(a_{\alpha+1})$. Заключение гласит, что тогда свойство Г присуще *всем* величинам последовательности.

В этой формулировке нет указания на то, какой – конечной или бесконечной – является произвольная последовательность величин. Однако поскольку принцип индукции формулируется как *теорема*, он должен быть доказан, и Р. Грассман предъявляет соответствующее доказательство. Но ясно, что проходит оно только для конечных последовательностей: $a_1, a_2, \ldots a_n$. Это следует как из самого доказательства, так и из упоминания (в словесном изложении принципа индукции) «последней величины a_n» последовательности. Хотя n здесь произвольное натуральное число (исключая нуль), это доказательство не распространяется на *бесконечные* последовательности.

В самом деле, доказательство ведется по схеме:

$$\Gamma(a_1),\ \Gamma(a_\alpha) = \Gamma(a_{\alpha+1})$$
$$\Gamma(a_n), \qquad (1)$$

где n – не произвольный элемент рассматриваемой (произвольной) последовательности величин, а ее *последняя* величина. Знак равносильности равенств =, таким образом, «проносится» по всей (конечной!) последовательности, что очевидно из грассмановского доказательства «с помошью формул»: показывается, что каким бы ни было число n, получается цепочка равенств

$$\Gamma(a_1) = \Gamma(a_2) = \ldots = \Gamma(a_n). \qquad (2)$$

В силу базиса индукции, утверждающего верность $\Gamma(a_1)$, верными оказываются *все* равенства этой цепочки. Доказательство теоремы состоит в последовательном обосновании равносильностей, ведущих от $\Gamma(a_1)$ к $\Gamma(a_n)$. Действительно, доказательство, например, равносильности $\Gamma(a_1) = \Gamma(a_2)$ происходит по правилу замены равным, имеющему в данном случае вид

$$\models \Gamma(a_1),\ \Gamma(a_1) = \Gamma(a_2)$$
$$\models \Gamma(a_2),$$

где $\Gamma(a_1)$ и $\Gamma(a_2)$ воспринимаются как равенства величин, а знак $\models$ означает утверждение об истинности равенства; и так же происходит переход к последующим членам цепочки (2).

Ясно, что доказательство теоремы № 18 возможно (потенциально возможно) только в случае *конечности* цепочки (2). Для бесконечного случая принцип индукции надо *постулировать*; при этом грассмановская формулировка № 18 в исправлении не нуждается. Однако «доказательство» как в формульной, так и в словесной формулировке не проходит. Да и сам Р. Грассман от него, по существу, отказывается, когда уже в следующем № 19 формулирует аналогичную теорему для элементарных величин (здесь это действительно теорема, поскольку она опирается на № 18) так, что она распространяется и на бесконечные последовательности, и пользуется этим при доказательстве предложения № 23. В дальнейшем метод доказательства по индукции применяется им систематически и относится как к свойствам связей произвольных величин, так и к свойствам связывающих их равенств. В «Логике» 1872 г. индуктивное доказательство впервые используется при доказательстве теоремы № 6 (см. с. 00 наст. изд.).

Может возникнуть вопрос, не означает ли появление в грассмановской теории равносильности равенств – отношения, которое может пониматься как операция эквиваленции пропозициональной логики, – выход за пределы теории, основанной *только* на свойствах отношения равенства. Вопрос этот тем более уместен, что в своих словесных формулировках принципа индукции Р. Грассман для передачи хода мысли, ведущей от истинности $\Gamma(a_\alpha)$ к истинности $\Gamma(a_{\alpha+1})$ использует условную связь. В этом случае схема индукции приобретает хорошо известный ныне вид:

$$\Gamma(a_1),\ \Gamma(a_\alpha) \supset \Gamma(a_{\alpha+1})$$
$$\Gamma(a_n),$$

где $\Gamma(a_\alpha)$ есть $F(a_\alpha) = \mathfrak{F}(a_\alpha)$, а $\Gamma(a_{\alpha+1})$ есть $F(a_{\alpha+1}) = \mathfrak{F}(a_{\alpha+1})$. Исходя из этой схемы, как будто бы, можно упрекнуть Р. Грассмана в том, что он не последователен, и в своей теории величин, которая строится им как предшествующая сфере логического, использует условную связь пропозициональной логики. Подобный упрек по адресу автора «учения о формах» высказывает Лотар Крайзер в параграфе 3.1 «"Учение о величинах" Р. Грассмана и "Запись в понятиях" Фреге» своей книги «Готтлоб Фреге. Жизнь – Творчество – Время» (*L. Kreiser*. Gottlob Frege. Leben – Werk – Zeit. Felix Meiner Verlag. Hamburg, 2001). Упрек этот, однако, вряд ли справедлив.

Суть дела в том, что условное суждение, фиксирующее индуктивный переход, служит для Р. Грассмана просто для сокращенной передачи рассуждения, основанного исключительно на свойствах равенства (равносильности). Даже если мы запишем, например, переход от истинности $\Gamma(a_1)$ к истинности $\Gamma(a_2)$ (см. первый шаг «доказательства» № 18) как применение правила *modus ponens:*

$$\Gamma(a_1),\ \Gamma(a_1) \supset \Gamma(a_2)$$
$$\Gamma(a_2),$$

мы все равно не привлечем средств логики высказываний: за знаком импликации стоят тождественные преобразования, и применение упомянутого правила можно элиминировать. И это тем более верно, если учесть, что словесные формулировки в грассмановском изложении носят вторичный характер – первичными являются формулировки формульные. Слова служат только тому, чтобы эти формулировки лучше понимались и запоминались читателем. Формульное же представление грассмановского принципа индукции не использует условной связи – автор «теории форм» обходится знаком равенства, выражающим равносильность высказываний, содержащих знак равенства.

42* Вряд ли можно согласиться с тем, что приведенные Р. Грассманом примеры отвечают его пожеланиям. Прежде всего неясно, что такое научная конструкция. Если предположить, что он имеет в виду корпус некоторой теории, то даже формально построенная теория не обладает такой жесткостью, так что этот пример сомнительный. Что касается словаря, то можно согласиться, что при лексикографическом упорядочении слова, действительно, нельзя переставлять, а соединение слов в любом живом языке не является ассоциативным, однако у Р. Грассмана идет речь об операциях, которые не обладают ни ассоциативностью, ни коммутативностью, в примере же операции не указаны. Примером такого рода операции могло бы служить векторное умножение векторов, но хотя идеи векторного исчисления присутствуют в «Учении о протяженностях» Г. Грассмана, подобных теорий у Роберта нет. Более простыми примерами неассоциативных и некоммутативных операций являются обычное вычитание и деление чисел.

43* Начало этого раздела хорошо иллюстрирует стиль грассмановского изложения. Сначала вводится словесное определение понятия (здесь – объединения величин), сопровождаемое примерами (№ 21); затем *рекурсивно* определяется (абстрактная) ассоциативная операция (№ 22), – появляется «основная формула объединения». Далее следует индуктивное доказательство того, что величина $a \circ b$, где a, b – величины, элементы которых связаны последовательно с помощью ассоциативной операции $\circ$, представляет собой величину, элементы которой связаны последовательно (№ 23). После этого – тоже индуктивно – доказывается закон ассоциативности для величин a, b, c, обладающих указанным свойством (№ 24). И, наконец, в № 25, индуктивно же доказывается «скобочный закон», разрешающий вводить и удалять скобки (памятуя об «ассоциативности влево»). По той же схеме строится изложение в последующих разделах.

44* В № 25 словесная формулировка «закона объединения», его формульное доказательство и словесное изложение не вполне согласуются между собой. В доказательстве с помощью формул предполагается, что в величине, соединенной с a, все входящие в нее величины связаны последовательно, что есть лишь частный случай возможной структуры величины (в этом убеждает пример, приведенный в коммент. 46*). Внеформульное же изложение доказательства этого закона вполне адекватно его словесной формулировке.

45* В самом деле, пусть с, например, имеет вид $e_1 \circ (e_2 \circ e_3) \circ e_4$. Тогда мы имеем:

$$a \circ b \circ ((e_1 \circ e_2 \circ e_3) \circ e_4) = a \circ b \circ e_1 \circ (e_2 \circ e_3) \circ e_4 \quad \text{(согласно № 22)}$$

$$= a \circ b \circ e_1 \circ (e_2 \circ e_3) \circ e_4 \quad \text{(согласно допущению)}$$

$$= a \circ b \circ e_1 \circ e_2 \circ e_3 \circ e_4 \quad \text{(согласно допущению).}$$

46* Ниже следует доказательство для того частного случая, который приведен в пункте 3 предложения (теоремы) № 29.

47* Как следует из определения 31, здесь под «отношением» Р. Грассман подразумевает операцию, обладающую свойством дистрибутивности.

48* Определение № 31 – это несколько неуклюжая формулировка обобщенной дистрибутивности операции «отношение» относительно двух разных видов объединения. № 32 проясняет вопрос, хотя приводимое далее словесное изложение, строго говоря, соответствует лишь первому из выписанных под этим номером равенств. Заметим также, что словесное задание операции «отношение», приведенное ранее, отличается от того, которое приведено здесь; а именно оно соответствует такой формулировке, при которой в скобке помещена формула $e \circ a$, а не формула $a \circ e$. Это различие было бы несущественно, если бы операция была коммутативна, т.е. была не «объединением», а «перестановкой». Следует также заметить, что в обоих случаях Р. Грассман допускает неточности в описании левых частей равенств № 32. Эти неточности повторяются и в его труде «Система знания» (Bd. I, Häfte 2: Die Denklehre, S. 47) при разъяснении смысла операции «переплетения» (умножения), которая совпадает у него с операцией (простого) «отношения», введенной в первой части сочинения 1872 г.

49* В оригинале имеется опечатка: в правой части первого из равенств № 32 вместо $ab \odot eb$ помещено $ab \odot ae$. Начиная с № 32 – фактически с № 31 – Р. Грассман приводит серию теорем, рекурсивно задающих операцию «отношения» (впоследствии оказывающуюся умножением) с помощью двух операций «объединения»: $\circ$ и $\odot$.

50* В оригинале опечатка: вместо Fc и ec напечатано $Fc \circ ec$.

51* В этом абзаце дано не столько словесное доказательство равенств № 35, сколько описание процедуры преобразования формул, вытекающей из их формульных доказательств.

52* То есть $(a_1 \circ a_2 \circ ... \circ a_n)b = a_1 b \odot a_2 b \odot ... \odot a_n b$.

В записи $G_{1,n} \circ a_\alpha$ (№ 36) ее часть «$\circ\ a_\alpha$» указывает на то, что величины формулы $G_{1,n}$ с числами $a_1, a_2, ..., a_n$ связаны знаком $\circ$, а вся формула читается по ассоциативности влево. Расшифровку правых частей обоих равенств мы предоставляем читателю.

53* Основная формула объединения (ассоциативности бинарной операции) приведена в № 22. Закон объединения (№ 25) – это обобщенный закон ассоциативности.

54* В «Логике» 1890 г. Р. Грассман в связи этим отмечает: «Профессор Шрёдер в своей работе “Сфера операций логического исчисления», Лейпциг, 1877, с. 8, выдвигает это предложение в качестве принципа или аксиомы, приобретаемой интуитивно, которая, на его взгляд, “непосредственно очевидна” и поэтому не требует доказательства. Для наглядного представления это можно счесть совершенно верным; ведь при обучении счету законы 3 + 4 = 4 + 3 и т.д. усваиваются путем наглядного опыта. Однако в строгой науке это предложение нельзя выдвигать в качестве принципа или аксиомы, так как его можно доказать» (Die Logik, 1890, S. 25).

55* В «Логике» 1890 г. читаем: «*Определение. Скобка* называется *факторной скобкой*, если величины, в ней заключенные, и величины вне нее связаны с помощью переплетения [умножения]; она называется *скобкой, выражающей отношение*, если величины внутри скобки связаны путем сложения, сама же скобка связана с величиной, находящейся вне нее, путем переплетения [умножения].

Примеры. Факторная скобка: $a(b\ c)$; скобка, выражающая отношение: $a(b + c)$, $(a + c)b$, $(a + b)\ (a + c)$» (Die Logik, 1890, S. 25).

56; Ausdehnungslehre – это и название основного сочинения Г. Грассмана.

57* Буквами b, i, z, a Р. Грассман, по-видимому, указывает на характерную для соответствующей ветви операцию или объект: b – begrifflich (понятийно, логически), i – innere (внутреннее сложение, умножение), z – Zahl (число), a – aeusere (внешнее сложение, умножение).

58; То есть если сложение ассоциативно и коммутативно.

Учение о понятиях, или Логика

Титульный лист: Die Begriffslehre oder Logik. Zweites Buch der Formenlehre oder Mathematik. Von Robert Grassmann. Stettin, 1872. Druck und Verlag von R. Grassmann. Более подробное изложение логики Р. Грассман осуществил в труде: Die Logik und die andern logischen Wissenschaften. 1890, VIII, XIII, 188 S.; Formelbuch der logischen Wissenschaften, 18 S.; переиздавалось под названием: Die

Logik. 1900, XIII, 188 S.; Formelbuch der logischen Wissenschaften, 18 S. Это издание полностью повторяет книгу 1890 г., исключая ее титульный лист и «Предисловие к логическим наукам», которое имеется в труде 1890 г., но отсутствует в его переиздании. Наиболее существенные логические теоремы и их пояснения, имеющиеся в труде 1890/1900 г., в нашем переводе мы помещаем в подстрочных примечаниях.

Рассматривая грассмановскую «Логику» 1872 г., следует учитывать, что в ней предполагается данным все содержание «Учения о величинах».

1* Текст «Введения» в книге Р. Грассмана 1872 г. набран петитом в отличие от основного изложения. Но и в основном изложении он чередует корпус и петит (последний используется, например, когда приводятся примеры, иллюстрирующие формульное изложение). В настоящем издании эти шрифтовые особенности не воспроизводятся.

2* Р. Грассман здесь и далее приводит греческое имя «отца логики» в латинской транскрипции. В дальнейшем мы будем использовать принятое русское написание – *Аристотель*. Это же касается и других логиков прошлого, имена которых приводятся автором в латинской транскрипции: их мы тоже будем передавать так, как это принято в нашей литературе.

3* Перечисленные логические сочинения Аристотеля входят в собрание его трудов – «Органон», составленное последователями Стагирита. В русской традиции перечисленные Р. Грассманом аристотелевские труды носят названия: «Категории», «Об истолковании», «О софистических опровержениях», «Топика», «Аналитики» (первая и вторая). Их русский перевод: *Аристотель*. Соч.: В 4 т. М.: Мысль, 1978.

4* Аристотель говорит об этом так: «Что касается учения об умозаключениях, то мы не нашли ничего такого, что было бы создано до нас, а должны были сами создать его с большой затратой времени и сил» («О софистических опровержениях». Т. 2. 184b1–3).

5* Это не совсем верно. Использование Аристотелем букв в качестве обозначений силлогистических терминов, а также стандартизация греческих фраз, фигурирующих в схемах описываемых им силлогизмов, позволяет считать его теорию умозаключений, так сказать, *протоформульной*. В этой теории, носившей аксиоматический характер, представлен детальный аппарат обоснования силлогических выводов, во всяком случае – немодальных.

6* Роберт Грассман повторяет здесь распространенный в его время взгляд на развитие логики после Аристотеля – вплоть до раннего Нового времени – как на некий провал. На самом деле в последующие века логические исследования, хотя и с перерывами, были продолжены. Достаточно назвать стоиков, создавших основы логики высказываний, и западноевропейских схоластических мыслителей (а также арабских ученых), которые не только детализировали силлогистику, но и заложили основы, например, учения о неразрешимых предложениях и логико-семантической теории. Новейшие историко-логические исследования обнаруживают интересные идеи даже в такой не очень «логической» – в ту пору, в всяком случае, – стране, как Франция, где Э.Б. де Кондильяк по сути дела предвосхитил позднейший алгебраический подход, а Кондорсе предпринял попытки математизации операций логики. Вообще экскурс Р. Грассмана в историю логики в данном труде носит отрывочный и субъективный характер. В последующем Р. Грассман познакомился с историей логики более основательно, о чем свидетельствует материал «Очерк истории логики», которым открывается его «Логика» 1890 (1900) гг. (см. с. 337–346 наст. изд.).

7* Здесь Р. Грассман смотрит на вопрос, так сказать, с немецкой колокольни, да и то не очень внимательно. Тот факт, что оживление логических идей, которое вело к «формульной логике», активно наблюдалось в Англии, мог быть штеттинскому автору тогда не известен, – в этом нет ничего необычного. Но вызывает удивление, почему «живое развитие» логики в Германии автор связывает с Христианом Вольфом, а не с его учителем Лейбницем, к которому он возводит сам замысел «учения о величинах» (ср. начало раздела «Учение о величинах» сочинения «Учение о формах», 1872 г., с. 181 наст. изд.). Ведь согласно грассмановской концепции логика есть одно из важнейших «ответвлений» этого учения. По-видимому, логические работы автора «Новых опытов о человеческом разумении» были тогда еще не известны Р. Грассману.

Что же касается Христиана Вольфа (1679–1754), то последний был автором двух логических трудов – упоминаемого Р. Грассманом сочинения 1728 г., написанного на латинском языке (*Wolfius Christianus*. Philosophia rationalis sive logica. Francofurti et Lipsiae; вышло вторым и третьим изданиями в 1732 и 1740 гг.) и более раннего немецкоязычного труда: *Wolf Christian*. Vernünftige Gedanken von den Kräften des menschlichen Verstandes. Halle, 1713, выдержавшего множество изданий вплоть до 1770 г., а также переведенного на французский, итальянский и английский языки. В 1753 и 1765 гг. в России были опубликованы русские переводы упомянутого латинского текста Вольфа под названием «Логика, или Разумные мысли о силах человеческого разума и их исправном употреблении в познании правды» (СПб., 1765). Оценка значения Вольфа для логики, данная Р. Грассманом, не вполне справедлива, а ссылка на критику Вольфа со стороны Гегеля выглядит странно, так как уже на следующей странице автор признает, что Гегель нанес логике «безмерный вред».

8* Гегель полагал, что так называемый геометрический метод слишком формалистичен: «У *Спинозы*, который больше других применял геометрический метод, и применял его именно для вывода *спекулятивных* понятий, формализм этого метода сразу бросается в глаза. Философия Вольфа, которая развила этот метод до крайнего педантизма, является также и по своему содержанию метафизикой рассудка» (*Гегель Г.В.Ф.* Энциклопедия философских наук. М.: Мысль, 1975. Т. 1. С. 415.)

9* *Kant I.* Logik. Ein Handbuch zu Vorlesungen. Книга составлена учеником Канта – Г.Б. Йеше по просьбе великого философа. В русск. перев.: Логика. Пособие к лекциям // Кант И. Трактаты и письма. М.: Наука, 1980.

10* Р. Грассман приводит практически дословное определение понятия суждения по Канту. См., напр.: Kant I. Immanuel Kants. Leipzig, 1920. Th. I. Allgemeine Elementarlehre. 2. Abschnitt. Von den Urteilen.

§ 17. Erklärung eines Urteils überhaupt. Ein Urteil ist die Vorstellung der Bewußtseins verschiedener Vorstellungen, oder Vorstellung des Verhältnisses derselben, sofern sie einen Begriff ausmachen.

11* Р. Грассман имеет в виду первый том гегелевской «Науки логики» (*Hegel G.W.F.* Wissenschaft der Logik. Bd. I–III, Nürnberg, 1812–1816). В русск. перев.: *Гегель Г.В.Ф.* Наука логики. М., 1970–1972. Т. 1–3.

12* Имеется в виду труд Иоганна Генриха Ламберта (*Lambert*) «Neues Organon, oder Gedanken über die Erforschung und Bezeichnung des Wahren und dessen Unterscheidung von Irrtum und Schein». Bd. 1–2. Leipzig, 1764.

Научные интересы Ламберта распространялись не только на логику, он развил более общее учение о науке – философской и математической (в соч.

«Anlage zur Architectonic oder Theorie des Einfachen und Ersten in der philosophischen und mathematischen Erkenntnis», Bd. 1–2. Riga, 1771) и в этом отношении как бы предвосхищал ход мысли Р. Грассмана. См.: *Кузичева З.А.* «Символическая логика в сочинениях И.Г. Ламберта» // Историко-математические исследования. Вып. 25, 1980. С. 225–247.

13* Август Твестен (*August D.Chr. Twesten*, 1789–1876) был автором не только упоминаемого Р. Грассманом сочинения (Logik, insbesondere die Analytik. Schleswig, 1828), но и вышедшего в 1834 г. в Киле труда Grundriss der analytischen Logik.

14* Примеры *Beiname* – Friedrich I mit dem Beinamen «Barbarossa»; *Beisatz*: Friedrich «der Große» (примеры заимствованы из словаря: *Wahrig G.* Deutsches Wörterbuch. Bertelsmann Lesikon. Verlag. Gütersloh, 1994.

Свойства операций сложения и умножения в логике Р. Грассман фактически постулирует, хотя и не оговаривает этого. Примеры, которые, по его мнению, должны доказать эти свойства, скорее, опровергают их. Например, он утверждает, что понятия «старый, храбрый король» и «старый король и храбрый король» означают одно и то же. Но это очевидным образом неверно. Второе не тождественно первому, ибо оно может относиться к двум разным королям, тогда как первое аттестует одного короля. Заметим, что в алгебре логики (алгебре объемов понятий) справедливы *две* дистрибутивности:

$$a(b + c) = ab + ac \text{ и } a + bc = (a + b)(a + c),$$

где умножение и сложение означают соответственно пересечение и объединение объемов рассматриваемых понятий (т.е. множеств). Оба равенства доказываются, исходя из определения указанных операций и отношения равенства объемов (множеств).

15* В этом равенстве предполагается, что e_1 отлично от e_2. И в дальнейших своих выкладках, выписывая одинаковые буквы, обозначающие элементы или понятия, которые проиндексированы по-разному, Р. Грассман предполагает, что последние различны. При этом, если e_1, e_2 – понятия, то $e_1 \cdot e_2 = 0$ означает, что e_1 и e_2 не имеют общих штифтов.

16* Здесь Р. Грассман впервые использует важные для его теории понятия *содержания, признака* и *отличия*, к комментированию которых мы еще вернемся.

17* Немецкое *Stück* (буквально – штука) мы будем, следуя В.В. Бобынину (см. его «Опыты математического изложения логики». вып. I. М., 1886. Раздел «Сочинение Роберта Грассмана»), переводить словом «часть». Вскоре из контекста станет ясно, что «часть» понимается им как *слагаемое объема* понятия, которое трактуется как некая сумма.

18* Подобное широкое понимание *элементарных величин* («штифтов») Вселенной вытекает из общего замысла Р. Грассмана – соорудить всеохватное «здание» (систему) знания, однако понимание это находится в явном противоречии с требованием, чтобы величины имели «одно, а не много» значений. В части I «Учения о формах» (см. с. 172–173, 300–301 наст. изд.) автор говорит, что все величины, рассматриваемые в «учении о формах», последнее должно само и произвести, а также установить законы их соединения, определив их настолько точно, чтобы «каждая величина имела только одно значение». Это надо понимать так, что изучаемые наукой реалии должны в «учении о формах» (величинах) подвергнуться такой обработке, которая сделала бы их «однозначными»: ведь только в этом случае возможно проведение той индуктивно-рекурсивной установки, с которой Р. Грассман связывает настоятельно провозглашаемое им требование «научности». Но очевидно, что провести ее можно было только в математике и логике. В иных науках этого можно было бы добиться – хотя бы отчасти, – если ограничить себя работой с однозначными названиями. Отождествив «штифты» и величины с обозначающими их буквами и, говоря современным логическим языком, составленными из них *словами*, – иначе говоря, конструктивными объектами, однозначно различаемыми и опознаваемыми, – установку Р. Грассмана можно было привести лишь в логике и математике (да и то, как мы теперь знаем, только отчасти). Но тогда грассмановское «учение о формах» становится очень далеким от «штифтов Вселенной».

19* В «Логике» 1890 г., чувствуя, видимо, неувязку между понятием связи, связывания как *операции* и понятием о связи величин как *результате* операции, Р. Грассман пытается ее преодолеть, вводя:

«*Определение 25*. Под величиной $a \circ (\circ\, b)$ мы понимаем величину $a \circ b$. Величина $(\circ\, b)$ которая читается «вместе с b», означает некую связь

Предложение 26. $a \circ (\circ\, b) = a \circ b$.

20* Фигурирующий у Р. Грассмана термин *fortschreitend* (и его грамматические варианты) мы переводим выражениями «последовательно», «последовательный» и пр.; сходный термин fortleitend будет передаваться как «поступательно» («поступательное» и пр.) В данной работе Р. Грассмана в § 6 фигурирует «поступательное, или индуктивное» доказательство. Для обозначения «последовательной связи величин» в том смысле, который имеет в виду Р. Грассман, теперь обычно используется оборот «по ассоциативности влево». Пусть, например, складываются обычные числа: $a + b + c + \ldots + z$. Для того чтобы указать *последовательность* осуществления сложения (т.е. восстановить скобки), заключаем в скобки первое и второе слагаемое. Затем, рассматривая скобку как слагаемое, заключаем в скобки ее и третье слагаемое, и так далее. После восстановления всех скобок получим

$$(\ldots(a + b) + c) + \ldots + z.$$

21* Напоминаем, что грассмановское определение отношения неравенства ошибочно. См. коммент. 7* к части I «Учения о формах».

22* Таким образом, здесь *понятие* («штифтовая величина») определяется как (конечная!) сумма штифтов (элементов), т.е. так, как выше, во Введении, определялся *объем* понятия. Тут присутствует четкая *экстенсиональная* установка. В случае же, когда понятия, в том числе, элементарные величины («штифты»), служат для определения каких-то других понятий, выступая в качестве «сомножителей», они характеризуются как признаки (определяемого) понятия; «произведение» признаков составляет тогда *содержание* понятия. Здесь, безусловно, имеется принципиальное затруднение. Разные штифты, естественно, должны означать разные признаки. В таком случае принятое Р. Грассманом допущение, что произведение отличных друг от друга штифтов равно нулю, обращает в нуль любое понятие, обладающее более чем одним признаком. Впрочем, попытки (неудачные!) алгебраизировать исчисление понятий, оперируя с признаками понятий, а не с их объемами, предпринимались и ранее, например, Г. Ламбертом. (См.: *Кузичева З.А*. Символическая логика в сочинениях И.Г. Ламберта.)

23* При этом, как указал Р. Грассман во Введении, это предложение должно быть согласовано с определяемым в роде, числе и падеже.

24* *Плюсовая скобка*, согласно разъяснениям, данным в «Учении о величинах», – это скобка, предваряемая знаком сложения; *факторная скобка* содержит произведение, которое может умножаться на какую-либо величину, либо складываться с ней (ср. следующее ниже подстрочное примечание). В пункте 1 имеется в виду право свободного расположения скобок в (многочленных) суммах и произведениях, но, конечно, не в выражениях, где встречаются знаки и сложения, и умножения.

25* Пример, поясняющий мысль Р. Грассмана. В произведении $(a + b)(c + d)$ обе скобки «выражают отношение»; каждая из них есть *признак* понятия, представляемого этим произведением. Величины a и b, c и d – это слагаемые указанных признаков. Очевидно, что выписанное выше произведение после раскрытия скобок по дистрибутивности умножения (приписывания признака, или «отделения», понятию) относительно сложения приводит к понятию $ab + ac + bc + bd$, которое равно исходному. В простейшем случае, например в понятии $a(b + c)$, фигурирует только одна скобка, «выражающая отношение», т.е. «факторная скобка».

26* Прилагательные «понятийная», «понятийное» не несут какого-либо особого смысла, а просто лишний раз подчеркивают, что рассматриваемые равенства принадлежат логике.

27* Иоганн Фридрих Гербарт (*Herbart*, 1776–1841) – немецкий философ, психолог и педагог. Р. Грассман цитирует его труд «Lehrbuch zur Einleitung in die Philosophie» [4. Ausgabe], Königsberg, 1837.

28* Формулировка данной теоремы и особенно ее доказательство ясно показывает, что логическая теория Р. Грассмана предполагает *конечность* объемов понятий. В пункте 1 доказательства a – базисе индукции – вместо $S_{1,n}a$ следовало бы записать $S_{1,2}a$.

29* В современной биологической классификации живые существа подразделяются на типы, типы – на классы, классы же состоят из отрядов. Отряды делятся на подотряды, в которых, в свою очередь, выделяются семейства. Например, отряд «Китообразные» включается в класс «Млекопитающие», который относится к типу «Позвоночные». Отряд «Китообразные» состоит из подотрядов «Усатые киты» и «Зубатые киты». Подотряды подразделяются на семейства. (См., напр., Жизнь животных. Т. 6 / Под ред. С.П. Наумова и А.П. Кузякина. М., 1971. С. 251–300).

Черепахи и жабы, как и *киты*, относятся к типу «Позвоночные». Жабы относятся к классу «Земноводные», отряду – «Бесхвостые земноводные», семейству – «Жабы». Черепах относят к классу «Пресмыкающееся, или рептилии», отряд – «Черепахи». *Жуки* относятся к типу «Беспозвоночные», классу – «Членистоногие», отряду – «Жесткокрылые». (См., напр.: Жизнь животных. Т. 3 / Под ред. Л.А. Зенкевича. М., 1969. С. 306–372. Т. 4 / Под ред. А.Г. Банникова. М., 1969. С. 7–198).

30* Этот том имеет название: *Grassmann R*. Die Einleitung in das Gebeude des Wissens oder die wissenschaftliche Propadeutik. Stettin: Druck und Verlag von R.Grassmann, 1882.

31* Описанный Р. Грассманом способ введения *вычитания* в алгебру логики – а именно о ней идет речь – действительно недопустим. Но автор ошибается, полагая, что *все* «алгебраические логики» вводили отрицательные величины и вычитание. Например, ничего подобного не было у Джевонса. Что же касается способов, каким отрицание может вводиться в логику, то они могут быть совсем не такими, какими их представил автор «теории форм». Например, И.И. Жегалкин строит исчисление, в котором операции сложения и умножения определены следующим образом:

$$p + p = 0, pp = p,$$

$$0 + 0 = 0, 0 + 1 = 1 + 0 = 1, 1 + 1 = 0,$$

$$0 \cdot 0 = 0, 0 \cdot 1 = 1 \cdot 0 = 0, 1 \cdot 1 = 1,$$

Если определить разность между p и q как $r = p - q$, так что $r + q = p$, то, прибавляя к обеим частям последнего равенства q, получим: $r + q + q = p + q$, но, $q + q = 0$, откуда $p + q = r = p - q$, т.е. вычитание совпадает со сложением, (см.: Жегалкин И.И. О технике вычисления предложений в символической логике; Арифметизация символической логики // Математический сборник. 1927. Т. 34. Вып. 1; 1928. Т. 35. Вып. 3–4).

32* Это – *обратная* теорема по отношению к предыдущей, которую автор ниже доказывает. Доказательство обратной теоремы можно извлечь из доказательства прямой следующим образом. Если бы a и b, помимо общего для них слагаемого c, имели бы еще одно общее слагаемое, например d, то после перемножения a и b, в полученном многочлене слагаемые, содержащие сомножитель d, обратились бы в нули (согласно № 7), и мы получили бы снова $ab = c$.

33* Мы восполняем применяемые автором сокращения латинских и греческих терминов (например, пишем «n[omina]», хотя в оригинале стоит «n.») только когда данное сокращение встречается первый раз.

34* Термин «встречающиеся понятия» заимствован переводчиком из брошюры: *Бобынин В.В.* Опыты математического изложения логики. Вып. I. М., 1886, раздел «Сочинение Роберта Грассмана», с. 36, однако он употребляется здесь не как равнозначный «пересекающимся понятиям» (как у Бобынина), а как синоним *инцидентных* понятий, т.е. понятий a и b таких, что-либо $a < b$, либо $b< a$ – они действительно «встречаются», так как объем одного оказывается частью другого.

35* Пересекающиеся понятия, по Р. Грассману, имеют общую часть, а также части, присущие только каждому из них. Это совпадает с современным понятием симметрической разности и роднит это определение с булевской дизъюнкцией. Однако уже следующая фраза – о соединенных понятиях – говорит об обычной операции *объединения* объемов понятий. Ср. также приводимые ниже графические пояснения этих понятий, которые даются автором в «Логике» 1890 г. В приводимой там схеме «перекрещивающиеся понятия» совпадают с тем, о чем в данном тексте говорится как о *пересекающихся* понятиях. В «Логике» 1890 г. автор избегает понятия «класс» и пользуется термином «область».

36* Логическая теория, развиваемая Р. Грассманом в разделе «Образование понятий», представляет собой теорию классов как объемов понятий при операциях объединения и пересечения классов (обозначаемых им знаками сложения и умножения), дополнения класса до универсального класса и использовании пустого класса. Но, развертывая свою теорию, он вынужден использовать и средства логики высказываний. Знак равенства, объединяющий две формулы, стоящие в квадратных скобках, уже не означает равенства величин (понятий), – это знак *эквиваленции* или, при другой трактовке, *логической равносильности* двух высказываний (схем высказываний) и может читаться «тогда и только тогда»; из этих высказываний одно представляет собой равенство, а другое – (нестрогое) неравенство: формулу $[a \leq b]$ следует читать «$a < b \vee a = b$», где $\vee$ есть знак дизъюнкции пропозициональной логики. Следование одной формулы из другой

Р. Грассман выражает, используя условное суждение естественного языка («Если..., то»), – это мы вскоре встречаем: уже в № **16**. Конъюнкцию логики высказываний он выражает знаком +, и отличие смысла последнего в этом случае от смысла операции объединения классов усматривается из того, что связывает он не понятия, а равенства или неравенства (ср. ниже теоремы №№ **19**, **20** и др.). Отрицания высказываний выражаются средствами естественного языка. Таким образом, логическая теория Р. Грассмана представляет собой так называемое комбинированное исчисление – классов и высказываний.

Для того чтобы различить два разных смысла знаков = и +, мы будем над ними помещать точки, когда они выражают операцию над высказываниями ($\dot{+}$), либо отношение между ними ($\dot{=}$ или $\dot{<}$). Высказывания (точнее, схемы высказываний) в этом случае *везде* будут заключаться в *квадратные* скобки (что Р. Грассман не всегда делает). Впрочем, в XIX столетии, да часто и в XX, в обозначениях не учитывалось наличие нескольких смыслов (уровней) символов операций и отношений. Например, Де Морган, как правило, использовал знак «=» не только для обозначения равенства или эквивалентности, но и как знак импликации, не делая никаких оговорок. (См.: *Кузичева З.А.* Становление и развитие математической логики // Очерки по истории математики / Под ред. Б.В. Гнеденко. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1997. С. 339–422).

Не удивительно, что В.В. Бобынин, изложивший логику Р. Грассмана в своей брошюре, также не отметил, а, скорее всего, и не заметил, особенностей логического построения автора. Он спокойно выписывал грассмановские формулы, в которых знак + имеет различный смысл (см. с. 48, где мы встречаем: $(a < c) + (u < c) = (a + c) < u$), не давая по этому поводу никаких разъяснений.

37* Здесь Р. Грассман завершает построение того, что ныне носит название *полной дистрибутивной решетки*. Номера **2**.1 и **2**.2 напоминают читателю об установленных в «Учении о величинах» свойствах *ассоциативности* и *коммутативности* операций сложения и умножения, а также об их *дистрибутивности* друг относительно друга. В № **5** введено свойство *идемпотентности* этих операций (как выделяющее логику из теории величин). Номер **10** задал *закон поглощения* для операции сложения, из которого легко получается аналогичный закон для умножения (в «Логике» 1890 г. представленный теоремой № 80). Все это и составляет определение решетки упомянутого вида. Решетка у Р. Грассмана с самого начала не только дистрибутивна, но и *полна* – в том смысле, что еще в № **2**.3 он напомнил о существовании во множестве величин наименьшей и наибольшей – нуле и единице, в логике оказывающихся, соответственно, наинизшим и наивысшим понятиями (№ **25**, **26** и далее). Вполне естественно, что, введя эту алгебраическую систему, Р. Грассман выразил затем ее свойства также и в терминах отношения «меньше или равно», установив хорошо известные теперь «решеточные» соотношения:

$$\downarrow\frac{a \le b}{a+b=b}\uparrow\ (\text{№}\,15)\ \frac{a \le b}{ab=a}\ (\text{№}\,19)\ \frac{a+b=b}{ab=a.}\ (\text{№ №}16,\,81\ \text{«Логики» 1890 г.}).$$

38* Теорема **20** имеет вид:

$$\frac{\downarrow a+b=b, ab=b}{a=b}\uparrow$$

(мы не выписываем грассмановский знак конъюнкции +, соединяющий в его записи две посылки, или, как он выражается, допущения). Р. Грассман доказывает правомерность логического перехода лишь «сверху вниз», оставляя без обоснования тот факт, что из равенства $a = b$ следует формула $(a + b = b)$ & $(ab = b)$. Это доказательство имеет вид:

$a + b = b + b$	(согласно допущению, что a и b равны)	$ab = bb$	(согласно допущению)
$= b$	(согласно **5**)	$=b$	(согласно 5)

Таким образом, доказано, что, если $a = b$, то верны обе формулы $a + b = b$, $ab = b$.

39* Р. Грассман доказывает только прямую теорему, но не доказывает обратную, т.е. то, что из равенства понятий a и b следует конъюнкция неравенств $a < b$ и $b < a$. Доказательство ее выглядит так. Из того, что $a = b$, следует, согласно **20**, формула $a + b = b$, а из нее неравенство $a \leq b$ (согласно **15**); поскольку $a \leq b$ есть дизъюнкция $a < b \vee a = b$, в которой второй член (как истинный) может быть отброшен, мы получаем $a < b$. Далее, из того, что $a = b$, согласно **20**, получается формула $ab = b$, а из нее, согласно **19**, следует формула $b \leq a$, т.е. $b < a \vee a = b$; отбросив истинный дизъюнктивный член $b = a$, получаем окончательно $b < a$. Конъюнкция $a < b$ & $b < a$ и составляет искомое заключение.

40* Здесь *перекрещивающиеся* понятия отождествляются с *пересекающимися* понятиями (см. приводимые ниже примеры). Во втором разделе данного труда (№ **59**) перекрещивающиеся понятия получают дополнительную смысловую нагрузку и рассматриваются как чистый случай пересекающихся.

41* Проблема деления в логике возникла вместе с алгеброй логики, точнее вместе с трудами Буля. Р. Грассман ошибается, утверждая, что все представители алгебры логики вводили в логику деление и дроби. Этого не было, например, у А.Де Моргана и Ст. Джевонса. Однако проблема операции, в каком-то смысле аналогичной делению, возникает в теории решеток, развитием которой является булева алгебра, содержавшаяся в логическом построении Р. Грассмана (см. об этом в Послесловии). Впрочем, и сам он вынужден оперировать дробями, когда в «Логике» 1890 г. излагает метод решения уравнений «по Булю». Перевод соответствующего раздела труда 1890 г. (см. с. 00 наст. изд.).

42* Представляется, что Р. Грассман не понял или сознательно утрировал точку зрения Гегеля, который неоднократно и вполне четко высказывался о соотношении конечного и бесконечного. Например, Гегель пишет: «...конечность также ближайшим образом выступает в определении реальности. Но истину конечного составляет, наоборот, его *идеальность*. И точно так же бесконечное рассудка, которое ставится им *рядом* с конечным, само есть одно из двух конечных, есть неистинное, *идеальное*». (Энциклопедия философских наук. М.: Мысль, 1975. Т. 1. С. 236).

43* Не ясно, какой свой труд имеет в виду Р. Грассман. Ни в одной из пяти книг 1872 г., составляющих серию «Учения о формах», число параграфов не достигает названных здесь цифр. Возможно, он имел в виду свое «Учение о сущностях», выпущенное в 1875 г.

44* Равенства $\overline{T} = 0$ и $\overline{0} = T$ представляются настолько очевидными, что кажется, их доказательство лежит на ладони. Однако это не так, поскольку еще не установлены многие свойства операции отрицания (например, не обоснован закон снятия двойного отрицания); к тому же, проводя соответствующие рассуждения, мы имеем право опираться *только* на ранее доказанные логические законы. Поэтому приведем эти доказательства:

(1) $T = 0 + \bar{0} = \bar{0}$ (так как, $a + \bar{a} = T$, № 28)

$\bar{0} + T = T$ (так как для любого *a*: 0 + *a* = *a*, 2).

(2) $0 = T \cdot T$ (№ 22)

$= T$ (согласно закону T*a* = *a*, № 25, где роль *a* играет T).

С.А. Яновская в свое время подчеркивала, что многие вещи в логике представляют затруднения при их доказательстве именно в силу их чрезмерной простоты.

45* Теорема о единственности операции отрицания (дополнения) в теории решеток очень важна – это существенный шаг при переходе от дистрибутивной решетки к булевой алгебре. К сожалению, автор не доводит ее доказательства до конца. Он показывает лишь, что (1) $a = \bar{a}\bar{a}_1$, предоставляя читателю самому убедиться в том, что (2) $\bar{a}_1 = \bar{a}_1\bar{a}$; доказательство этого факта вполне аналогично рассуждению, проводящему к (1). В предположении доказанности (2) выстраивается цепочка: $a = \bar{a}\bar{a}_1 = \bar{a}_1 a = \bar{a}_1$.

Введение отрицаний (дополнений) – дальнейшие их свойства раскрываются в теоремах данного раздела грассмановской «Логики» – завершает построение того, что ныне называется *булевой алгеброй*.

46* Как и в предыдущем случае, вторую часть доказательства автор предоставляет читателю. Р. Грассман доказал, что $\bar{\bar{a}} = \bar{\bar{a}}a$; если в этом доказательстве – везде – заменить $\bar{\bar{a}}$ понятием *a*, а *a* – его отрицанием, то будет доказано, что $a = a\bar{\bar{a}}$. Тогда и получается цепочка равенств: $\bar{\bar{a}} = \bar{\bar{a}}a = a\bar{\bar{a}} = a$.

47* Здесь Р. Грассман должен был бы оговорить и случай, когда в качестве допущения вместо $u \leq \bar{a}$ используется $a \leq \bar{u}$: впрочем, равенство 0 = *au* в этом предположении выводится аналогично.

48* В этом случае вместо *u* берется его отрицание и используется закон, позволяющий снимать двойное отрицание.

49* Р. Грассман доказывает только прямые теоремы. Доказательство обратных получается путем «навешивания» отрицаний на все понятия и снятия с величин всех возникающих при этом двойных отрицаний.

50* Согласно Гегелю, «*Чистое бытие* образует начало, потому что оно в одно и то же время есть и чистая мысль, и неопределенная простая непосредственность, а первое начало не может быть чем-нибудь опосредованным и определенным» (Энциклопедия философских наук. М., 1975. Т. 1. С. 217).

51* То есть $[a + u = T] \doteq [\bar{a}\bar{u} = 0]$. Эту часть теоремы автор не доказывает – доказательство ее вполне аналогично проведенному Р. Грассманом обоснованию выписанной им равносильности: требуется только заменить *a* и *u* их отрицаниями, а отрицания этих понятий – ими самими, что предполагает снятие двойных отрицаний. Заметим, что и в *доказательстве a*, когда имеет место ссылка на № 37, подразумевается снятие двойных отрицаний понятий *a* и *u*.

52* Р. Грассман доказывает только прямые теоремы, но не обратные. Обоснование последних следует из свойств 0 и T: если понятие *a* есть «ничто», то оно подчинено любому понятию и, значит, понятиям *u* и $\bar{u}$ (каким бы ни было *u*); если *a* совпадает со всеобщностью, то ему подчиняются любые понятия, в частности те же *u* и $\bar{u}$.

53* Р. Грассман использует здесь латинское изречение, выражающее нелепость образования выражений «по противоположности». Квинтиллиан («Обучение оратора», I, 6, 34) говорит: «Допустим ли мы, чтобы некоторые слова объяснялись “по противоположности”, например слово “lucus” (роща) выводилось из того, что locus, обладая густой тенью, мало lucet (светит)?» (*Бабичев Н.Т., Боровский Я.М.* Словарь крылатых латинских слов. М., 1982. С. 417).

54* В «Логике» 1890 г. Р. Грассман передает конъюнкцию величин не знаком + (над которым мы в нашем переводе в таких случаях ставим точку), а выписывая их одну за другой. Мы сохраняем стиль записи 1872 г.

55* «Учение о сущностях» Р. Грассман излагает в отдельной книге своей многотомной «Системы знания».

56* В подлиннике: der Mensch ist ein Geist. Поскольку в русском языке отсутствует неопределенный артикль, а его передача подчас необходима, чтобы выражение на естественном языке соответствовало формульной записи, мы подобные предложения будем нередко переводить в виде: «человек есть некое одухотворенное существо». В случаях же, когда соответствие словесного и формульного выражений ясно из контекста, мы будем пользоваться принятой в русском языке записью субъектно-предикатных предложений (т.е. без уточнения «некое», «некий» и т.п.).

Явное выписывание выражения «некое» («некая», «некий») – или подразумевание его наличия – важно потому, что ниже, в **№ 47**, Р. Грассман вводит «неопределенный указатель» x, представляя (категорические) суждения в форме $a = xu$, где x представляет произвольный признак, суживающий объем понятия u до объема понятия a. В русском языке «неопределенный указатель» можно передать оборотом «один из», и тогда предложение «Человек есть одухотворенное существо» примет вид: «Человек есть одно из одухотворенных существ». Впрочем, в своей теории умозаключений (см. раздел 3 данного сочинения **№ 62**), Р. Грассман уже не пользуется выражением «указатель», а говорит просто о «неопределенных понятиях».

57* Здесь Р. Грассман воспроизвел – и затем подверг критике – классификацию суждений, изложенную в «Логике» И. Канта 1800 г. В русском переводе *positiver* (*Urteil*) переводится как утвердительное суждение, но чтобы не смешивать кантовскую терминологию с грассмановской, где используются выражения «утверждение», «утвердительные суждения» (Behauptung, bejahende Urteile), мы передаем кантовское *positiver* как «положительное» (суждение).

58* В конце двенадцатой главы сочинения «Об истолковании» Аристотель пишет: «И вот какие [выражения] следует считать противолежащими друг другу: “могущее – не могущее”; “возможное – не возможное”; “не могущее – не немогущее”; “необходимое – не необходимое”» ⟨...⟩ и в главе тринадцатой продолжает: «из “могущего быть” следует “возможно быть”, как и из “возможно быть” – “могущее быть”, равно как и “не немогущее быть” и “не необходимо быть”; далее, из “могущего не быть” и “возможно не быть” следует “не необходимо не быть” и “не возможно быть” – “необходимо не быть” и “немогущее быть”, а из “не могущего не быть” и “не возможно не быть” – “необходимо быть” и “не могущее не быть”» (*Аристотель.* Об истолковании, 22а 10–23; русск. перев.: Соч: В 4 т. Т. 2. М., 1978. С. 109–110). Никакого сопоставления модальностей с кванторными словами «все», «некоторые» и др. в этих главах нет, об этом говорится в других главах этого труда Стагирита (в частности, в седьмой и восьмой), но без всякой связи с модальностями.

59* Здесь Р. Грассман искажает Аристотеля. В «Первой Аналитике» Аристотель рассматривает – наряду с ассерторической, т.е. немодальной силлогистикой – вопросы, касающиеся модальных силлогизмов. В них в качестве силлогистических предложений встречаются высказывания о «необходимо присущем» и «возможно присущем». Силлогизмы же у Аристотеля – это умозаключения, и их изучение – предмет «доказывающей науки»: аналитики, впоследствии названной логикой.

60* *Подчиняющими* суждениями Р. Грассман в «Логике» 1890 г. называет утвердительные суждения (общие и частные) – в отличие от разделяющих суждений.

61* Кант определяет: «*В положительном* суждении субъект мыслится *под* сферой предиката, в *отрицательном* он полагается *вне* сферы последнего и в *бесконечном – в* сфере понятия, лежащего вне сферы другого» (*Кант*. Логика // И. Кант. Соч.: В 6 т. Т. 3. С. 406). А в следующем сразу же за этими определениями примечании он поясняет, в чем состоит отличие бесконечных суждений от суждений отрицательных. Бесконечное суждение указывает не только то, что субъект не содержится под сферой предиката (и что имеет место в случае отрицательных суждений), но и то, что он находится вне его сферы, где-то в бесконечной сфере. В бесконечных суждениях, в отличие от отрицательных, отрицание относится не к связке, а к предикату; бесконечные суждения имеют форму «нечто есть *не А*»; Кант приводит следующие примеры бесконечных суждений: «человеческая душа *не смертна*», «некоторые люди *не суть ученые*».

62* Следующее далее выражение естественного языка, содержащее не принадлежащий ему знак $\overline{<}$, читается: «*а* есть понятие, которое ни равно, ни подчинено понятию *и*».

63* Латинское стихотворение, предназначенное для запоминания смысла сокращений *a*, *e*, *i* и *o*. Его перевод:

a утверждает, *e* отрицает, но оба общие,
i утверждает, *o* отрицает, но оба частные.

Это, как и многие другие аналогичные стихотворения, были во множестве придуманы средневековыми западноевропейскими богословами и философами – так называемыми схоластами. Их много, например, в труде Петра Испанского (XIII в.) – «Summulae logicales».

64* Под *знаком качества* понятий, входящих в суждения – а в дальнейшем (в разделе 3 «Образование умозаключений») под «знаком понятия», «знаком действия (предиката)» – автор имеет в виду положительную либо отрицательную форму понятий (первую он обычно называет «самим понятием»); в теории умозаключений появляются «обращения знаков понятий», т.е. переход от одной из этих форм к другой в рамках суждения – равенства либо неравенства, возможно со снятием двойных отрицаний. В современной пропозициональной логике подобные переходы – если они логически правильны – называются *контрапозициями* (различных видов).

65* Ниже, при переводе примеров 1–4 мы не выписываем немецкий эквивалент – *ein* – «неопределенного указателя».

66* Имеются в виду виды суждений, приведенные в **№ 51**. В помещенной ниже таблице они занимают левую колонку, озаглавленную «Суждения». Каждая формула правой колонки получается из соответствующей ей формулы левой колонки путем обращения. Оправданным является и обратный переход.

67* Обоснование равносильности формул, стоящих в строках 1–8, не доведено автором до конца – не рассмотрены уравнения, содержащие произведения: это предоставляется читателю. Соответствующие выкладки элементарны: так, из формулы $a < u$ (первой в строке «Суждения») следует формула $au = a$ (согласно **19**) и, значит, формула $\bar{a}\bar{u} = \bar{u}$; внеположность же понятий a и $\bar{u}$ (выражаемая последней формулой этой строки) прямо вытекает из того, что пересечение объемов понятий a и u совпадает с объемом понятия a.

68* В № **40** (на него далее имеется ссылка) соотношения, которые имеются в виду, передаются формулами 1. $a \le u$ («полностью полагаемое утверждение вещи») и 2. $\bar{u} \le \bar{a}$ («полностью отрицаемое отвержение вещи»).

69* В № **41**, на который далее следует ссылка, соотношения, которые имеет в виду Р. Грассман, передаются формулами: 1. $a \le \bar{u}$ и 2. $u \le \bar{a}$.

70* Здесь Р. Грассман так дополняет определение умозаключения, что под него подпадают выводы, аналогичные тем, которые в традиционной логике называются непосредственными умозаключениями. Примером, иллюстрирующим подобное дополнение, может служить № **33**, согласно которому из посылки $au = 0$ следуют два неравенства $u \le \bar{a}$ и $a \le \bar{u}$. Очевидно, что это добавление не только не расширяет теорию умозаключений, но и противоречит самому определению, поскольку понятия a и u, фигурирующие в обоих заключениях, входили и в посылку.

71* Приводимые ниже названия модусов силлогизма «старой логики» – *barbara*, *celarent* и др. были придуманы логиками-схоластами, и входящие в них буквы обладают определенным смыслом. Имеется ряд несущественных отклонений в их написании. С наиболее распространенным вариантом можно познакомиться по книге: *Челпанов Г.И.* Учебник логики. 1906 г. До революции эта книга была отмечена премией Петра Великого и много раз переиздавалась. В 1946 г. вышло ее советское издание, в котором из текста были изъяты «идеологически невыдержанные» места; в 1994 г. учебник Челпанова был переиздан в первоначальном виде издательской группой «Прогресс». Латинские названия модусов, приводимые Р. Грассманом, отличаются от их названий в книге Челпанова. О вариациях наименований силлогистических модусов, встречавшихся в истории логики, см. книгу: *Bochenski J.M.* Formale Logik. Verlag Karl Alber. Freiburg; Munchen. 2. oder 3. Auflage. 1970 (с. 625–626: список мнемонических обозначений); существует и английский перевод труда Бохенского.

72* Имеются в виду фигуры «старой логики» (с ними можно ознакомиться по тому же учебнику Челпанова), а не грассмановские «разряды». Приводимые ниже их латинские характеристики переводятся так: (1) «сказанное обо всем и ни о чем» – это так называемая аксиома силлогизма, передающая смысл модусов первой фигуры, к которой (считающейся наиболее «совершенной») сводятся модусы остальных фигур; (2) «сказанное о противоположном» (в модусах этой фигуры одна из посылок должна быть отрицательной); (3) «сказанное о примере» (в модусах этой фигуры средний термин является субъектом в обеих посылках, и его можно считать предъявлением примера, на основе которого строится заключение); (4) «сказанное об обратном» (в модусах этой фигуры, которой у Аристотеля еще не было, средний термин располагается обратно тому, как это имеет место в модусах первой фигуры).

73* Ссылка не ясна. Ни в одном сочинении 1872 г., озаглавленном «Учение о формах» и состоящем из пяти книг, число параграфов не превышает 100. Возможно, Р. Грассман имеет в виду одну из работ, выпущенную им позднее, в 1875 г.

74* В «Учении о величинах» переплетение, т.е. умножение, передается термином *Weben*. Быть может, это дань терминологии Германа Грассмана.

75* В данном примере (к которому Р. Грассман прибегает и в следующем № 77) автор смешивает геометрические фигуры (ромб, прямоугольник) с геометрическими телами (прямоугольный параллелепипед).

76* В «Логике» 1890 г. Р. Грассман добавил четвертый раздел – «Учение о доказательствах». *Доказательство* (apódeixis, demonstratio) он определяет как соединение многих суждений такое, что из заданных суждений – он называет их *положениями* – выводится новое, заключительное суждение, причем предполагается, что справедливость исходных положений уже доказана (это допущение в явном виде не формулировалось в разделе об умозаключениях). Он выделяет (1) *суммирующие*, (2) *обобщающие*; (3) *цепные* и (4) *смешанные* доказательства, причем первые три подразделяются на общие и частные смотря по тому, каково получающееся заключение; в смешанных же доказательствах используются доказательственные схемы предшествующих типов (в этом случае заключение может быть, например, таким: $(a + b) < cd$). Кроме того, Р. Грассман выделяет (4) *разделительные* доказательства – *косвенное* и *возвратное*. Доказательства (1)–(4) имеют вид:

$$(1)\ [a_1 < u] \dot{+} [a_2 < u] \dot{+} \ldots \dot{+} [an < u] \doteq [a_1 + a_2 + \ldots + an < u];$$

заключение общее; в случае частного заключения при величинах a_i ($i = 1, 2, \ldots, n$) появляются коэффициенты x с соответствующими индексами.

$$(2)\ [u < a_1] \dot{+} [u < a_2] \dot{+} \ldots \dot{+} [u < a_n] \doteq [u < a_1 + a_2 + \ldots + a_n];$$

из этого общего заключения способом, аналогичным предыдущему, получается частное.

$$(3)\ [a_1 < a_2] \dot{+} [a_2 < a_3] \dot{+} \ldots \dot{+} [a_{n-1} < a_n] \doteq [a_1 < a_n];$$

здесь знак < означает логическое следование; из этого общего умозаключения получается частное следующим образом: величина a_1 умножается на коэффициент x_1, и заключение принимает вид $x_1 a_1 < a_n$.

(4) *Косвенное* разделительное доказательство:

$$[a < (u_1 + u_2 + \ldots + u_n)] \dot{+} [a < (u_1 + u_2 + \ldots + u_h)] < [a < (u_i + u_k + \ldots + u_n)];$$

буквенные индексы предполагаются алфавитно упорядоченными.

Возвратное разделительное доказательство:

$$[u_1 \cdot u_2 \cdot \ldots \cdot u_n < a] \dot{+} [(u_1 \cdot u_2 \cdot \ldots \cdot u_h) < a] < [u_i \cdot u_k \cdot \ldots \cdot u_n < a].$$

(См.: *Grassmamn R*. Die Logik, 1890. S.112–119).

77* *Wissenslehre* составляет один из томов грассмановской «Системы знания»: *Grassmann R*. Das Gebeude des Wissens. Bd. 1: Die Wissenslehre oder Philosophie. Tl. 1. Stettin, 1890.

Решение логических уравнений

Приведенный нами текст представляет собой заключительный параграф обширного (объемом в 49 с.) «Введения в логику» в сочинение Р. Грассмана «Логика» (1890 г.), занимая в этом «Введении» страницы 46–49. Параграф озаглавлен «Die logischen Gleichungen und Formeln».

[1*] «В дальнейшем», т.е. после «Решения логических уравнений» у Роберта следует изложение логики, структурно повторяющее «Логику» 1872 г., части: «Образование понятий», «Образование суждений» и «Образование умозаключений». В них о решении логических уравнений не говорится ничего.

Р. Грассман ошибался, когда считал работу с логическими уравнениями не интересными для математиков. В XIX веке математическая мысль прошла мимо тематики этого рода, относя ее к логике. В известных «Лекциях о развитии математики в XIX столетии (том I) Ф. Клейна, вышедших в 1926 г. (и переведенных на русский язык в 1937 и 1980 гг.), имя Буля, к которому восходит сама проблематика решения логических уравнений, даже не упоминается. Интерес к ней изначально возник в связи с идеей использовать аппарат алгебры для решения проблем логики, вызванной к жизни успешным решением уравнений 3-й и 4-й степеней и ведением символики в алгебре в XVI–XVII веков. Это, во-первых, во-вторых, было замечено, что между решением алгебраических уравнений и выводом следствий из посылок имеется четкая аналогия. Эту аналогию стремился использовать при построении новой логики Г. Лейбниц. Еще отчетливее проблема составления и решения логических уравнений была поставлена в XVIII в. Г. Ламбертом. В XIX в. представители алгебры логики (Буль, Шрёдер, Порецкий и др.) рассматривали логические уравнения в качестве важной составляющей в арсенале математических методов исследования логических выводов. Подробнее см., например, *Кузичева З.А.* Становление и развитие математической логики, гл. II–III // Очерки по истории математики, М.: Изд-во Моск. Ун-та, 1997,

[2*] Это теорема не входит в параграф о логических уравнениях, а непосредственно предшествует ему. Мы приводим ее потому, что она существенно используется в последующем изложении.

[3*] Здесь и далее в анализе доказательств мы, по большей части, используем ссылки не на теоремы «Логики» 1890 г., а на изложение, данное Р. Грассманом в книгах 1872 г. (причем позволяем себе прибегать и к современной терминологии). В таких случаях пояснения помещаются в квадратных скобках.

[4*] Напоминаем: $f \circ a$ означает, что формула f содержит величину a, является, по существу, функцией, зависящей от a. Буль называл функции такого вида логическими, если входящие в них буквы обозначают классы. Заметим, что форму, о которой говорит Р. Грассман в теореме 105а, использовали и Буль, и Шрёдер, и другие представители алгебры логики. Особенно интересной представляется трактовка проблемы решения логических равенств, предложенная русским логиком, математиком и астрономом П.С. Порецким в его работе «О способах решения логических равенств и об обратном способе математической логики», Казань, 1884.

[5*] Мы не приводим комментарии – так называемый анализ – этого доказательства, оставляя это читателю....

[6*] Р. Грассман не совсем прав, утверждая, что это уравнение впервые решил Шрёдер. Впервые такого рода уравнения решил Буль (1847). Буль показал, что равенство $xy = 0$ является необходимым и достаточным условием разрешимости уравнения. Выражение $xa + y\bar{a} = 0$ получило название нулевой формы уравнения. Шрёдер уточнил обоснованность метода Буля, в частности, он явно использовал при этом квантор существования. Истолкование ответа на вопрос «Что значит: решить логическое уравнение?» также представляло проблему алгебры логики. П.С. Порецкий полагал, что решить логическое уравнение – значит, вывести следствия из информации, содержащейся в условии задачи.

Между Порецким и Шрёдером состоялась дискуссия по проблеме решения логических равенств. Она исчерпывающим образом проанализирована в Приложении к работе: *Кузичев А.С.* Диаграммы Венна. История и применения. М.: Наука, 1968.

**Учение о величинах,
основная часть учения о мышлении**

Оригинал: «Die Grösenlehre, der Grundstamm der Denklehre»; второй титульный лист: «Die mathematischen Wissinschaften. Erster Hauptzweig der Denklehre. [1890]». Введение занимает с. III–XXIV. Данный текст можно найти также в издании: *R. Grassmann.* Das Gebaude des Wissens. Bd. I: Die Wissenslehre oder die Philosophie. Thl. 1: Das Verstandeswissen oder das formale Wissen, umfassend die auf die Philosophie vorbereitenden Wissenschaften, 1890 (титульный лист); на обложке книги значится: Das Gebaude des Wissens. Tl. 1, Hälfte 1: Philosophie, XXXI S. (Vorwort zum Gebaude des Wissens), IV, 120 S. (Die Geschichte der Philosophie ⟨...⟩), XII, 216 S. (Die Sprachlehre ⟨...⟩), 50 S. (Das Formelbuch der Denklehre).

1* Ср. «Учение о формах» 1872 г. – в настоящем издании с. 181 и коммент. 18*. В отличие от сочинения 1872 г. здесь Р. Грассман более подробно характеризует как взгляды Лейбница, так и особенности собственного подхода к учению о величинах – подхода, который, по его словам, был разработан им независимо от старшего брата Германа.

2* Мы перевели слова Лейбница с текста Р. Грассмана. Заключительная часть отрывка из письма Лейбница (касающаяся перспектив разработки учения о величинах «каким-нибудь искусным человеком») полностью совпадает с соответствующими словами в цитате, выписанной Р. Грассманом в его работе 1872 г. Следует заметить, что Р. Грассман модернизирует лейбницевскую формульную запись. Равенство $c^2 = a^2 - b^2$ записано Лейбницем в виде: *cc aeqa aa–bb;* в пропорции, фигурирующей далее в тексте великого философа, в знаковой форме представлена только операция деления (:). Разумеется, кроме букв *a*, *b* и *c*, играющих роль символов величин, все остальное выражено словами.

3* *Grassmann J.G.* Über den Begriff und Umfang der reinen Zahlenlehre. Programm des Marienstiftsgymnasiums zu Stettin. Gedruckt bei C.W. Struck, 1827. Биограф Германа Грассман Ф. Энгель, посвятивший Юстусу Грассману целую главу в своем подробном биографическом труде, приводит еще одну обширную выдержку из этой «Программы», свидетельствующую о глубине, широте и педагогической ориентации Ю. Грассмана (см.: *Engel F.* Grassmanns Leben // Hermann Grassmann Gesammelte mathematische und physikalische Werke. Bd. 3. T. 2. S. 4–5). Ф. Энгель высказал взгляд, что «Программа» Ю. Грассмана во многих отношениях такова, что заставляет вспомнить «Введение» его старшего сына к «Учению о протяженностях» 1844 года.

4* Из трех терминов: Anknüpfung, Einknüpfung и Verknüpfung – Р. Грассман в «Учении о формах» 1872 г. использует только последний, хотя представленный в данном тексте ход мысли встречается уже во Введении в «Учение о величинах». Стоит заметить, что термин *Verknüpfung* употребляется и в более общем смысле – как обозначение связывания величин вообще и даже результата связывания (сочленения).

5* Сказанное не очень соответствует выкладкам автора в его «Логике» 1890 г., где показано, что введение в логику операций вычитания и деления (так, как их определяет Р. Грассман) невозможно, так как влечет противоречие. См.

в настоящей книге с. 234 и комм. 31* и 243 и комм. 41* (подстрочные примечания, воспроизводящие соответствующие рассуждения автора в его «Логике» 1890 года).

6* Автор проявляет в изложении очевидную небрежность, приписывая Аристотелю введение знаков сложения, вычитания, равенства и неравенства (изображая последний в своем стиле – как $\gtrless$). Основатель логики использовал в логических целях только буквы, о чем сам Р. Грассман неоднократно писал в своих сочинениях.

7* Ср. таблицу в «Учении о формах» 1872 г.

8* Адекватного термина в русском языке нет, немецкое das Geänder точнее было бы передать словом вроде «изменятель», но это совсем уж неблагозвучно.

Введение в учение о мышлении

Текст, озаглавленный «Vorwort zur Denklehre», представляет собой введение ко второй половине первого тома «Системы знания» Р. Грассмана. На обложке и контртитульном листе значится «Das Gebäude des Wissens von Robert Grassmann. Erster Band. Zweite Hälfte. Die Denklehre. Stettin, 1890. Druck und Verlag von R. Grassmann». На титульном же листе читаем: «Учение о мышлении, или Учение о тех видах научных мыслительных актов и связей, которые возможны для человеческого ума, об их формах и законах, в строгом изложении с помощью формул. Вторая книга "Учения о знании, или Философии" (выходные данные те же). Имеется еще один титульный лист, с тем же текстом, но без указания: «Вторая книга». На эту книгу мы в дальнейшем ссылаемся: Die Denklehre, 1890.

Произведения Р. Грассмана трудны для отождествления, так как в них обычно имеются несколько разных титульных листов одного и того же сочинения; нередко в различных частях одной и той же книги встречается несколько независимых нумераций страниц – и арабскими, и римскими цифрами; встречаются предисловия и введения к разным частям одного и того же труда. Иногда не ясно, с чем мы имеем дело, – с единым трудом или несколькими различными книгами, объединенными «серийным» заглавием. Книги научного содержания обычно имеют у Р. Грассмана заголовок и подзаголовок и название, общее с другими книгами. Данная ситуация усугубляется еще и тем, что переиздания своих трудов Р. Грассман снабжал измененными титульными листами. Поэтому в разных библиографических источниках – таких, как Национальная немецкая библиография, Каталог Библиотеки Конгресса США или Каталог Библиотеки Британского музея, – одна и та же книга может фигурировать под разными названиями. Все это затрудняет идентификацию работ данного автора, осуществить которую подчас невозможно, не имея на руках соответствующих изданий.

Сказанное подтверждается примером структуры второй половины первого тома главного сочинения Р. Грассмана. За текстом «Автора» (см. ниже коммент. 1*) следует предлагаемое вниманию читателя Введение в «Учение о мышлении» (с. III–XVI), затем «Содержание» (с. XVII–XXII); новый титульный лист – «Учение о величинах, основной ствол учения о мышлении» (без указания автора и приведения выходных данных; этот заглавный лист не нашел отражения в «Содержании» тома; еще одно «Введение» (Vorwort, с. III–XXIV), перевод которого помещен ниже (в «Содержании» это «Введение» также не указано), – и лишь после всего этого начинается основной текст книги, с. 1–531, охватываемый упомянутым «Содержанием».

Примечательно, что «Книга формул учения о мышлении» (50 с.), имеющая собственный титульный лист и самостоятельную нумерацию страниц, – книга, по своему содержанию относящаяся к этой «второй половине» первого тома, была выпущена в виде приложения к первой части этого тома, т.е. к той части, которая вообще не содержит формул. В том экземпляре первой части рассматриваемого тома, которым пользовался переводчик, эта «Книга формул» помещена в конце этой части и переплетена вместе с нею. В библиографическом описании «Системы знания», имеющемся в Национальной немецкой библиографии (см. Cristian Gottlob *Kayser's* Vollstandiges Bucher-Lexikon, enthaltend alle vom 1750 bis Ende des Jahres 1890 im deutschen Buchhandel erschienen Bucher und Landkarten. Bd. 25 oder des X. Supplimentsbandes erste Hälfte. 1887–1890. A. – K. Leipzig: T.D. Weigel Nachfolger. (Ch.H. Tauchnitz), 1891, S. 499), эта «Книга» рассматривается как входящая именно в эту часть, что видно из приводимых данных о числе страниц первой части первого тома.

1* Перед этим «Введением» на отдельной странице без какого-либо заголовка за подписью «Автор» помещено обращение Р. Грассмана к читателю. В нем сообщается, что в ближайшее время будут изданы оба тома «Системы знания», в которых излагается философия. «Уже вышли в свет два полутома – "Учение о языке" и "Учение о сущностях"; последний том охватывает то, что обычно понимают под метафизикой, натурфилософией, философией государства и философией религии, и вскоре выйдут остальные два полутома – "Учение о мышлении", содержащее изложение "новой дисциплины", в которой рассматривается учение о научных мыслительных операциях, возможных для человеческого ума, об их формах и операциях, и которая охватывает четыре математические и четыре логические ветви, и "Учение о познании", в котором показывается, как можно достигать абсолютно строгого научного знания, приобретаемого человечеством на все времена» (Die Denklehre. 1890. S. II).

2* Р. Грассман имеет в виду соответствующую книгу «Системы знания», 1890 г. Лучше, однако, обратиться к переводу «Учения о формах» 1872 г. (см. с. 00 наст. изд.), где содержится первоначальный вариант учения о величинах. В последующих изложениях этого учения (1875, 1890) Р. Грассман только расширял его, ничего принципиально в нем не меняя.

3* Знак $\lessgtr$ означает неравенство (величин); в современной математике используется знак $\neq$.

Учение о науке . Введение

Текст Р. Грассмана представляет собой введение в первую часть – «Учение о мышлении» – его труда «Учение о науке, или Философия». Книга, которой пользовался переводчик, имеет ряд титульных и контртитульных листов: В их числе: Die Wissenschaftslehre oder Philosophie. Erster Teil. Die Denklehre. Stettin, 1875. 176 S.; Die Denklehre. Stettin, 1875. Приведем данные об остальных трех частях: Thl. 2: Die Wissenslehre (на мягкой обложке этой части стоит год 1876); Thl. 3: Die Erkenntnislehre, 1876. 264 S.; Thl. 4: Die Weisheitslehre, 239 S. (при последующих ссылках на этот четырехтомник: Die Philosophie, 1875–1876). Через несколько лет «Философия» Р. Грассмана была переиздана им под заголовком: Die Einleitung in das Gebäude des Wissens oder die wissenschaftliche Propädeutik (4 Theile), 1882. Это издание вышло единым томом – в отличие от издания 1875–1876 гг., выпущенного в двух томах, каждый из которых содержал две части. Оно отличается от прежнего как титульным листом всего сочинения, так и титульными листами своих частей, а также наличием нового введения (S. III–XV).

Текст «Введения», с которого сделан перевод, занимает в книге «Учение о науке, или Философия» с. 5–15. Р. Грассман излагает в нем свою концепцию философии как «учения о науке», долженствующего охватить общим взглядом все человеческое знание. Философия рассматривается при этом как часть «системы знания», – такая часть, которая включает помимо прочего математику и логику.

1* Р. Грассман, по-видимому, имеет в виду знаменитые слова апостола Павла из главы 3 *Первого послания к коринфянам*: «Если кто из вас думает быть мудрее в веке сем, тот будь безумным, чтобы быть мудрым. Ибо мудрость мира сего есть безумие перед Богом» (3, 18–19); ср. сказанное апостолом Павлом ранее, в гл. 2: «И слово мое и проповедь моя не в убедительных словах человеческой мудрости, но в явлении духа и силы, чтобы вера ваша *утверждалась* не на мудрости человеческой, но на силе Божией» (2, 4–5).

2* В заключении Р. Грассман указывает содержание четырех своих книг, в которых излагается его учение о мышлении: Wahrnehmungslehre («Учение о восприятии») и Gestaltungslehre («Учение о преобразованиях»); в частности, здесь показывается, как «благодаря памяти и воображению образные представления перерабатываются в представления научные» (Wissenschaftslehre oder Philosophie, S. 16). Далее следуют книги: Sprachlehre («Учение о языке») и Formdenken («Мышление в формах» – формальное мышление). В них рассматриваются «различные формы мышления», что благодаря разветвлению учения о формах, приводит, по словам Р. Грассмана, к «завершению изучения процесса образования понятий и мыслей» (ibid). Как сказано выше, все эти книги были выпущены автором в 1875–1876 гг.

Очерк истории логики

Текст Р. Грассмана представляет собой введение в «Логику» 1890 г. (переизданную в 1900 г.) «Vorwort zur Logik», занимая в этой книге с. III–XIII. В нем обширные подстрочные примечания включены как часть в изложение автора, но набраны они петитом. Название данному материалу дано переводчиком, так как оно отвечает содержанию материала.

1* Г. Фреге в 1879 г. (Begriffsschrift) отмечал более серьезные, чем многозначность, источники возможных ошибок, скрытые в «обычном» языке: «Язык не настолько подчиняется логическим законам, чтобы следование грамматике само по себе гарантировало формальную правильность хода мыслей» (*Фреге Готтлоб.* Логика и логическая семантика. Сб. трудов / Перев. с нем. М., 2000. С. 154).

Заметим, кстати, что затруднения, проистекающие из многозначности слов, коренятся не в одной только синонимичности: «Одно и то же слово служит для обозначения и данного понятия, и отдельного предмета, подпадающего под это понятие. Вообще различие между понятием и чем-то единичным в языке четко не проводится. “Лошадь” может означать и отдельное существо, и определенный вид живых существ, как в преломлении “лошадь есть травоядное животное”, наконец, “лошадь” может означать понятие, как, например, в предложении “это есть лошадь”». Там же.

2* Очевидно, Р. Грассман не располагал сведениями о математико-логических опытах Лейбница, хотя если не все, то значительная часть соответствующих материалов автора calculus philosophicus была тогда доступна для изучения. См., напр., *Кузичева З.А.* Логическая программа Лейбница и ее роль в истории логики и кибернетики // Вопросы кибернетики. № 78. М.: Изд-во АН СССР. С. 3–36.

3* *Кант И.* Логика // И. Кант. Трактаты и письма. М.: Наука, 1980. С. 404. См. также примечание о кантовском определении суждения, имеющееся в русском издании этого труда (с. 656).

4* Отношение Р. Грассмана к Гегелю изменялось по мере разработки им «Системы знания». В «Логике» 1872 г. о Гегеле говорится, что он нанес логике «безмерный вред», а в трудах 1890 г. их автор находит положительное даже в гегелевском логическом негативизме.

5* Р. Грассман безосновательно приписывает Аристотелю взгляд, согласно которому логика должна строиться с помощью формул.

6* Имеется в виду диалог Мефистофеля – представившегося Фаустом – со студентом из первой части знаменитого гётевского творения. На слова студента «Я б стать хотел большим ученым, и овладеть всем потаенным» следует ответ:

«Сперва хочу вам в долг вменить
На курсы логики ходить...
Для этого придется впредь
В редукции понатореть,
Классифицируя поболе...
Придайте глубины печать
Тому, чего нельзя понять.
Красивые обозначенья
Вас выведут из затрудненья...
Профессору смотрите в рот
И повторяйте, что он врет...
Бессодержательную речь
Всегда легко в слова облечь.
Из голых слов, ярясь и споря,
Возводят здания теорий».

(*И.В. Гёте.* Фауст // Собр. соч. Т. 2. М., 1976. С. 68–71. Пер. Б. Пастернака).

7* Приведем уточненные данные о перечисленных Р. Грассманом логических трудах и кратко охарактеризуем их авторов. О трудах *Ламберта* и *Твестена* было сказано в коммент. 12* и 13* к «Логике» 1872 г. *Ульрици* (Ulrici) был автором сочинения «System der Logik». Leipzig, 1852.

Мориц Вильгельм Дробиш (Drobisch, 1806–1896) – математик, логик и философ, ученик крупного немецкого философа, психолога и педагога И.Ф. Гербарта. Дробиш был членом и ученым секретарем Общества имени Яблоновского. Именно он весной 1844 г. сформулировал выдвинутую на премию задачу уяснения смысла идеи «геометрической характеристики» Лейбница и разработки исчисления в ее духе – задачу, за решение которой Герман Грассман получил премию (см. выше перевод начальных страниц соответствующего грассмановского сочинения и наш комментарий к этому труду).

Как логик Дробиш отстаивал идею математизации этой науки и, согласно характеристике Кр. Тиля, рассматривал математическую («совершенную») индукцию как рекурсивную процедуру, носящую всеобщий характер (см.: *T*[*hiel*] *C*[*hristian*]. Drobisch // Enzyklopädie Philosophie und Wissenschaftstheorie. Bd.1, 1980. S. 500); в этом отношении его мысль развивалась в сходном с грассмановским направлении. Подобно Грассманам, Дробиш считал логику не описательной, а нормативной наукой. Книга, о которой говорит Р. Грассман, называлась: Neue Darstllung der Logik, nach ihren einfachsten Verhältnissen. Nebst einem logisch-mathematischen Anhange. Leipzig, 1836. Начиная со второго издания – именно его указывает Р. Грассман, – в заголовке фигурирует: «с учетом [данных] математики и естествознания». В 1887 г. труд Дробиша вышел пятым изданием.

Фридрих Ибервег (Ueberweg, 1826–1871) – немецкий философ, историк философии и логики. Его книга System der Logik und Geschichte der logischen Lehren (Bonn, 1857), о которой говорит Р. Грассман, выдержала пять изданий, последнее в 1882 г. На русском языке имеется труд Ибервега «История новой философии в сжатом очерке» (вып. 1–2. СПб., 1890; 2-е изд. 1898–1899).

Герман Лотце (Lotze, 1817–1881) – немецкий философ и психолог, имевший естественнонаучное образование; преемник Гербарта в Геттингенском университете; продолжая традицию Лейбница и отчасти Канта (учение которого о формах суждения он подвергал критике), он в логике занимал антипсихологическую позицию. Труд Лотце «Logik» вышел первым изданием (в Лейпциге) в 1843 г., а затем – в трех книгах – там же в 1874–1879 гг. Идея Лотце об объективности суждений (истинность которых не зависит от того, мыслятся ли они таковыми или нет) предвосхищала концепцию Г. Фреге о логике как науке о «бытии истины» (*Фреге Г.* Логика и логическая семантика. Сб. трудов. М., 2000; см. части 2 и 3). Идеи Лотце ближе воззрениям Р. Грассмана, чем взгляды Вундта, хотя автор «Системы знания» и объединяет их логические концепции как представляющие «естественнонаучную точку зрения».

Вильгельм Вундт (Wundt, 1832–1920) – немецкий психолог, физиолог и философ, самое известное из названных Р. Грассманом имен. Вундт являлся одним из создателей научной, в частности экспериментальной, психологии, и его труды широко переводились в России. Однако сочинение Вундта «Logik» (Bd. I, 1880; Bd. II, 1883) в русском переводе издано не было. Вундт был представителем *логического психологизма.*

8* Многие последующие авторы упрекали Буля в том, что он использовал в логике коэффициенты, отличные от 0 и 1. Коэффициенту $\frac{1}{0}$ Буль относит не определенный класс v. Что касается использования Булем математики в логике, то, спрашивается, каким образом можно было бы развертывать *математический анализ* логики, не предполагая математики? Буль ведь не ставил своей задачей строить *систему знания.*

9* Де Морган выпустил свое сочинение Formal Logic в 1847 г., т.е. не после Буля, а *одновременно* с ним.

10* Мы приводим уточненные данные названных Р. Грассманом трудов по математической логике. Обращаем внимание на то, что упорядочены они хронологически, почему между двумя книгами Ст. Джевонса помещены работы Ч. Пирса и Дельбёфа. В грассмановском перечне отсутствует важная работа: *A.De Morgan.* Formal logic or the calculus of inference, necessary and probable (London, 1847), а из серии публикаций Де Моргана «О силлогизме» указана только работа за номером III, в заголовке которой содержится «and on logic in general», не указанное Грассманом. Между тем под названием «О силлогизме» Де Морган выпустил шесть публикаций (I – в 1846 г., II – в 1850 г., III – в 1858, IV – в 1860, V – в 1862 и VI, дополнительную – в 1868 г.); ныне они переизданы в книге: «On the syllogism and other logical writings» (ed. by P. Heath. London, 1966). Р. Грассман, по-видимому, был не очень внимателен к литературе предмета, так как перепутал название книги Джевонса 1864 г., назвав ее «Формальной логикой», а также не указал первого издания работы Дельбёфа (1876) и журнала, в котором увидело свет исследование Ч. Пирса 1880 г. И совсем уж не понятно, что за «три публикации» американского философа 1867 года имел в виду автор: в этом году в названном Р. Грассманом издании (том 7, с. 250–261) была напечатана одна статья Пирса – «On an improvement in Bool's calculus of logic».

СОДЕРЖАНИЕ

Научное издание

Герман Грассман
Роберт Грассман

ЛОГИКА И ФИЛОСОФИЯ МАТЕМАТИКИ

ИЗБРАННОЕ

*Утверждено к печати
Редколлегией серии
«Памятники философской мысли»*

Зав. редакцией *Г.И. Чертова*
Редактор *Е.А. Жукова*
Художник *Т.В. Болотина*
Художественный редактор *В.Ю. Яковлев*
Технический редактор *Т.А. Резникова*
Корректоры *Т.А. Печко, Е.Л. Сысоева*

Подписано к печати 18.07.2008
Формат 60 × 90[1]/16. Гарнитура Таймс
Печать офсетная
Усл.печ.л. 31,5. Усл.кр.-отт. 31,4. Уч.-изд.л. 33,3
Тип. зак. 3428

Издательство «Наука»
117997, Москва, Профсоюзная ул., 90

E-mail: secret@naukaran.ru
www.naukaran.ru

Отпечатано с готовых диапозитивов
в ГУП «Типография «Наука»
199034, Санкт-Петербург, 9 линия, 12

ISBN 978-5-02-033858-6

9 785020 338586