Russian Academy of Sciences
Institute of Philosophy

PROCEEDINGS OF THE RESEARCH LOGICAL SEMINAR OF INSTITUTE OF PHILOSOPHY RUSSIAN ACADEMY OF SCIENCES

Volume XVII

Moscow
2004

Российская Академия Наук
Институт философии

ТРУДЫ НАУЧНО-ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКОГО СЕМИНАРА ЛОГИЧЕСКОГО ЦЕНТРА ИНСТИТУТА ФИЛОСОФИИ РАН

Выпуск XVII

Москва
2004

УДК 160
ББК 87.4
Т-78

Т-78 **Труды** научно-исследовательского семинара Логического центра Института философии РАН. Вып. XVII. – М., 2004. – 118 с.

Статьи сборника подготовлены на основе докладов, сделанных на семинаре в 2003-2004 годах. Сюда вошли результаты и достижения последних исследований в различных областях логики.

Сборник представляет интерес для специалистов в области логики и ее приложений.

The papers in this collected volume are prepared on the basis of reports presented at the Seminar in 2003-2004 years. There are the results of recent investigations in several fields of logic.

The book may be interesting for experts in logic and its applications.

ISBN 5-9540-0010-7

СОДЕРЖАНИЕ

CONTENTS

А.М.Анисов

Проблема реальности в семантической теории истины[1]

A question is considered in this paper whether a semantic truth theory is a variation of a classical concept of truth. The ensuing answer is negative. Meanwhile it is shown that there is a way to conservatively expand a semantic theory without violating its conformity to a classical concept of truth.

Как известно, основоположником семантической теории истины является А.Тарский. К достоинствам этой теории можно отнести следующие её черты. Во-первых, точность формулировок, в отличие от весьма туманных, мягко говоря, способов выражения мыслей со стороны традиционной философии. Во-вторых, наличие явного определения понятия истины. Ведь вопрос об истине таков, что требует именно явного (а не неявного, аксиоматического, например) определения вследствие исторически сложившихся ожиданий. Наконец, в-третьих, обсуждаемая теория пытается исходить из так называемой классической или корреспондентской теории истины, поскольку она представляется наиболее естественной с интуитивной точки зрения. В этом плане все альтернативные теории истины можно рассматривать как реакцию на действительные или мнимые трудности классической концепции истины, которая, таким образом, лежит в основе изначальных попыток постижения того, что есть истина.

Что касается третьей из отмеченных черт, то А.Тарский неизменно считал, что его теория истины является уточнением идей классической концепции истины, идущей от Аристотеля[2]: «...У меня нет никаких сомнений в том, что наша формулировка соответствует интуитивному содержанию высказываний Аристотеля...»[3]. Тем не менее Тарский вынужден был признать, что

---

[1] Работа поддержана РГНФ, проект 04-03-00344.

[2] Мы полагаем, что первая формулировка основной идеи классической концепции истины появилась раньше и принадлежит Платону.

[3] *Тарский А.* Семантическая концепция истины и основания семантики // Аналитическая философия: Становление и развитие (антология). М., 1998. С. 115.

«Большинство авторов, обсуждавших мою работу о понятии истины, придерживаются мнения, что мое определение не соответствует классическому истолкованию этого понятия»[4]. Кто же прав – Тарский или его критики? Положение усугубляет то обстоятельство, что Тарский порой допускал высказывания, делающие его позицию двусмысленной. Например, он утверждал: «Таким образом, мы можем принять семантическую концепцию истины, не отказываясь от своей эпистемологической позиции: мы можем оставаться наивными реалистами, критическими реалистами или идеалистами, эмпириками или метафизиками и кем угодно. Семантическая концепция полностью нейтральна по отношению ко всем этим позициям»[5]. Представляется, однако, что идеалисты берклианского типа или, скажем, прагматисты, вряд ли смогут принять семантическую теорию, если признают её родство с классической идеей истины как соответствия наших утверждений объективно существующей реальности. Так что одно из двух: либо семантическая теория действительно философски нейтральна, и тогда нет никаких оснований считать её уточнением классической концепции (и тогда правы упомянутые критики теории Тарского); либо эта теория связана с классической концепцией, но тогда не избежать принятия той или иной реалистической позиции в философии, ибо классическая концепция истины с необходимостью ведёт к реализму.

К сожалению, рассуждения на естественном языке страдают неустранимой расплывчатостью, что всецело относится и к только что сказанному. Здесь настоятельно требуются уточнения, без которых мы просто не будем в состоянии изложить свою позицию так, чтобы она однозначно (или почти однозначно) была понята другими. Посмотрим с этой точки зрения на семантическую теорию истины. В этой теории «истина» рассматривается как предикат предложений или, что то же самое по определению, высказываний. Высказывания формулируются в точно определённых языках – формализованных языках. Пусть это будут языки классического первопорядкового исчисления предикатов. В силу тезиса Гильберта, всё, что можно сказать, можно сказать в подходящем первопорядковом языке, так что ограничение первопорядковыми языками по сути ограничением не является и общность подхода поэтому не будет потеряна.

---

4 *Тарский А.* Указ. Соч. С. 116.
5 Там же. С. 118.

Возьмём какое-либо высказывание *A*. Будет это высказывание истинным или нет? Пусть *A* есть 'Снег бел'. Тогда *Истинно*, что 'Снег бел' тогда и только тогда, когда Снег бел. Это пример самого А.Тарского и, прямо скажем, весьма неудачный. Скольких людей он заставил пойти по неправильному пути! Несмотря на все последующие разъяснения самого создателя семантической теории истины, что это не определение истины, а лишь следствие из него и т.д., многие пребывают в убеждении, что суть семантической теории в том, что кавычковое имя высказывания в левой части эквиваленции заменяется самим высказыванием в правой её части. Но тогда ничего, кроме самих предложений и их имён для определения предиката истинности не нужно! Где уж тут вести речь об истине как каком-то соответствии внелингвистической реальности.

Ещё одна неудачная особенность данного, так сказать, канонического примера состоит в том, что высказывание 'Снег бел' не является высказыванием языка первого порядка. Это высказывание естественного языка. Оно требует перевода на логический язык. Для этого требуется сообразить, что термин 'Снег' – не имя собственное. Лишь обладающий необычайно раскованным воображением человек может думать, что термин 'Снег' является именем некоторого индивида, которому предицируется свойство 'Бел'. На самом деле оба эти термина являются сингулярными предикатами, так что адекватный перевод с естественного языка на язык первопорядковой логики выглядит так:

$$\forall x(\text{Снег}(x) \rightarrow \text{Бел}(x)).$$

Уже по причине сложности логической структуры данного высказывания оно не подходит на роль подходящего исходного примера.

Но всё же. Что должно стоять в правой части эквиваленции $\Leftrightarrow$ после перевода? Может быть, для кого-то итоговая эквиваленция будет выглядеть так:

$$\textit{Истинно}\ `\forall x(\text{Снег}(x) \rightarrow \text{Бел}(x))' \Leftrightarrow \forall x(\text{Снег}(x) \rightarrow \text{Бел}(x)).$$

Но это не соответствует подходу А.Тарского. Согласно этому подходу, во-первых, требуется найти некоторое *непустое множество объектов* U, которое, вообще говоря, совершенно не обязано быть множеством лингвистических объектов; напротив, и само это множество, и принадлежащие ему объекты, как правило, не являются объектами языка. В общем случае это *внелингвистические* сущности. Затем, во-вторых, надо ввести *функцию интерпретации* J, которая сингулярным терминам 'Снег' и 'Бел' сопоставит некоторые подмножества множества U. Наконец, в третьих, необходимо убедиться, что наличествует теоретико-множественное включение J(Снег) $\subset$ J(Бел). В итоге имеем:

Истинно '$\forall$x(Снег(x) $\rightarrow$ Бел(x))' $\Leftrightarrow$ J(Снег) $\subset$ J(Бел).

А если неверно, что J(Снег) $\subset$ J(Бел)? Тогда можно воспользоваться предикатом ложности и записать:

Ложно '$\forall$x(Снег(x) $\rightarrow$ Бел(x))' $\Leftrightarrow$ (J(Снег) $\not\subset$ J(Бел)).

Таким образом, в левой части эквиваленции $\Leftrightarrow$ стоит имя высказывания, а в правой – перевод высказывания во *внелингвистическую (семантическую) структуру*. Возразят, что нередко эти структуры строятся из лингвистических объектов, например, из индивидных констант языка. Но даже в таких случаях для достаточно богатых языков структуры для них окажутся принципиально более сложными и потому выходящими за рамки исходного объектного языка семантическими образованьями. В этом смысле подобные структуры всё равно будут внелингвистическими по сути. Но дело вовсе не в этих нюансах, а в том, что функции интерпретации дескриптивных констант языка всегда можно вводить так, чтобы значения этих функций оказывались в области внелингвистических объектов. В том числе речь может идти о реальных физических объектах. Возможно, именно подобные аргументы имел в виду А.Тарский, когда настаивал на «классическом» происхождении своей теории истины.

Итак, несомненно, что семантическая теория истины определяет истину через соотношение лингвистических и внелингвистических структур. Но достаточно ли этого обстоятельства, чтобы признать рассматриваемую теорию уточнённым вариантом корреспондентской концепции истины? А.Тарский, обсуждая возражения против своей теории, приводит следующий контраргумент. Один из критиков считал, что схема эквиваленции требует дополнения. Вместо недопустимо краткого

'p' истинно тогда и только тогда, когда p

следует говорить

'p' истинно тогда и только тогда, когда p истинно

или

'p' истинно тогда и только тогда, когда p имеет место.

Со своей стороны, А.Тарский считает такой подход недопустимо длинным и, более того, бессмысленным[6].

Согласны, что критическая идея выражена весьма неудачно. Но вот вопрос: такого рода критика вызвана лишь непониманием, или имеет в виду нечто большее? Что, собственно, хотят получить, когда неуклюже требуют истинности самого высказывания *p*, тогда как по теории Тарского предикат истинности применяется к именам высказываний, а не к самим высказываниям? Думается, мы не ошибемся, если предположим, что одним из источников критики в подобных ситуациях является явно или неявно идея истины как результата соотнесения высказывания именно с реальностью, как она существует сама по себе. Предварительная постановка проблемы в этой связи может быть сформулирована так.

Следует ли отождествлять два утверждения:

1) *Истина состоит в соответствии высказывания с внелингвистическим положением дел*

и

2) *Истина состоит в соответствии высказывания с внешней реальностью*?

По Тарскому выходит, что 1) и 2) выражают (к тому же крайне неточно) одно и то же.

Для нас это далеко не одно и то же. Вернёмся к примеру со снегом. Бел он всё-таки или не бел, имеет место включение $J(\text{Снег}) \subset J(\text{Бел})$ или верно $J(\text{Снег}) \not\subset J(\text{Бел})$? Совершенно очевидно, что ответ на поставленный вопрос зависит как от исходного универсума рассуждений U, так и от функции интерпретации J. А обе эти компоненты можно выбирать в поистине неограниченном диапазоне. Короче говоря, истинность или ложность некоторого высказывания *A* определяется в общем случае не тем, обладает оно или не обладает свойством «Быть истинным», а тем, на какой области объектов и как именно мы его интерпретируем, короче, зависит от структуры S вида <U, J>. Это означает, что «Быть истинным» является сингулярным предикатом или свойством лишь в том случае, когда структура S фиксирована. В общей ситуации в семантической теории истины имеем не свойство, а бинарное отношение «Быть истинным»:

Высказывание A ***истинно*** *в структуре S.*

---

6 *Тарский А.* Указ. Соч. С. 112-114.

Таким образом, вопреки широко распространённому заблуждению, предикат истины является не свойством предложений, а *бинарным отношением* между высказываниями и внелингвистическими структурами, которое можно записать в ещё одной форме как *Истинно (A, S)*.

В теории истины, да и на практике, если мы захотим эту теорию применить, мы должны не только уметь строить первопорядковые высказывания, но и располагать методами получения структур для этих высказываний. А эти методы оказываются методами теории множеств. Как известно, основательное развитие получил такой раздел логики, как теория моделей, систематически изучающая отношения между высказываниями и множествами высказываний, с одной стороны, и структурами, с другой. Если согласиться с тем, что теоретико-множественные структуры по отношению к языкам являются внелингвистическими, то отсюда никак не вытекает, что эти структуры и есть внешняя реальность.

Основания для такого вывода следующие. Прежде всего, структуры в семантической теории истины определены так, что любое *непротиворечивое* высказывание *A*, не являющееся теоремой логики, в некоторой структуре истинно, а в некоторой другой структуре ложно. Между тем, если *A* соотносят с реальностью, то такого быть не может. В реальности либо снег бел, либо нет, и не должно существовать способа найти две реальные структуры, в одной из которых высказывание *A* истинно, а в другой *A* ложно. Правда, это так лишь при условии, что мы не меняем смысл терминов, например, не называем уголь снегом. Иными словами, если мы зафиксировали смысл имён и понятий, а затем соотнесли их с чем-то реальным, то вопрос об истинности или ложности высказываний по отношению к реальности должен решаться однозначно.

Могут возразить: давайте возьмём некоторую конкретную достаточно сложную структуру SR для некоторого богатого языка L, объявим её реальной, и тогда вопрос об истинности или ложности высказываний из L в SR будет решаться однозначно. Это решение аналогично позиции, принятой в семантике для модальных логик. Один из постулируемых возможных миров объявляется действительным миром, и далее нет проблем с тем, чтобы отличить истинность в действительном мире от истинности в иных возможных мирах. Скорее всего, как явствует из работ А.Тарского, он также не видел здесь проблемы, и на вопрос о применимости семантической теории истины к эмпирическим наукам отвечал безусловно утвердительно.

С нашей позиции, проблема тут есть, и она не столь проста. Суть проблемы в следующем. Если любую структуру можно выбрать в качестве реальной, то отнесение к реальности окажется чистым произволом. Если же не любая структура может быть названа реальностью, то возникает вопрос, каков критерий демаркации между теми структурами, которые могут быть объявлены реальными, и теми, которые таковыми объявлены быть не могут. В стандартных семантиках модальных логик любой из возможных миров можно взять в качестве действительного. В нестандартных семантиках с «невозможными» возможными мирами область выбора претендента на реальность суживается до «нормальных» возможных миров. Но это только видимость выбора, поскольку, например, в «ненормальных» возможных мирах высказывание A и его отрицание $\neg A$ могут оказаться вместе истинными, что исключает их применимость в семантической теории истины А.Тарского, которая подобные ситуации запрещает. Один из аспектов проблемы реальности в том и состоит, что реальный мир надо выбрать из множества «нормальных» возможных миров на каком-то основании, а не по произволу.

Ещё одно возражение против использования одной из обычных математических теоретико-множественных структур в качестве аналога реальности состоит в том, что с точки зрения математики желательно, чтобы все такие структуры возникали закономерным образом. В идеале построение теории множеств начинается с постулирования существования пустого и бесконечного множеств, из которых с помощью разрешённых операций получаются все другие множества. Правда, в жизни идеал оказался неосуществимым по причине независимости ряда утверждений теории множеств от исходных аксиом. Так, существование недостижимых кардиналов доказать в этой теории нельзя, однако предположение об их существовании (или не существовании) к противоречию не ведёт. В любом случае множества, существование которых не удаётся доказать из «естественных» аксиом, слишком экзотичны даже для математики, не говоря уже о том, чтобы использовать их для моделирования реальности. А если ограничиться только закономерно возникающими множествами, то они слишком регулярны и предсказуемы в своём поведении, что отнюдь не улучшает их шансы выступить в качестве модели реальности. На них явно лежит печать искусственности, поскольку они контролируемое произведение человеческого ума.

Претендент на звание реального должен быть более естественным. И, в первую очередь, в отношении того, что проблема определения его свойств (по крайней мере, в значительной части) не должна быть чисто математической задачей. Например, мы можем быть уверены, что существует множество разумных животных. Однако это вовсе не означает, что мы должны быть готовы моделировать такое множество посредством некоторого построения, начинающегося с пустой совокупности. Натуральные числа, допустим, мы так и строим: объявляем, что $0 =_{Df} \varnothing$, $1 =_{Df} \{\varnothing\}$, $2 =_{Df} \{\varnothing, \{\varnothing\}\}$ и т.д. Поведение получаемых объектов регулярно, закономерно и предсказуемо. Но не будет ли бессмысленным предположение, что подобным путём можно получить множество разумных животных? Нам представляется, что будет. Абсурдно полагать, что множество разумных животных возникнет по правилам теории множеств на каком-то этапе порождения множеств из пустой совокупности.

Не означает ли сказанное выше, что похоронена надежда на использование логики и математики в построении структур, которые можно было бы обоснованно считать способными выступать в роли реальных? Ведь логика и математика (если отвлечься от экзотических объектов вроде «ненормальных» возможных миров или недостижимых кардиналов, явно не годящихся на эту роль) имеет дело с регулярными, закономерными и предсказуемыми структурами. Или это всё-таки не всегда так?

Подведём промежуточный итог. Проблема реальности в семантической теории истины имеет, по крайней мере, два аспекта. Во-первых, вопрос об истинности или ложности высказываний в этой теории решается не однозначно (за исключением высказываний, которые истинны или которые ложны в любой структуре), тогда как высказывание, которое удалось соотнести с реальностью, должно однозначно оказаться либо истинным, либо ложным. Во-вторых, абсурдно пытаться моделировать реальность при помощи регулярных математических структур, что заставляет искать структуры иррегулярные.

Вытекает ли отсюда, что независимо от возможности решения поставленной проблемы реальности следует отказаться от семантической теории истины, в которой эта проблема заведомо не решается? Обычно от раскритикованной теории отказываются, предлагая вместо неё другую. Но есть иной путь. Вместо отказа от теории, в которой не решается некоторая проблема, можно попытаться построить консервативное расширение исходной теории, обеспечивающее решение. Такой путь принципиально закрыт для адептов пресловутого тезиса о несоизмеримости научных теорий, ибо консервативное расширение теории и сама теория сравнимы тривиальным образом. При этом они могут значительно отличаться друг от друга. Например, исчисление предикатов можно представить как консервативное расширение исчисления высказываний, но обе эти теории принципиально отличаются по дедуктивным возможностям. Аналогичным образом, мы собираемся решать проблему реальности в подходящем консервативном расширении семантической теории истины А.Тарского. Поскольку наше расширение предполагает прямую корреляцию с классической концепцией истины, это будет означать следующее: исходная теория А.Тарского не является вариантом корреспондентской концепции, но допускает (за счёт добавления понятия реальности) расширение до корреспондентской теории.

Начнём построение требуемого консервативного расширения с решения второго аспекта проблемы реальности. На роль иррегулярных объектов теории множеств мы предлагаем *праэлементы* или *атомы*. Атомы являются праэлементами потому, что они исходные объекты в том смысле, что не получены из каких-то ранее построенных множеств. Праэлементы являются атомами (неделимыми) потому, что им, как и пустому множеству $\varnothing$, ничего не принадлежит в качестве элемента. Тем не менее, они не равны пустому множеству. Атом привлекателен тем, что с чисто математической точки зрения он почти ничего из себя не представляет. В этом плане он совсем не похож, например, на недостижимый кардинал, про который очень много что можно сказать нетривиального в математическом смысле. Короче, атомы настолько свободны от математических свойств, насколько это вообще представляется возможным. Именно это обстоятельство даёт нам шанс не перепутать математическую структуру с реальной структурой, представленной праэлементами.

Рассмотрим аксиоматическую теорию множеств с атомами ZFA, которая стоится на базе теории множеств Цермело – Френкеля ZF.

Добавим к языку первопорядкового исчисления предикатов с равенством символ бинарного отношения $\in$ и две индивидных константы $\varnothing$ и A. Условимся вместо формул вида $\neg(x \in y)$ писать $x \notin y$. Аксиомами ZFA будут следующие утверждения.

1. *Аксиома пустого множества*:

$$\forall x(x \notin \varnothing).$$

2. *Аксиома множества атомов*:

$$\forall x(x \in A \leftrightarrow x \neq \varnothing \ \& \ \forall y(y \notin x)).$$

Будем называть элементы из A *атомами*, а *множествами* – объекты, не являющиеся атомами, то есть x – атом, если и только если $x \in A$, и x – множество, если и только если $x \notin A$.

3. *Аксиома экстенсиональности для множеств*:

$$(\forall x \notin A)(\forall y \notin A)(x = y \leftrightarrow \forall z(z \in x \leftrightarrow z \in y)).$$

4. *Аксиома пары*:

$$\forall x \forall y \exists z \forall u(u \in z \leftrightarrow u = x \vee u = y).$$

Для любых x и y, множество, существующее которого утверждает эта аксиома, обозначается через $\{x, y\}$. Для данных x и y оно единственно в силу аксиомы экстенсиональности.

5. *Аксиома суммы или объединения*:

$$\forall x(\exists y \notin A)\forall z(z \in y \leftrightarrow \exists u(u \in x \ \& \ z \in u)).$$

Вновь множество, существование которого утверждается, единственно. Его обозначением является $\cup x$. В частности, $\cup\varnothing = \varnothing$ и если x – атом, то $\cup x = \varnothing$. Если в формулировке аксиомы опустить требование $y \notin A$, то единственность уже не гарантирована: ничто не мешает для атома a положить $\cup\varnothing = a$ и $\cup a = a$.

6. *Аксиома степени*:

$$\forall x \exists y \forall z(z \in y \leftrightarrow z \subseteq x),$$

где $z \subseteq x \leftrightarrow_{Df} z \notin A \ \& \ \forall u(u \in z \rightarrow u \in x)$. Условие, что всякое подмножество z является множеством, обеспечивает верность предложения $\forall x(\varnothing \subseteq x)$, однако предотвращает $a \subseteq x$ для любого x в том случае, если a – атом. Например, $\neg(a \subseteq a)$, но $x \subseteq x$, если x – множество. Единственность множества-степени для всякого x следует из аксиомы экстенсиональности, что позволяет ввести для него обозначение S(x). По аксиоме степени $S(\varnothing) = \{\varnothing\}$ и $S(a) = \{\varnothing\}$, если a – атом, то есть единственным подмножеством пустого множества и атомов является пустое множество.

7. *Аксиома бесконечности*:

$$\exists x(\varnothing \in x \ \& \ \forall y(y \in x \rightarrow y \cup \{y\} \in x)),$$

где результат операции $x \cup y$, по определению, удовлетворяет условию $\forall z(z \in x \cup y \leftrightarrow z \in x \vee z \in y)$. Существование множества $x \cup y$ гарантируется аксиомой пары и аксиомой суммы: $x \cup y =_{Df} \cup\{x, y\}$, а его единственность – аксиомой экстенсиональности.

8. *Схема аксиом подстановки*:

$$\forall x(\forall u(u \in x \rightarrow \exists! z F(u, z)) \rightarrow$$
$$(\exists y \notin A)\forall z(z \in y \leftrightarrow \exists u(u \in x \,\&\, F(u, z)))),$$

где $\exists!$ означает «существует и единственный», а $F(u, z)$ – любая формула, не содержащая переменную y свободно. Условие $y \notin A$ позволяет предотвратить появление атомов в качестве результатов применения схемы подстановки при ложности $\exists u(u \in x \,\&\, F(u, z))$.

8′. *Схема аксиом выделения подмножества* (значок ′ указывает, что данная схема аксиом выводится из остальных):

$$\forall x(\exists y \notin A)\forall z(z \in y \leftrightarrow z \in x \,\&\, F(z)),$$

где $F(z)$ – произвольная формула, в которую y не входит свободно. Как обычно, обозначим множество, являющееся результатом выделения, через $\{z \in x \mid F(z)\}$. Вновь условие $y \notin A$ позволяет предотвратить появление атомов в качестве результатов применения схемы выделения в тех случаях, когда нет таких z, что $z \in x \,\&\, F(z)$, так что будет выполнено $\{z \in x \mid F(z)\} \subseteq x$ для любого x.

9. *Аксиома регулярности*:

$$\forall x(\exists z(z \in x) \rightarrow \exists y(y \in x \,\&\, y \cap x = \varnothing)),$$

где результат операции $y \cap x$ при помощи схемы выделения определен следующим образом: $y \cap x =_{\mathrm{Df}} \{z \in x \cup y \mid z \in x \,\&\, z \in y\}$. Теперь можно показать, что A – действительно множество, а не атом, то есть что $A \notin A$. В противном случае предположим $A \in A$ и возьмем синглетон $\{A\}$ (существующий в силу аксиомы пары: $\{A, A\} =_{\mathrm{Df}} \{A\}$). Этот синглетон содержит единственный элемент A и поэтому по аксиоме регулярности должно быть выполнено $\{A\} \cap A = \varnothing$. Однако $A \in \{A\}$ и $A \in A$ по предположению, что влечет $A \in \{A\} \cap A \neq \varnothing$. Получили противоречие.

На этом список аксиом теории ZFA завершен[7]. Отметим, что ни в одной из аксиом не требовалась непустота множества атомов A. Поэтому, добавив к ZFA формулу $A = \varnothing$, мы получим обычную теорию ZF, что вовсе не входит в наши планы. Но не приведет ли к противоречию непустота множества A? Оказывается, нет. Более того, было показано, что система аксиом (ZFA + «A – бесконечное множество») непротиворечива

---

[7] Он несколько отличается от списка, приведенного в книге Т.Йеха 1973 г., однако эти отличия не существенны.

относительно ZF и останется непротиворечивой после добавления аксиомы выбора[8].

Нам сейчас не понадобится аксиома выбора. Тем не менее, ее приходится упоминать, поэтому сформулируем эту аксиому в явном виде. Чтобы избежать излишних технических деталей, воспользуемся тем известным фактом, что отношение «y есть функция с областью определения x» выразимо на языке теории множеств ZF.

10. *Аксиома выбора*:

$(\forall x \notin A)\exists y$(y есть функция с областью определения x &

$\forall z(z \in x \ \& \ \exists u(u \in z) \to y(z) \in z))$.

Расширим язык теории ZFA, добавив к нему индивидные константы П и О, а также одноместный функциональный символ f. Построим в этом языке теорию ZFAI, аксиомами которой являются выше сформулированные аксиомы 1–9 и следующие аксиомы 11–14, которые, в отличие от предыдущих, не будут иметь специальных названий (в результате теория ZFA будет подтеорией теории ZFAI).

11. $П \cup О = A$.

12. $П \cap О = \varnothing$.

13. $\exists x \exists y(x \in П \ \& \ y \in О)$.

Ниже следующие построения стандартны и могут быть проведены средствами теории ZF без привлечения аксиомы выбора, так что существование описываемых множеств не вызывает сомнений. По аксиоме бесконечности, $\exists x(\varnothing \in x \ \& \ \forall y(y \in x \to y \cup \{y\} \in x))$. Определим множество ω следующим образом: $(\varnothing \in \omega \ \& \ \forall y(y \in \omega \to y \cup \{y\} \in \omega)) \ \& \ \forall x[(\varnothing \in x \ \& \ \forall y(y \in x \to y \cup \{y\} \in x)) \to \omega \subseteq x]$, то есть ω – наименьшее по включению множество x, содержащее $\varnothing$ и замкнутое относительно условия $y \in x \to y \cup \{y\} \in x$. Элементы ω будем считать натуральными числами. Исключив из ω пустое множество $\varnothing$, получим множество положительных натуральных чисел ω^+.

Если f – функция, то ее областью определения будет множество $\mathrm{dom}(f) =_{\mathrm{Df}} \{x \mid \exists y(f(x) = y\}$, а областью значений $\mathrm{rng}(f) =_{\mathrm{Df}} \{y \mid \exists x(f(x) = y\}$. Для любого натурального $n \in \omega^+$ и для всякого непустого[9] x существует функция f, для которой $\mathrm{dom}(f) = n$ &

---

[8] *Йех Т.* Теория множеств и метод форсинга. М., 1973. С. 125.

[9] «X непуст» означает не $X \neq \varnothing$ (атомы тоже не равны $\varnothing$), а $\exists y(y \in X)$, что, конечно, влечет $X \neq \varnothing$.

$rng(f) \subseteq x$. Такое f назовем *конечной последовательностью* длины n элементов из x. Для каждого непустого x существует множество всех конечных последовательностей длины n элементов из x, а также множество всех таких множеств. Вообще, множество функций с областью определения Y и множеством значений X называется *декартовой степенью* множества X и обозначается посредством X^Y. В нашем случае речь идет о декартовых степенях вида x^n и множестве $D_x =_{Df} \{x^n \mid n \in \omega^+\}$. При $x = O$ получим множество $D_O =_{Df} \{O^n \mid n \in \omega^+\}$.

14.$(\forall x \notin \Pi)(f(x) = \varnothing)$ & $(\forall x \in \Pi)(\exists n \in \omega^+)(f(x) \subseteq O^n)$.

Ясно, что поскольку $O^n \cap O^m = \varnothing$ при $n \neq m$ (множества конечных последовательностей разной длины не могут иметь общих элементов), число n, существование которого утверждается в аксиоме 14, единственно, если только множество $f(x)$ непусто. Само отображение f ведет себя как функция выбора подмножеств на бесконечном семействе D_O непустых непересекающихся множеств. Однако нетрудно показать, что такое отображение можно определить без привлечения аксиомы выбора. Достаточно для всякого $x \in \Pi$ положить $f(x) = \varnothing$, чтобы тривиально обеспечить выполнение последнего конъюнктивного члена в аксиоме 14. Это же рассуждение показывает, что утверждение «$rng(f)$ – множество» также непротиворечиво: в данном случае получим $rng(f) = \{\varnothing\}$.

Факт 1. Теория ZFAI непротиворечива относительно ZF.

Доказательство этого факта было нами опубликовано ранее[10].

Факт 2. Теория ZFAI не является консервативным расширением ZF.

В самом деле, предложение $\exists x \forall y (y \notin x \ \& \ x \neq \varnothing)$ сформулировано на языке ZF, но в ZF оно не доказуемо. Однако оно доказуемо в ZFAI в силу непустоты множества атомов (аксиома 13).

Не противоречит ли только что полученный результат обещанию консервативного расширения теории А.Тарского? Нет, поскольку эта теория имеет неформальный характер. Применительно к ней идея консервативного расширения является лишь идеей, вектором движения вперёд, а не формальным утверждением. Мы всего лишь намереваемся дополнить теорию Тарского рядом новых понятий без того, чтобы ввести какие бы то ни было

---

[10] *Анисов А.М.* Представление интенсиональных отношений в теории множеств с атомами // Труды научно-исследовательского семинара Логического центра Института философии РАН 1997. М., 1998.

новые утверждения в системе исходных понятий этой теории. В частности, неформальный характер исходной семантической теории виден и из того, что ней отнюдь не фиксирована конкретная теория множеств, в которой будут строиться семантические структуры. Почему бы в качестве такой теории не взять ZFAI? Мы как раз намереваемся это сделать. Более того, ZFAI мы будем в дальнейшем использовать как неформальную, содержательную теорию.

Неформальная интерпретация введенных в язык новых символов состоит в следующем. Множество П – это множество реальных предикатов, а множество О – множество реальных объектов. Обычно n-местные ($n \geq 1$) предикаты трактуются как подмножества множества объектов (при $n = 1$) или как подмножества n-местного декартова произведения множества объектов(при $n > 1$). Вместо этого можно было бы говорить о множествах конечных последовательностей объектов длины n, например, для двухместного предиката R вместо $R \subseteq O \times O$ писать $R \subseteq O^2$, то есть вместо множества упорядоченных пар рассматривать множества двухчленных последовательностей. При этом каждой упорядоченной паре $<a, b>$ взаимно однозначно сопоставляется последовательность (a_0, b_1).

Однако препятствием к реализации этого плана является то, что в теории ZFAI предикаты, будучи элементами множества П, то есть атомами, не могут содержать каких-либо объектов в смысле отношения принадлежности $\in$. Функция f позволяет обойти это препятствие. Она каждому предикату-атому из П либо сопоставляет некоторое подмножество множества O^n конечных последовательностей длины n из множества объектов O, либо (что пока неважно) сопоставляет некоторый элемент O. Теперь все готово для введения важного определения *интенсиональной принадлежности* ε.

$$x \mathrel{\varepsilon} y \leftrightarrow_{Df} x \in f(y).$$

Будем говорить, что совокупность y *интенсионально (экстенсионально) непуста*, если и только если $\exists x(x \mathrel{\varepsilon} y)$ ($\exists x(x \in y)$). В противном случае совокупность y *интенсионально (экстенсионально) пуста*. Как ясно из определения функции f, если $\exists x(x \mathrel{\varepsilon} y)$, то это означает, что $y \in П$ и $\exists x(x \in f(y))$. Отсюда следует, что все множества интенсионально пусты, зато все атомы экстенсионально пусты. Наряду с экстенсионально непустыми множествами есть одно единственное экстенсионально пустое множество

$\varnothing$, в то время как может быть сколько угодно интенсионально пустых и интенсионально непустых атомов.

Вернёмся теперь к проблеме определения истины. Мы оставляем все конструкции, имеющиеся в семантической теории истины. Проверка конструкции «Высказывание A истинно в структуре S» остаётся прежней, с учётом того, что S строится в универсуме теории ZFAI. Последнее замечание означает, что в S = <U, J> совокупность U по-прежнему должна быть непустым множеством, т.е., в новой терминологии, должна быть экстенсионально непустой, хотя ничто не препятствует тому, что U может содержать атомы. Отсюда заключаем, что U не может быть ни пустым множеством, ни атомом, даже если этот атом интенсионально непуст. Точно также теория ZFAI ничего по существу не меняет в понятии интерпретации J.

Принципиальная новизна нашего подхода состоит в том, что бинарный предикат *Истинно (A, S)* будет расширен (именно расширен, а не просто заменён) тернарным предикатом *Истинно (A, S, R)*, в котором третья компонента представляет реальность. Идея в том, что схема *язык – семантика* дополняется схемой *язык – семантика – онтология*. За счёт этого будет осуществлён прорыв к реальности. И помимо старого *семантического* определения истины появиться новое *онтологическое* определение истины.

В языках первого порядка к символам, требующим приписывания значения из универсума U, относятся индивидные константы (короче, имена), индивидные переменные и предикатные константы. Начнём с индивидных констант. В каком случае функция интерпретации J может обрести онтологическую компоненту в отношении имени α? Очевидно, что только в том случае, когда $J(\alpha) \in O$, т.е. когда интерпретация указывает на реальный индивид. Если же $J(\alpha) \notin O$, то имени приписан, если позволите так выразиться, виртуальный, а не реальный индивид. В этом втором случае мы вынуждены ограничиться парой $<\alpha, a>$, где $J(\alpha) = a$. Зато в первом случае ситуация позволяет вести речь о реальности в форме принятия тройки $<\alpha, a, a>$, где вновь $J(\alpha) = a$, но теперь $a \in O$. Фактически та же самая ситуация имеет место в отношении функции оценки значения индивидных переменных v. Либо $v(x) \notin O$, и тогда ограничиваемся парой $<x, a>$, где $v(x) = a$; либо $v(x) \in O$, и тогда берём тройку вида $<x, a, a>$.

Перейдём к описанию интерпретации предикатных символов языка. Для n-арного предиката R^n функция интерпретации J даёт, как и обычно, $J(R^n) \subset U^n$. Получаем пару $<R^n, R>$, где $R \subset U^n$. При каком условии можно приписать R реальность? Здесь мы подходим к ключевому пункту нашей теории. Если найдётся такой реальный предикат $\Pi \in \Pi$, что $\forall x_1 \forall x_2 \ldots \forall x_n(<x_1, x_2,\ldots, x_n> \in R \Leftrightarrow (x_1, x_2,\ldots, x_n) \varepsilon \Pi)$, то это и есть некоторый род *совпадения* семантического предиката R и реального предиката Π. Именно совпадения в отношении того, что семантический и реальный предикат состоят из *одних и тех же реальных объектов*, только семантический предикат состоит из них *экстенсионально*, а реальный – *интенсионально*. Формально, разумеется, $R \neq \Pi$.

Осталось учесть, что поскольку все наши высказывания относятся к некоторому универсуму, семантический универсум U также должен быть соотнесён с неким реальным универсумом W $\in \Pi$, если мы хотим нечто утверждать о реальности. Помня о том, что универсум – это универсальное свойство (которое, однако, не обязано быть представлено в языке), по аналогии с предыдущим получим эквиваленцию $\forall x(x \in U \Leftrightarrow x \varepsilon W)$. Поскольку та часть эквиваленции, которая содержит знак $\in$, всегда отсылает к виртуальному универсуму, в дальнейшем вместо U будем использовать V: $\forall x(x \in V \Leftrightarrow x \varepsilon W)$. Если указанная эквиваленция имеет место, то дать имя в виртуальном универсуме и в реальном универсуме – это почти одно и то же: поскольку $J(\alpha) \in V$, постольку $J(\alpha) \varepsilon W$. То же самое касается приписываний значений индивидным переменным. Это позволит не упоминать имена и индивидные переменные в итоговом определении реальной истины.

Завершающие построения теперь почти очевидны. Что означают выражения типа «A реально истинно», или «A действительно истинно», «A истинно в реальности» и т.п.? Это означает, что *A истинно* по А.Тарскому и притом *соотносимо с реальностью* в указанном выше смысле. Формально это выглядит следующим образом.

Первопорядковое высказывание A **реально истинно** $\leftrightarrow_{Df}$ 1) существует структура $S = <V, J>$ такая, что *A истинно* в S; 2) существует реальный унарный предикат $W \in \Pi$, для которого $\forall x(x \in V \Leftrightarrow x \varepsilon W)$; 3) для всякой n-местной предикатной константы R^n из A найдётся реальный n-местный предикат $\Pi \in \Pi$ такой, что $\forall x_1 \forall x_2 \ldots \forall x_n(<x_1, x_2,\ldots, x_n> \in J(R^n) \Leftrightarrow (x_1, x_2,\ldots, x_n) \varepsilon \Pi)$.

Весьма интригующим выглядит вопрос, как определить реальную ложь. Здесь не подойдёт определение через простое отсутствие реальной истинности. Скажем мы, что русалки на ветвях сидят, скажем, что не сидят, объявим нынешнего короля Франции лысым или не лысым – какое отношение все эти высказывания и их отрицания имеют к реальности? Ясно, что никакого. На наш взгляд, титул реальной ложности могут иметь лишь те высказывания, которые соотнесены с реальными объектами и предикатами. Мы имеем основание считать высказывание «Сократ – мужчина» не только истинным, но и реально истинным, в то время как высказывания «Сократ – русалка» и «Неверно, что Сократ – русалка» с полным правом можем отлучить от реальности. Зато высказывание «Сократ – женщина» не просто ложно, но и реально ложно, поскольку реален не только исторический Сократ, но и женщины. Этими соображениями мотивируется принятие следующего определения реальной ложности.

Первопорядковое высказывание *A* **реально ложно** $\leftrightarrow_{Df}$ 1) существует структура $S = <V, J>$ такая, что *A ложно* в S; 2) существует реальный унарный предикат $W \in \Pi$, для которого $\forall x(x \in V \Leftrightarrow x \varepsilon W)$; 3) для всякой n-местной предикатной константы R^n из *A* найдётся реальный n-местный предикат $\mathit{\Pi} \in \Pi$ такой, что $\forall x_1 \forall x_2 \ldots \forall x_n(<x_1, x_2, \ldots, x_n> \in J(R^n) \Leftrightarrow (x_1, x_2, \ldots, x_n) \varepsilon \mathit{\Pi})$.

Как видно, определение реальной истинности от определения реальной ложности отличается только в первом пункте. Реальная ложность появляется тогда, когда мы верно соотнесли исходные предикаты и имена с реальностью, но напутали в утверждениях о соотношении предикатов и имён, или о соотношении предикатов между собой. Для иллюстрации последнего случая опять вернёмся к примеру со снегом. Можно быть в состоянии правильно идентифицировать вещество передо мной как снег, и можно прекрасно знать реальное значение слова «белый». Но при этом утверждать, что «Снег не бел». Я действительно встретил отрицание белизны снега в одной из философских статей. Не думаю, что я снегом и белым называю не то, что автор этой статьи. Просто в реальности снег может содержать примеси, меняющие его цвет, но он остаётся снегом! Упоминание о примесях объясняет принятие ложного высказывания «Снег не бел», но отнюдь не делает его не реальным. Стало быть, это высказывание реально ложно.

Если некоторое высказывание *A* оказалось реально истинным (реально ложным), то существует конечное непустое подмножество $R \subset \Pi$ тех праэлементов, которые обеспечивали его истинность (ложность) в аспекте реальности. В этом плане реальная истина (ложь) оказывается тернарным предикатом: *Реально истинно (ложно)* (*A*, S, R).

Назовём вторую компоненту S из тройки (*A*, S, R) *смыслом* высказывания *A*. В исходной теории мы фиксировали *A*, но варьировали S, получая за счёт этого истинностный релятивизм, когда одно и то же высказывание оказывалось в зависимости от выбора S то истинным, то ложным. Если же нас интересует реальная истинность высказывания *A*, то теперь надо зафиксировать не только *A*, но и его смысл, т.е. S. При этих условиях реальная истинность *A* определяется однозначно, к чему мы и стремились. То же самое верно относительно реальной ложности. Уточним сказанное.

Факт 3. Для любого высказывания *A* и любой структуры S, если существует R такое, что *Реально истинно* (*A*, S, R), то не существует Q такого, что *Реально ложно* (*A*, S, Q), и наоборот, если существует R такое, что *Реально ложно* (*A*, S, R), то не существует Q такого, что *Реально истинно* (*A*, S, Q).

Данный факт вытекает из того, что в силу принятых определений структуры S и R по сути изоморфны. Но так и должно быть. Истинное познание и состоит в установлении изоморфизма между смыслом высказывания и реальностью. И если бы Q существовало, имели бы ещё, что S изоморфно Q, а отсюда Q изоморфно S и по транзитивности получается, что R изоморфно Q, что невозможно.

Принятые определения реальной истинности и реальной ложности требуют развёрнутого обсуждения, для которого в рамках данной статьи нет места. Поэтому в заключение ограничимся лишь одним комментарием к построенным конструкциям. Понятие реальной истинности заведомо уже понятия истинности, но, быть может, всё ещё слишком широко с философской точки зрения, по крайней мере, в следующем аспекте. Спросим, могут ли в реальности существовать интенсионально пустые свойства и отношения? Аксиома 14 не препятствует их появлению. Например, для некоторого свойства п ε П может оказаться, что $\forall x \neg(x\ \varepsilon$ п). Возьмём теперь язык, в котором есть свойство *Круглый_квадрат*(x). Логично потребовать, чтобы функция интерпретации J приписала этому свойству пустое множество: J(*Круглый_квадрат*) = $\varnothing$. В силу пустоты, свойство *Круглый_квадрат*(x) не будет выполнено ни при каком приписывании значений индивидным переменным, так что высказывание $\exists x$*Круглый_квадрат*(x) окажется ложным в структуре S = <V, J>. Предположим, удалось найти W $\in$ П такое, что $\forall x(x \in V \Leftrightarrow x\ \varepsilon$ W). Тогда в силу наличия интенсионально пустого п ε П утверждение $\exists x$*Круглый_квадрат*(x) будет реально ложным, ибо $\forall x$ (x $\in$ J(*Круглый_квадрат*) $\Leftrightarrow x\ \varepsilon$ п). Аналогичным образом, при этих же предположениях высказывание $\neg\exists x$*Круглый_квадрат*(x) окажется реально истинным. Следуя по указанному пути, можно прийти к реальной истинности утверждений о не существовании в реальности квадратных кругов, русалок, химер, флогистона, теплорода и т.д. Короче, любое измышленное нами фантомное образованье окажется соотносимым с реальностью. Может быть, кого-то это устраивает, и так и надо делать. Но есть и другой путь. Устранив саму возможность появления интенсионально пустых свойств и отношений (с помощью новой аксиомы или модифицировав соответствующим образом аксиому 14), можно будет вообще отлучить высказывания, подобные выше приведённым, от реальности. Причём как в смысле их реальной ложности, так и в смысле их реальной истинности. Тогда глубокомысленное утверждение традиционных логиков о том, что русалки реально не существуют, получит статус не реальной истинности или ложности, а менее почётный статус обычной семантической истинности или ложности в зависимости от выбранного универсума рассуждений и соответствующей функции интерпретации.

П.И.Быстров

Проблемы построения табличных вариантов модальных и релевантных систем

In this paper some problems concerned with tableaux inferences in modal and relevant propositional systems are considered.. Also a new method of constructing tableaux versions of certain extension of the propositional relevant system **R** and modal system **S5** is presented.

В работе [1] были кратко описаны четыре способа табличного представления неклассических пропозициональных систем: таблицы Бета с индексированными формулами (или строками); аналитические таблицы с индексированными формулами; таблицы Бета, в которых используется понятие модализованной формулы; аналитические таблицы, в которых используется понятие модализованной формулы.

В первом и втором случаях применяются индексы в виде последовательностей натуральных чисел. При построении таблиц эти индексы приписываются вхождениям формул в таблицу (либо строкам таблицы) в соответствии с определенными правилами. Правила задают специфические (для данной системы) отношения между индексами, причем индексы играют вспомогательную роль, позволяя контролировать операции с формулами, содержащими модальные операторы (или обеспечить «релевантность» вывода). В третьем и четвертом случаях правила построения таблиц основаны на понятии модализованной формулы. Понятие модализованной формулы вводится определением для каждой из рассматриваемых систем.

Вполне естественно, что последним из упомянутых методов можно построить табличный вариант любой модальной пропозициональной системы, для которой можно дать определение модализованной формулы (в смысле конкретной и только этой системы). При таком подходе термином «модализованная формула» обозначается формула, содержащая модальные операторы и удовлетворяющая определенным условиям. Именно эти условия и отражают специфику использования модальных операторов в конкретной системе. Например, одним из самых простых определений модализованной формулы является ее определение для известной системы **S5**, построенной с одним исходным модальным оператором □. Формула *A* называется **S5**-модализованной, если всякое вхождение пропозициональной буквы в *A* находится в области действия вхождения оператора □.

Метод построения табличных модальных систем (а также соответствующих им секвенциальных исчислений и систем натурального вывода) с помощью определений модализованной формулы удобен тем, что не требуется никаких дополнительных технических средств, кроме условий «модализованности» формул при применении правил заключения к формулам вида □ *A*. Однако при этом возникают следующие проблемы. Прежде всего, даже для нормальных систем, являющихся подсистемами **S5**, определения модализованной формулы значительно усложняются - требуются дополнительные определения положительного и отрицательного вхождений модального оператора в формулу, и даже введение в определение формул конкретного вида (что, превращает общий метод в поиск конструкций *ad hoc*). Например, самое простое определение модализованной формулы для **S4** выглядит следующим образом. Формула *A* называется **S4**-модализованной, если всякое вхождение пропозициональной буквы в *A* находится в области действия положительного вхождения оператора □, не находящегося в области действия отрицательного вхождения этого оператора. Более того, для многих даже так называемых нормальных модальных систем сформулировать определения характеризующих их модализованных формул вообще не удается.

При построении табличных систем с индексированными формулами (или строками таблиц) удобно использовать в качестве индексов непустые, конечные, начинающиеся с нуля и не содержащие двух одинаковых членов последовательности натуральных чисел, например: 0, 1, 2,.5...n. На множестве индексов задается отношение R - бинарное отношение следующего вида: uRw тогда и только тогда, когда w=u, k. (где w, u – индексы, а k – натуральное число). Это отношение может быть рефлексивным (т.е. выполняется условие: uRw тогда и только тогда, когда w=u, k или w=u), транзитивным (т.е для любых индексов u и w или uRw, или для некоторого числа $n \geq 1$ найдутся такие индексы w_1, w_2, ... w_n, что $w_1=v$, $w_n=w$ и для любого i ($1 \leq i < n$) имеет место w_iRw_{i+1}), или симметричным (т.е. для любых индексов u и w, если uRw, то wRu), а также обладать любой комбинацией перечисленных свойств или другими свойствами. С помощью индексов «регулируются» применения модальных правил построения таблиц. Например, при построении аналитических таблиц с индексированными формулами применяются следующие правила для модальных формул с префиксами T и F.

$$T\Box \ \frac{T(\Box\alpha)_{w}}{T(\alpha)_{w'}} \qquad F\Box \ \frac{F(\Box\alpha)_{u}}{F(\alpha)_{u,k}}$$

где $(\Box\alpha)$ - произвольная правильно построенная формула индексированная формула, k – число, не входящее в индекс, приписанный формуле, являющейся посылкой, и имеет место wRw'. (Разумеется, в данном случае ветвь аналитической таблицы считается замкнутой, если в ней встречаются формулы $T(\alpha)_{w}$ и $F(\alpha)_{w}$. Аналитическая таблица замкнута, если замкнуты все ее ветви. Формула α доказуема, если можно построить замкнутую аналитическую таблицу, построение которой начинается с префиксированной формулы $F(\alpha)_{0}$).

Одним из положительных свойств данного метода индексации формул является то, что бинарное отношение R на множестве индексов в точности соответствует отношению R, которое используется при построении семантических моделей (и таблиц) Крипке для модальных систем. Благодаря этому факту открывается возможность описать конструктивную процедуру взаимного перевода выводов в табличных и секвенциальных модальных исчислениях с индексированными формулами. Если в секвенциальном варианте модальной системы сечение устранимо, то следствием применения упомянутой процедуры будет аналог этой теоремы для табличного варианта, то есть, утверждение: если можно построить замкнутую табличную конструкцию Крипке для стандартных формульных образов секвенций $\Gamma \rightarrow \Theta$, *A* и *A*, $\Delta \rightarrow \Psi$, то можно построить такую же конструкцию и для формульного образа секвенции $\Gamma, \Delta \rightarrow \Theta, \Psi$. Кроме того, можно показать, что верно следующее общее утверждение. *Если (1) модальная система непротиворечива и полна относительно моделей Крипке, и (2) свойства отношения R, используемое в этих моделях выразимы замкнутой формулой или конъюнкцией замкнутых формул, содержащей только обычные логические константы первопорядковой логики и единственный двухместный предикат Rxy, то можно построить свободный от сечения секвенциальный вариант этой системы с индексированными формулами.* В данном случае проблема заключается в том, что условие (2) может оказаться невыполнимым для рассматриваемой системы.

Такой же метод индексации формул (или строк) можно использовать и для формулировки релевантных табличных систем. Пусть α, β, γ - правильно построенные пропозициональные формулы (в обычном смысле); $\supset$ - знак релевантной импликации (поскольку $\rightarrow$ здесь используется в записи секвенций). При построении таблиц Бета с индексированными формулами для релевантной импликации можно использовать, например, следующее правило. Если формула $(\alpha\supset\beta)_u$ встречается в таблице **t** справа, то в этой же таблице пишется $(\alpha)_{u,k}$ слева, а $(\beta)_{u,k}$ справа, при этом k - новое число, не встречающееся в индексах, приписанных формулам, находящимся в **t**. Однако в таком случае возникают серьезные трудности в связи с формулировками правил «разложения» импликативных формул, появляющихся в левом столбце таблицы. В этих формулировках приходится учитывать не только свойства отношения R на множестве индексов, но и «происхождение» формулы, к которой применяется правило. Другими словами, в этом случае приходится учитывать вид формул и применения правил на предшествующих рассматриваемой формуле шагах построения таблицы. Кроме того при построении табличных вариантов релевантных систем, близких к E и R (с полными наборами логических связок) усложненяются правила замыкания таблиц. Упомянутые усложнения – необходимая «плата» за то, что полученные таким методом табличные релевантные системы можно «преобразовать» в адекватные крипкевские семантические модели с бинарным (а не тернарным) отношением достижимости (на множестве «возможных миров», моментов времени и т.п.).

Учитывая то обстоятельство, что при формулировке правил для импликативных (модальных) формул в табличных вариантах релевантных (модальных) систем с индексами в любом случае приходится учитывать «состояние» таблицы на том шаге ее построения, на котором эти правила применяются, желательно иметь способ построения таких систем без помощи индексов или каких-либо других вспомогательных «технических» средств. Далее демонстрируется один из таких возможных методов на примерах построения пропозициональной релевантной системы табличного вывода $\mathbf{R_{AT}}$ и пропозициональной модальной системы табличного вывода $\mathbf{S5_{AT}}$. При этом предполагаются известными стандартные понятия и правила, применяемые при построении «блоковых» аналитических таблиц для конечных множеств префиксированных формул (т. е. формул с префиксами T и F) (см. [2]).

В формулировках систем $\mathbf{R}_{AT}$ и $\mathbf{S5}_{AT}$ используются только префиксированные формулы и следующие общие для обеих систем понятия и определения.

Гавной формулой рассматривоемого применения правила вывода называется формула, к которой применяеся данное правило; *Гавной формулой* рассматривоемого применения правила вывода называется формула, к которой применяеся данное правило; *боковой формулой* рассматривоемого применения правила вывода называется формула, которая получаеся и главной формулы в реульате применения данного правила. Например, в схеме правила

$$\frac{S,\ T(\alpha\vee\beta)}{S,\ T\alpha \ \mid\ S,\ T\beta}$$

формула $T(\alpha\supset\beta)$ являеся главной, формулы $F\alpha$ и $T\beta$ - боковыми.

Определение 1. Вхождения формул вида $T(\alpha)$ и $F(\alpha)$ в некоторую ветвь аналитической таблицы **t** называются контрарной парой ветви **t**.

Определение 2. Логический путь в таблице **t** от вхождения формулы α к вхождению формулы β в **t** есть такая конечная последовательность формул A_1, … A_n, , что A_1 есть α, A_n есть β, и для любого n ($1<i<n$), (1) A_i графически совпадает с A_{i+1}, или (2) A_i графически совпадает с членом контрарной пары вида $T\gamma$ ($F\gamma$), а A_{i+1} графически совпадает с членом контрарной пары вида $F(\gamma)$ ($T\gamma$), или (3) A_i есть боковая (главная), а A_{i+1} есть главная (боковая) формула некоторого применения правила вывода в **t**.

Часть логического пути, удовлетворяющая варианту пункта (3), в котором «A_i есть главная, а A_{i+1} есть боковая формула некоторого применения правила вывода», называется *нисходящим фрагментом* данного пути.

Система $\mathbf{R}_{AT}$ задается множеством стандартных правил построения аналиических таблиц для формул, гавными логическими знаками являются &, $\vee$ или $\neg$, и следующими правилами для импликативных формул:

$$\frac{S,\ T(\alpha\supset\beta)}{S,\ F\alpha \ \mid\ S,\ T\beta}\ RT\supset \qquad\qquad \frac{S,\ F(\alpha\supset\beta)}{S,\ T\alpha\ ;\ S,\ F\beta}\ RF\supset$$

При этом применение правила RF⊃ в ветви *b* аналитической таблицы считается *корректным*, если и только если в *b* есть начинающийся с нисходящего фрагмента и содержащий по крайней мере одну контрарную пару логический путь от любого вхождения в *b* формулы, являющейся элементом множества {S, Tα}, к формуле Fβ.

На применение правила RT⊃ не накладывается никаких ограничений. В процессе построения таблиц всегда сначала применяется правило RF⊃, а затем правило RT⊃.

Ветвь аналитической таблицы **t** для формулы α считается замкнутой, если в ней встречаются элеменарные (не содержащие логических знаков) префиксированные формулы T(β) и F(β) (т. е. в нее входит по крайней мере одна контрарная пара элеменарных формул). Аналитическая таблица **t** для формулы α замкнута, если замкнуты все ее ветви, причем каждое вхождение элеменарной подформулы β_i в формулу α являеся членом по крайней мере одной контрарной пары в **t**. Формула α доказуема в $\mathbf{R}_{\mathrm{AT}}$, если можно построить замкнутую аналитическую таблицу, построение которой начинается с префиксированной формулы Fα.

Пример вывода формулы (соответствующей принципу tollendo ponens в $\mathbf{R}_{\mathrm{AT}}$:

(1)	F $((A\supset(A\supset B))\supset(A\supset B))$		
(2)	T $((A\supset(A\supset B))$; F$(A\supset B))$		
(3)	T $((A\supset(A\supset B))$; TA; FB		
(3.1)	F A; TA; FB	(3.2)	T$(A\supset B))$; TA; FB
(3.2.1)	FA; TA; FB	(3.2.1)	TB; TA; FB

Система $\mathbf{S5}_{\mathrm{AT}}$ задается множеством стандартных (классических) правил построения аналиических таблиц для формул, гавными логическими знаками являются &, ∨, ⊃ и ¬, и следующими правилами для модальных формул:

$$\frac{S,\ T(\Box\alpha)}{S,\ T\alpha}\ \mathrm{RT}\Box \qquad\qquad \frac{S,\ F(\Box\alpha)}{S,\ F\alpha}\ \mathrm{RF}\Box$$

При этом применение правила RF□ считается *корректным* в ветви *b* аналитической таблицы, если и только если на начинающемся с нисходящего фрагмента логическом пути в *b* от любой формулы из множества S к формуле F(□α) встречается формуа вида T(□γ).

На применение правила T□ не накладывается никаких ограничений. В процессе построения таблиц всегда сначала применяется правило F□, а затем правило T□.

Формула α считается доказуемой в $\mathbf{S5_{AT}}$, если можно построить замкнутую аналитическую таблицу, которая начинается с множества формул $\{S, F(\alpha)\}$, где S – конечное (возможно, пустое) множество формул и в которой все применения правила F□ корректны.

Например, табличный вывод формулы, характеризующей систему **S5**, имеет следующий вид.

$$\begin{array}{r|l}
(1) & F(\neg\Box\neg\Box\alpha\supset\Box\alpha) \\
(2) & T\neg\Box\neg\Box\alpha,\ F\Box\alpha \\
(3) & F\Box\neg\Box\alpha,\ F\Box\alpha \\
(4) & F\Box\neg\Box\alpha,\ F\alpha \\
(5) & F\neg\Box\alpha,\ F\alpha \\
(6) & T\Box\alpha,\ F\alpha \\
(7) & T\alpha,\ F\alpha
\end{array}$$

Легко убедиться в том, что здесь оба применения правила F□ корректны.

Система $\mathbf{R_{AT}}$ является табличным вариантом расширения известной релевантной системы **R**, в котором имеют место принципы tollendo ponens и ponendo tollens.

Система $\mathbf{S5_{AT}}$ – это табличный вариант пропозициональной модальной системы **S5** .

Доказательства этих утверждений проводятся в два шага: сначала доказывается дедуктивная эквивалентность этих систем секвенциальным исчислениям с соответствующими ограничениями на применение правил введения импликации (модального оператора) в сукцедент секвенции, а затем доказывается дедуктивная эквивалентность секвенциальных исчислений соответствующим аксиоматическим системам. Изложение этих доказательств выходит за рамки данной статьи.

Литература

1. *Быстров П.И.* Методы построения табличных вариантов неклассических пропозициональных систем // Труды научно-исследовательского семинара логического центра Института философии РАН. Вып. XVI. М., 2002. С. 16-25.
2. *Smullyan R.M.* First-Order Logic. Dover Publications Inc., N. Y., 1995.

В.Л.Васюков

Комбинированная дискурсивная логика Васильева-Яськовского[1]

Exploiting some G. Frege and N. A. Vasiliev's ideas V. A. Smirnov introduces several combined calculi of sentences and events (cf. [Smirnov 1989], [Smirnov 1989a]). The language of those calculi includes two sorts of variables: event variables (terms) and propositional ones. If we treat an algebra of events as Jaśkowski's discursive system then we arrive at the system of combined discursive logic. For such a JVCD-logic a semantic based on the possible worlds semantic is yielded.

1. Введение

Система комбинированной логики, разработанная В.А.Смирновым (см. [5], [6]), существенно основывается на некоторых идеях Г.Фреге и Н.А.Васильева. Поскольку Васильев различал в логике два уровня (металогический и онтологический), то соответственно комбинированная логика состоит из двух частей: абстрактной (внешней) логики и эмпирической (внутренней) логики. Первая зависит от эпистемологических допущений, в то время как вторая определяется онтологическими допущениями. Подобный подход становится более прозрачным, если мы просто будем различать акт утверждения (отношение ментального содержания к тому, как обстоит дело в мире вещей) т акт предикации (синтез свойства с объектом). Следуя этим курсом, мы в сущности принимаем фрегевскую дифференциацию ментальных процессов (*Gedanke*) и утверждений (*Urteil*). Чтобы подчеркнуть ее, Фреге даже вводит специальный знак: «... нам нужен специальный знак для утверждения о том, что то или иное является истинным. С этой целью я записываю знак '$\vdash$' перед именем истинного значения, отсюда в '$\vdash 2^2 = 4$' утверждается, что квадрат 2 равен 4. Я различаю *суждение* и *мысль*, и понимаю под *суждением* признание истинности *мысли*» [11, p.156].

Основываясь на этих идеях, В. А. Смирнов разрабатывает несколько комбинированных исчислений высказываний и собы-

[1] Работа выполнена при поддержке гранта РГНФ № 03-03-00186а.

тий (см., напр., [5], [6]), когда одновременно варьируются и внешняя и внутренняя логики. Язык этих исчислений включает два сорта переменных: событийные переменные (термы) и пропозициональные переменные. Если a и b суть термы, то $a \cup b$, $a \cap b$, $\sim a$ будут термами (сложными событиями), в то время как θa, θb представляют собой формулы, так же как формулами будут $\theta a \vee \theta b$, $\theta a \wedge \theta b$, $\neg$. Очевидно, что постулируя некоторые тождества типа $\theta(a \cup b) \equiv \theta a \vee \theta b$, $\theta(a \cap b) \equiv \theta a \wedge \theta b$ и т.д. мы получаем различные комбинации алгебр событий и пропозициональных исчислений в рамках одной логики.

В то же время, если мы не будем забывать, что Н.А.Васильев допускал противоречивость на онтологическом уровне, но запрещал ее на металогическом уровне, то желательно было бы распространить эту программу и на комбинированную логику. Наше предложение в этом случае заключается в использовании в качестве алгебры событий дискурсивной системы, чье понятие восходит к работам С. Яськовского. В своей плодотворной статье «Пропозициональное исчисление для противоречивых дедуктивных систем» С. Яськовский [12] вводит систему дискурсивной логики путем добавления к модальной системе $S5$ кондиционала $\rightarrow$ (часто записываемого как $\supset_d$ и называемого дискурсивной импликацией) и определяя $\alpha \rightarrow \beta$ как $\Diamond\alpha \rightarrow \beta$. Логические аксиомы чистого $\rightarrow$-фрагмента дискурсивной логики совпадают с чистым $\supset$-фрагментом классической логики, но в отличие от последней $\vdash \alpha \rightarrow (\neg\alpha \rightarrow \beta)$ проваливается, поскольку $\vdash_{S5} \Diamond(\Diamond\alpha \supset (\Diamond\neg\alpha \supset \beta))$ также не имеет места.

Представляется, что выбирая модальную $S5$-алгебру в качестве алгебры событий, мы будем в состоянии справиться с противоречивым характером нашей алгебры событий путем введения в эту алгебру эквивалента кондиционала Яськовского, а затем θ-перевода ее в наше пропозициональное исчисление. Единственный возникающий в этой связи вопрос связан с природой возможных событий. Что они означают интуитивно? Существуют ли какие-нибудь механизмы, позволяющие отделить реальные события от возможных? Или существуют некоторые критерии для разделения событий на возможные и действительные?

Кажется, что подходящим рецептом в данной ситуации было бы предложение, заключающееся в использовании понятия онтологической модальности. Его основная идея может быть выражена с помощью модального оператора «*делать возможным*»

$$\boldsymbol{MP}(x,y) \leftrightarrow y \in \sigma(x)$$

(x делает возможным y тогда и только тогда, когда y синтезируется из x) [17]. Следовательно, мы можем попытаться истолковывать возможное событие онтологически (i) подразумевая под возможностью случай, когда возникает отношение между некоторым событием и возможным событием и (ii) отождествляя с эти отношением отношение *«делать возможным»* (обычно подобного рода отношения принято называть «делателями» - «makers»). Таким образом, мы в некотором смысле рассматриваем возможные события как «онтологически порожденные» некоторыми другими событиями.

Более того, мы можем сделать более прозрачным смысл возможных событий и роль отношения «делать возможным» общепринятым способом. Хорошо известно (см. [7, p.33]), что модальная алгебра $\mathbf{A} = \langle A, 0, 1, —, \cap, \cup, \Box, \Diamond \rangle$ определяет обобщенный фрейм $\mathbf{A}_+ = \langle W_\mathbf{A}, R_\mathbf{A}, P_\mathbf{A} \rangle$, где $W_\mathbf{A}$ представляет собой множество ультрафильтров $\mathbf{A}$[2], $xR_\mathbf{A}y$ имеет место тогда и только тогда, когда $\forall a(a \in y \Rightarrow \Diamond a \in x)$ или, равносильно, $xR_\mathbf{A}\, y$ имеет место тогда и только тогда, когда $\forall a(\Box a \in x \Rightarrow a \in y)$, $P_\mathbf{A} = \{\{x\text{: } a \in x\}\text{: } a \in A\}$, т.е. для каждого элемента модальной алгебры мы выбираем множество ультрафильтров x содержащих его. Следовательно, мы можем сказать, что событие x *«делает возможным»* событие y (т.е. $y = \Diamond x$ и $\boldsymbol{MP}(x,y)$) тогда и только тогда, когда все булевские ультрафильтры событий, к которым принадлежит наше x, связаны с теми, которым принадлежит y, отношением *«делать возможным»*. В некотором смысле эти ультрафильтры являются онтологическими конструкциями событий и таким образом «синтезируемость» σ(-) событий в определении отношения *«делать возможным»* может иметь, так сказать, булевский смысл.

Существует иная, гораздо более популярная в логической семантике, возможность трактовки событий. В этом случае мы приписываем каждому событию непустое множество возможных миров, в которых происходит это событие. Фактически подобный подход подразумевает использование обычной техники модальной семантики и как следствие мы получаем семантический фрейм возможных миров, в котором должно учитываться отно-

---

[2] Фильтры в $\mathbf{A}$ представляют собой подмножества F из A, удовлетворяющие условиям

- $1 \in F$ и не имеет места $0 \in F$;
- если $a, b \in F$, то $a \cap b \in F$;
- если $a \in F$ и $a \le b$, то $b \in F$;

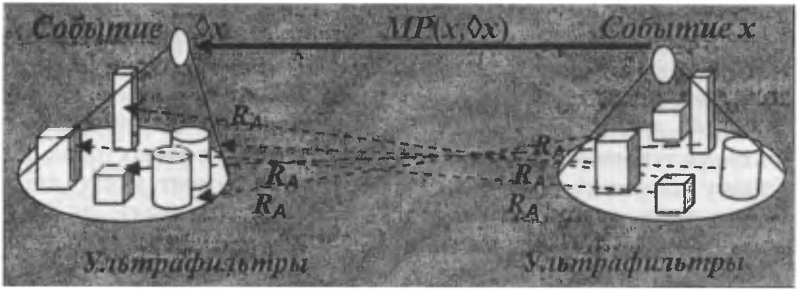
а ультрафильтры также выполняют условие

- для каждого $a \in A$ либо $a \in F$, либо $— a \in F$.

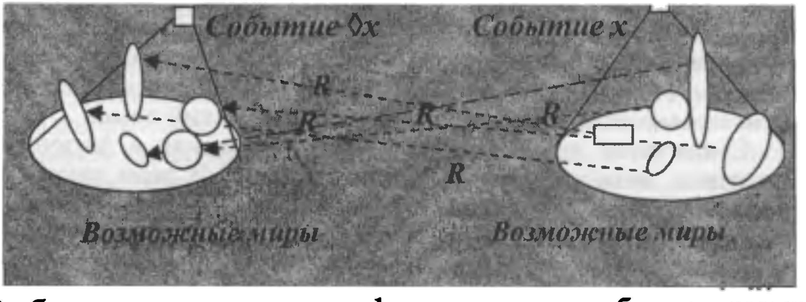
Заметим также, что не может иметь место $a \in F$ и $— a \in F$.

шение достижимости. Наоборот, мы можем расценивать отношение достижимости как отношение *«делать возможным»*: поскольку некоторые возможные миры достижимы из других, то совокупность последних может рассматриваться как событие и таким образом точно так же определять первые как события. конечно, при такой трактовке первые из них следовало бы признать как «возможные» события.

Первую трактовку можно было бы проиллюстрировать с помощью следующей (достаточно условной) схемы:



в то время как второй случай следовало бы проиллюстрировать следующим образом:



В обоих случаях трактовки формально очень близки, различие касается только интуитивного значения отношений.

2. Система JVCD комбинированной дискурсивной логики Васильева-Яськовского

Язык системы JVCD комбинированной дискурсивной логики может быть описан следующим образом. Пусть *p,q*, ... будут событийными переменными и мы предполагаем, что (как в [5]) эти событийные переменные образуют термы. Если a и b являются термами, то $a \cap b$, $a \cup b$, $\sim a$ будут также термами. Если a есть терм, то θa есть формула; если α и β представляют собой формулы, то $\alpha \vee \beta$, $\alpha \wedge \beta$, $\alpha \supset \beta$, $\neg \alpha$ будут также формулами. Запрещается смешивать термы и формулы. Следовательно, например, выражения формы $\theta p \supset q$, $a \cap \beta$, $\theta a \cap b$ не будут ни термами, ни формулами: это просто правильно построенное выражение.

Пусть событийные переменные будут определены как выше, но мы также принимаем, что $\Diamond a$ также будет представлять собой терм.

В своей статье, написанной в 1948 году, С.Яськовский определил систему D_2 дискурсивной логики следующим образом (он использует польскую нотацию в своих формулировках и под *Cd, Ed, Pos* он подразумевает дискурсивную импликацию, дискурсивную тождественность и возможность соответственно, но мы не будем следовать ему для сохранения однородности последующего изложения, используя вместо *Cd, Ed, Pos* соответствующие связки $\rightarrow$, $\leftrightarrow$, $\Diamond$):

«Система D_2 *двузначного дискурсивного пропозиционального исчисления* представляет собой множество формул T, с выраженными тезисами системы D_2 и отмеченное следующими свойствами:

1) T включает пропозициональные переменные и в данный момент следующие функции: $\rightarrow$, $\leftrightarrow$, $\vee$, $\wedge$, $\neg$.
2) Приписывание перед T символа $\Diamond$ порождает теорему в двузначном пропозициональном исчислении модальных высказываний M_2" [13, pp.150-151].

Он доказал также следующие методологические теоремы:

Методологическая теорема 1 [13, p.151]. *Каждое утверждение T в двузначном пропозициональном исчислении L_2, которое не включает постоянных символов, отличных от $\supset$, $\equiv$, $\vee$, становится утверждением Td дискурсивного пропозиционального исчисления D_2 когда в T символы импликации $\supset$ замещены на $\rightarrow$, а символы эквивалентности $\equiv$ замещены на $\leftrightarrow$.*

Методологическая теорема 2 [13, p.152]. *Если T является утверждением двузначного пропозиционального исчисления L_2 и включает переменные и самое большее функторы $\vee$, $\wedge$, $\neg$, то*

1) T; 2) $\neg T \rightarrow q$;

суть утверждения D_2.

Методологическая теорема 3 [13, p.153]. *Если в утверждении, принадлежащем дискурсивному пропозициональному исчислению D_2 $\rightarrow$ заменено на $\supset$, а $\leftrightarrow$ на $\equiv$, то получается утверждение,* *принадлежащее пропозициональному исчислению* L_2.

Чтобы эксплицитно выразить эти теоремы в системе комбинированной логики, мы добавляем к схемам аксиом классической пропозициональной логики и правилу *modus ponens* следующие схемы:

A1. $\theta a \vee \theta b \equiv \theta(a \cup b)$
A2. $\neg\theta a \equiv \theta(\sim a)$
B1. $\theta(\Diamond(a \cup b)) \equiv \theta(\Diamond a) \vee \theta(\Diamond b)$
B2. $\theta a \supset \theta(\Diamond a)$
B3. $\theta(\Diamond\Diamond a) \supset \theta a$
B4. $\theta(\Diamond a) \supset \theta(\sim\Diamond\sim\Diamond a)$

Здесь и далее $a \rightarrow b$ означает $\sim\Diamond a \cup b$, $a \leftrightarrow b$ означает $(\sim\Diamond a \cup b) \cap (\sim\Diamond a \cup \Diamond b)$. Легко видеть, что аксиомы A1-A2 снабжают нас структурой булевой алгебры множества событий и следующие утверждения имеют место:

A3. $\theta a \wedge \theta b \equiv \theta(a \cap b)$
B5. $\theta(a \rightarrow b) \supset (\theta a \supset \theta b)$
B6. $\theta(a \leftrightarrow b) \supset (\theta a \equiv \theta b)$

Обозначим $\theta(\Diamond a)$ как $\delta(a)$. Как нетрудно убедиться, $\Diamond(\Diamond\alpha \supset \beta)$ S5-логически тождественно $(\Diamond\alpha \supset \Diamond\beta)$, что ведет к $\Diamond(\sim\Diamond a \vee b) = \sim\Diamond a \vee \Diamond b$ в качестве ее алгебраического эквивалента. Поскольку "$\rightarrow$" и "$\leftrightarrow$" являются в сущности алгебраическими эквивалентами дискуссивной импликации и дискуссивной эквивалентности соответственно, то мы имеем право ввести алгебраический эквивалент "$\cap_d$" дискуссивной конъюнкции $\Diamond\alpha \wedge \beta$ ($a \cap_d b$ означает $\Diamond a \cap b$) и алгебраический эквивалент "∇" дискуссивного отрицания $\neg\Diamond\alpha$ (∇a означает $\sim\Diamond a$) (см. [10, p.46]). Все вместе эти операторы можно было бы охарактеризовать с помощью следующих утверждений:

D1. $\delta(a \cup b) \equiv \delta(a) \vee \delta(b)$
D2. $\delta(a \cap_d b) \equiv \delta(a) \wedge \delta(b)$
D3. $\delta(\nabla a) \equiv \neg\delta a$
D4. $\delta(a \rightarrow b) \equiv \delta a \supset \delta b$
D5. $\delta(a \leftrightarrow b) \equiv (\delta a \equiv \delta b)$

Непосредственным вычислением легко убедиться, что $\rightarrow$, $\cap_d$, $\cup$, $\leftrightarrow$, ∇ обладают всеми свойствами булевых операций $\supset$, $\wedge$, $\vee$, $\neg$ соответственно. Очевидным образом множество всех δ-формул будет замкнуто относительно правила дискуссивного *modus ponens*:

$$(\delta MP)\quad \frac{\delta a \quad \delta(a \to b)}{\delta b}$$

До сих пор все шло хорошо. Но детальный анализ обнаруживает, что пункт 1) методологической теоремы 2 Яськовского остался за рамками нашего рассмотрения. Мы знаем как получить дискуссивную формулу из события и в то же время мы не имеем представления как согласованы между собой обычные формулы и соответствующие события. Но это то как раз и является тем условием, которое должно быть выполнимым в нашей интерпретации согласно смыслу методологической теоремы 2 Яськовского

Чтобы обойти эти трудности, мы позаимствуем одно понятие из обобщенной логики высказываний и событий Смирнова из [5]. В языке этого исчисления имеется оператор [-], такой, что если α является формулой, то $[\alpha]$ будет сентенциальным термом. Проще говоря, мы соотносим с каждой формулой соответствующее событие (например, в качестве ее денотата). Используя подобный оператор, обогатим нашу систему аксиом следующими аксиомами

B7. $\theta[\alpha] \equiv \alpha$
B8. $\theta[\alpha \vee \beta] \equiv \theta([\alpha] \cup [\beta])$
B9. $\theta[\neg\alpha] \equiv \theta(\sim[\alpha])$
B10. $\alpha \supset \theta(\sim[\alpha] \to b)$

где b представляет собой произвольное событие в алгебре событий. Эти аксиомы дают нам требуемую экспликацию методологической теоремы 3 Яськовского. Легко видеть, что мы получаем

$$\alpha \supset \delta[\alpha]; \quad \alpha \supset (\delta(\sim[\alpha]) \supset \delta b)$$

как следствия нововведенных аксиом.

Создается впечатление, что идея [-]-оператора восходит к идее Е.Слупецкого из [19]. А именно, он предложил обогатить язык модальной логики за счет выражений $p{*}x$, которые могли бы читаться следующим образом:

(1) говоря, что p, мы утверждаем (событие) x;
(2) предложение p устанавливает событие x.

Позднее Р.Сушко назвал это “реификацией ситуации”. По его мнению, подобная идея “подсказывается чтением этой работы, в том как мы трактуем пропозициональные переменные p, q, r, ... и именные переменные x, y, z, ... аналогично пробеганию как по некоторому универсуму (универсуму ситуаций), так и по универсуму объектов, и мы используем звездочку в выражениях типа $p{*}x$ как символ некоторого примитивного неопределенного отношения между ситуацией (что) $p{*}x$ и объектом x или, другими словами, между тем, что описывает предложение по левую сторону от звездочки, и тем, что означает имя по правую сторону" [21, p.247]. Развивая этот подход, сам Сушко трактует ситуации как первичные образования, в то время как абстрактные объекты типа событий рассматриваются как результат некоего абстрактного процесса (реификации). Он вводит символ реификации форматор **T** категории (имя/высказывание), который читается следующим образом: «$\mathbf{T}(p)$ = реификация ситуации (что) p = событие (абстрактный объект), соответствующий ситуации (что) p» [21, p.248]. Более того, он вводит также одноместный предикат P, «отвечающий утверждению, или точнее связке утверждения (быть фактом)» [21, p.242]. Принимая во внимание его аксиому

$$(P(\mathbf{T}(p)) \equiv p,$$

где $\equiv$ является его (не-фрегевской) связкой тождества, мы можем прийти к ошибочному заключению, что как **T**, так и P следовало бы рассматривать как действующие аналогично нашим [-]- и θ-операторам.

К сожалению, наша система JVCD не является не-фрегевской системой, и мы имеем в нашем распоряжении только лишь события. При поверхностном рассмотрении кажется, что лучше всего для нас вернуться к предложению Слупецкого. В этом случае можно читать выражения $[\alpha]$ как «говоря, что α мы устанавливаем (событие) $[\alpha]$» или «высказывание α устанавливает событие $[\alpha]$». Но трудности с выражениями θa остаются все еще не преодоленными. Мы не можем воспользоваться прочтением в P-стиле Сушко «a является фактом», поскольку a представляет собой не ситуацию, а событие. Вместо этого нам надо откуда-нибудь позаимствовать требуемые понятия.

Некоторые теоретики в подобной связи рассуждают о событиях в терминах актуальности или реальности. Например, У.Мейкснер заявляет следующее: «Для события быть актуальным или реальным означает *происходить*. Не все события происходят (но происходят только события); следовательно, некоторые события не актуальны, но просто возможны» [16, p.30]. Он устанавливает наряду с другими следующий аналитический постулат для *происходить*: «*Для всякого x: x происходит тогда и только тогда, когда x является актуальным (реальным) событием*». Таким образом, вместо «a является фактом» можно использовать «a является актуальным (реальным)». Удобство подобного использования заключается в прямом прочтении $\theta(\Diamond a)$ как «a является возможным» в соответствии с утверждением Мейкснера.

Распространяя наше концептуальное заимствование на каузальную теорию, мы находим в статье У.Шеффлера следующее, спорное по его мнению, положение: «Событие есть что-то, что происходит - в мире эмпирических вещей, а не, например, в области математики или моральных категорий», и далее: «События обычно даются описаниями, включая дескриптивные предложения о том, что имеет место, и о пространственно-временном регионе, в котором нечто имеет место» [20, p.36]. Он иллюстрирует свое свои допущения следующими примерами: «Событие, что тиран был убит», «Событие, что Добро побеждает Зло» и т.д. Ясно, что если мы примем идею дескриптивного утверждения событий, это прямо наводит на мысль о прочтении $[\alpha]$ как «Событие, что α».

Наряду с этим наш способ рассмотрения вообще мог бы быть более изощренным: мы можем попытаться подойти к комбинированной логике не-фрегевским способом. Во-первых, действуя максимально радикальным образом, следовало бы в этом случае вместо событий использовать ситуации, рассматривая на внутреннем уровне алгебру ситуаций (см. [3]). В качестве первого шага это ведет к принятию аксиом

$\theta(a = b) \supset (\theta a \equiv \theta b)$

$\theta(a = a)$

$\theta(a = b) \wedge \theta(a = b) \supset \theta(a = b)$

где $a = b$ трактуется как элементарная ситуация.

И здесь у нас возникает две возможности, в зависимости от выбора ситуационной онтологии. Если следовать подходу Сушко, то алгебра ситуаций оказывается алгеброй Хенле, что ведет к добавлению следующих аксиом:

$\theta(\Box 1 = 1)$

$\theta(\Box a = 0)$

Если же следовать подходу Р.Вуйцицкого (см. [4]), то множество ситуаций оказывается нефундированным множеством и алгебра ситуаций будет представлять собой соответствующую модальную алгебру с подобным носителем. В этом случае нам потребуются следующая аксиома:

$(\theta(a_1 = b_1), \ldots, \theta(a_{s(i)} = b_{s(i)})) \supset R_i(a_1, \ldots, a_{s(i)}) \supset R_i(b_1, \ldots, b_{s(i)})$,
$i = 1, \ldots, m$.

Более того, мы можем ввести двойную онтологию ситуаций и событий в стиле системы Сушко в [21], которая очевидным образом приводит к дальнейшим осложнениям. Но было бы более разумным преодолеть это искушение и оставить подобные материи за рамками нашего рассмотрения здесь.

Если рассматривать формулу θa как, в каком-то смысле, описание события a, а δa как дискуссивное описание события a, то следуя Н. да Косте [9] можно определить дискуссивную теорию $\boldsymbol{T}$ интерпретации событий в случае, когда выполняются следующие условия:

(1) Если a является событием, то $\delta a \in \boldsymbol{T}$;

(2) $\boldsymbol{T}$ замкнуто относительного дискуссивного отделения: если $\delta a \in \boldsymbol{T}$ и $\delta(a \to b) \in \boldsymbol{T}$, то $\delta(b) \in \boldsymbol{T}$.

Дискуссивные теории, по-видимому, отражают характерные признаки дискурсивных теорий Яськовского в случае описания или трактовки некоторого множества событий. Согласно Яськовскому «достаточно, например, дедуцировать следствия из нескольких гипотез, противоречащих друг другу, чтобы изменить природу утверждений, которые более не будут отражать согласованное мнение. То же самое произойдет, если утверждения, высказанные несколькими участниками дискурса, объединяются в единую систему, или в случае, если чьи-то личные мнения таким же образом собраны в одну систему, хотя эта особа не уверена в том, что термины, появляющиеся в ее различных утверждениях, не будут слегка отличаться по своим значениям. Назовем подобную систему, про которую нельзя сказать, что она включает утверждения, выражающие согласованные друг с другом мнения, термином *дискурсивная система*. Чтобы передать нашу природу утверждений подобной системы, было бы лучше всего предварить каждое утверждение оговоркой: «в соответствии с мнением одного из участников дискурса» или «для некоторого допустимого значения используемого термина». Следовательно, присоединение утверждения к дискурсивной системе имеет иное интуитивное значение, чем утверждение в обычной системе. Дискурсивное утверждение включает имплицитную оговорку специфицированного выше вида, которая - независимо от функций до сих пор введенных в этой статье - равносильна возможности *Pos*. Соответственно, если утверждение *A* вписано в дискурсивную систему, его интуитивный смысл должен интерпретироваться так, как если бы оно было предварено символом *Pos*, то есть, в смысле «возможно, что *A*». Именно подобным образом беспристрастный судья мог бы понимать утверждения различных участников дискуссии» [12, p. 149].

Мы должны теперь принять во внимание, что θ- и δ-операторы имеют различную природу по отношению к понятию противоречивости. Фактически мы должны различать внешнюю и внутреннюю противоречивость, когда первое понятие является обычным понятием вследствие классического характера нашей внешней логики (что отнюдь не обязательно). Возникающие сложности не связаны с θa и $\theta(\sim a)$ формулами, поскольку из аксиомы A2 мы имеем $\neg\theta a$ вместо $\theta(\sim a)$ и все проходит как обычно. Но в случае δa и $\delta(\sim a)$ ситуация иная.

Пусть Γ будет множеством формул. (Γ) означает наименьшую теорию, содержащую все элементы Г. Справедливо следующее предложение:

Предложение 1. *Существуют противоречивые на внутреннем уровне дискурсивные теории истолкования событий, которые нетривиальны (т.е. если* T *представляет собой такую теорию, то не всегда имеет место* $T = F$*, где* F *есть множество всех формул).*

Доказательство. Если $\Gamma = \{\delta a, \delta(\sim a)\}$, то является Γ противоречивой на внутреннем уровне, но нетривиальной, поскольку $\delta(a \cap_d \sim a \to b)$ не будет утверждением T, где b есть любое событие, отличное от a. ■

Здесь и далее ■ означает конец доказательства.

Существует несколько различных аксиоматизаций D_2 (в настоящее время часто обозначаемой как J), основывающихся на модальной системе S5 (см. [9], [15], [8], [10]). Алгебраический эквивалент D_2, который приводится в работе [15, p.158], определяется с помощью следующей теоремы:

Теорема. *Алгебра* $\langle S, \cup, \cap_d, \sim\rangle$ *имеет следующие свойства*:

1) $\langle S, \cup, \sim\rangle$ *является булевой алгеброй*;
2) $\langle S, \cup, \cap_d\rangle$ *является косой решеткой в смысле Йордана* (см. [14], [1, с.39]);
3) *Для всяких* $a, b, c \in S$
   - (i) $a \cap_d b = \sim(\sim a \cup \sim(1 \cap_d b))$,
   - (ii) $1 \cap_d 0 = 0$,
   - (iii) $a \leq 1 \cap_d a$,
   - (iv) $a \cap_d (b \cap_d c) = (a \cap_d b) \cap_d c$,
   - (v) $a \cap_d (b \cup c) = (a \cap_d b) \cup (a \cap_d c)$.

Если мы стремимся к тому, чтобы наш алгебраический эквивалент дискурсивной логики Яськовского был "чистой" алгеброй, а не модальной алгеброй типа S5, то тогда, по-видимому, было бы лучше с самого начала иметь дело со следующими аксиомами

E1. $\theta a \vee \theta b \equiv \theta(a \cup b)$
E2. $\neg\theta a \equiv \theta(\sim a)$
E3. $\theta((a \cap_{\mathrm{d}} (b \cup a)) \equiv \theta a \vee \theta(a \cap_{\mathrm{d}} b) \equiv \theta a$
E4. $\theta(a \cap_{\mathrm{d}} b) \equiv \neg(\neg\theta a \vee \neg\theta(1 \cap_{\mathrm{d}} b))$
E5. $\theta(1 \cap_{\mathrm{d}} 0) \equiv \theta 0$
E6. $\theta a \supset \theta(1 \cap_{\mathrm{d}} a)$
E7. $\theta(a \cap_{\mathrm{d}} (b \cap_{\mathrm{d}} c)) \equiv \theta((a \cap_{\mathrm{d}} b) \cap_{\mathrm{d}} c)$
E8. $\theta(a \cap_{\mathrm{d}} (b \cup c)) \equiv \theta((a \cap_{\mathrm{d}} b) \vee (a \cap_{\mathrm{d}} c))$
E9. $\theta[\alpha] \equiv \alpha$
E10. $\theta[\alpha \vee \beta] \equiv \theta([\alpha] \cup [\beta])$
E11. $\theta[\neg\alpha] \equiv \theta(\sim[\alpha])$
E12. $\alpha \supset \theta(\sim(\sim[\alpha] \cap_{\mathrm{d}} \sim b))$

где выражения 1 и 0 имеют то же самое значение, что $a \cup \sim a$ и $\sim(a \cup \sim a)$ соответственно. Если мы для удобства воспользуемся дискуссивным описанием событий δ, то тогда список аксиом может быть преобразован следующим образом:

F1. $\theta a \vee \theta b \equiv \theta(a \cup b)$
F2. $\neg\theta a \equiv \theta(\sim a)$
F3. $\delta a \wedge (\theta b \vee \theta a)) \equiv \theta a \vee (\delta a \wedge \theta b) \equiv \theta a$
F4. $\delta a \wedge \theta b \equiv \theta a \wedge (\delta 1 \wedge \theta b)) \equiv \theta(a \cap_{\mathrm{d}} b)$
F5. $\delta 1 \wedge \theta 0 \equiv \theta 0$
F6. $\theta a \supset \delta 1 \wedge \theta a$
F7. $\theta[\alpha] \equiv \alpha$
F8. $\theta[\alpha \vee \beta] \equiv \theta([\alpha] \cup [\beta])$
F11. $\theta[\neg\alpha] \equiv \theta(\sim[\alpha])$
F10. $\alpha \supset (\delta(\sim[\alpha]) \supset \theta b)$

3. Семантики системы JVCD

а) Семантика возможных миров

Семантику дискуссивной комбинированной логики, согласно идеям В.А.Смирнова можно описать следующим образом. Пусть W будет непустым множеством возможных миров. События будут отождествляться с подмножествами W. Пусть φ будет функцией, приписывающей событийным переменным подмножества W. Функция φ будет распространяться на все термины обычным способом:

$\varphi(a \cap b) = \varphi(a) \bigcap \varphi(b)$
$\varphi(a \cup b) = \varphi(a) \bigcup \varphi(b)$
$\varphi(\sim a) = \varphi(a)'$

Здесь $\bigcap$, $\bigcup$, $'$ представляют собой теоретико-множественное пересечение, объединение и дополнение соответственно. Пусть $R \subseteq W \times W$ будет некоторое рефлексивное, транзитивное и симметричное отношение. Тогда мы определяем

$$\varphi(\Diamond a) = \{x\colon \exists y(y \in \varphi(a) \text{ и } Rxy)\}$$

Понятие истинности может быть описано стандартным способом:

$w \models_\varphi \theta a \Leftrightarrow w \in \varphi(a)$ (*событие происходит, истинно в возможном мире w тогда и только тогда, когда этот мир принадлежит событию*)

$w \models_\varphi \alpha \vee \beta \Leftrightarrow w \models_\varphi \alpha$ или $w \models_\varphi \beta$

$w \models_\varphi \alpha \wedge \beta \Leftrightarrow w \models_\varphi \alpha$ и $w \models_\varphi \beta$

$w \models_\varphi \alpha \supset \beta \Leftrightarrow$ не $w \models_\varphi \alpha$ или $w \models_\varphi \beta$

$w \models_\varphi \neg\alpha \Leftrightarrow$ не $w \models_\varphi \alpha$

Для дискуссивных формул Яськовского соответственно получаем следующие понятия истинности:

$w \models_\varphi \delta a \Leftrightarrow w \in \varphi(\Diamond a) = \{x\colon \exists y(y \in \varphi(a)$ и $Rxy)\}$ (*дискурсивное событие происходит, истинно в возможном мире w тогда и только тогда, когда этот мир принадлежит к событию, которое делается возможным благодаря некоторому другому событию*)

$w \models_\varphi \delta(a \cup b) \Leftrightarrow w \models_\varphi \delta\alpha$ или $w \models_\varphi \delta\beta$

$w \models_\varphi \delta(a \cap_d b) \Leftrightarrow w \models_\varphi \delta\alpha$ и $w \models_\varphi \delta\beta$

$w \models_\varphi \delta(a \to b) \Leftrightarrow$ не $w \models_\varphi \delta\alpha$ или $w \models_\varphi \delta\beta$

$w \models_\varphi \delta(\nabla a) \Leftrightarrow$ не $w \models_\varphi \delta\alpha$

Очевидным образом функция φ следует также распространить на термины [-]-типа:

$\varphi([\alpha]) = \{\mathrm{w}\colon w \models_\varphi \alpha\}$

и, наконец, мы получаем

$\varphi(a \cap_d b) \Leftrightarrow \varphi(\Diamond\alpha) \cap \varphi(b) = \{x\colon \exists y(y \in \varphi(a)$ и $Rxy)\} \cap \varphi(b)$.

Теорема 1. *Аксиомы PC+(A1-A2, B1-B4,B7-B10) общезначимы в вышеописанной семантике.*

Доказательство очевидно. ■

Ясно, что доказуемость этой теоремы не означает, что **JVCD** является (внутренне) непротиворечивой по отношению к вышеприведенной семантике. Чтобы показать это, напомним, что если K представляет собой структуру Крипке (очевидным образом $\langle W,R,\models\rangle$ будет одной из них), то тогда K является моделью Γ тогда и только тогда, когда для каждой $\gamma \in \Gamma$ существует мир w из K, такой, что $w \models_\varphi \gamma$.

Предложение 2. *Существуют противоречивые (на внутреннем* *уровне) множества формул, которые имеют модели.*

Доказательство. Примените вышеописанную семантику для **JVCD** (рассмотрите случай $\Gamma = \{\delta a, \delta(\sim a)\}$). ■

б) Алгебраическая семантика

Можно получить иным способом алгебраическую семантику JVCD-логики, если подходить к высказываниям и событиям просто как к двум совершенно самостоятельным типам сущностей. В этом случае алгебраический JVCD-фрейм будет представлять собой четверку $\langle \boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{f},\boldsymbol{g}\rangle$ где $\boldsymbol{A} = \langle A,+,-\rangle$ является булевой алгеброй (A содержит по меньшей мере два элемента), $\boldsymbol{B} = \langle B,\oplus,',\bullet\rangle$ есть S5-аалгебра, $\boldsymbol{f} : \boldsymbol{B} \to \boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{g}: \boldsymbol{A} \to \boldsymbol{B}$ представляют собой погружающие функции. Пусть 0, 1, $\circ$ и $\leq$ будут определены в обеих алгебрах обычным образом. Для $\boldsymbol{f}$ и $\boldsymbol{g}$ выполняются следующие условия:

$\boldsymbol{f}(k\oplus l) = \boldsymbol{f}(k) + \boldsymbol{f}(l)$, $\quad \boldsymbol{f}(k') = -\boldsymbol{f}(k)$, $\quad \boldsymbol{f}(\boldsymbol{g}(x)) = x$,
$\boldsymbol{g}(x + y) = \boldsymbol{g}(x) \oplus \boldsymbol{g}(y)$, $\quad \boldsymbol{g}(-x) = \boldsymbol{g}(x)'$, $\quad x \leq \boldsymbol{f}((\bullet \boldsymbol{g}(x)')' \oplus y)$,
где $x,y \in A$ и $k,l \in B$.

Если F есть множество правильно построенных формул и E является множеством событий, то оценка $\boldsymbol{v}$ определяется следующим образом:

$\boldsymbol{v}: F \cup E \to A \cup B$, $\boldsymbol{v}(\alpha \vee \beta) = \boldsymbol{v}(\alpha) + \boldsymbol{v}(\beta)$, $\quad \boldsymbol{v}(\neg\alpha) = -\boldsymbol{v}(\alpha)$
(где α, β суть ппф и $\boldsymbol{v}(\alpha)$, $\boldsymbol{v}(\beta) \in A$),
$\boldsymbol{v}(a \cup b) = \boldsymbol{v}(a) \oplus \boldsymbol{v}(b)$, $\quad \boldsymbol{v}(\sim a) = \boldsymbol{v}(a)'$, $\quad \boldsymbol{v}(\Diamond a) = \bullet \boldsymbol{v}(a)$,
$\boldsymbol{v}(\theta a) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{v}(a))$, $\boldsymbol{v}([\alpha]) = \boldsymbol{g}(\boldsymbol{v}(\alpha))$
(где a, b являются событиями и $\boldsymbol{v}(a)$, $\boldsymbol{v}(b) \in B$).

Теоремы 2. *Аксиомы PC+(A1-A2, B1-B4,B7-B10) общезначимы в* $\langle \boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{f},\boldsymbol{g}\rangle$*-модели с оценкой* $\boldsymbol{v}$.

Доказательство очевидно. ■

Иная версия JVCD-фрейма получается, если мы изменим второй компонент. В этом случае в $\langle \boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{f},\boldsymbol{g}\rangle$-фрейме вместо $\boldsymbol{B}$ мы имеем алгебру Яськовского $\boldsymbol{J} = \langle S, \oplus, \otimes,'\rangle$ и для $\boldsymbol{f}$ и $\boldsymbol{g}$ последнее условие трансформируется в

$x \leq \boldsymbol{f}((\boldsymbol{g}(x)'\otimes(y)')')$,
где $x,y \in A$.

Оценка $\boldsymbol{v}$ определяется следующим образом:

$\boldsymbol{v}: F \cup E \to A \cup B$, $\boldsymbol{v}(\alpha \vee \beta) = \boldsymbol{v}(\alpha) + \boldsymbol{v}(\beta)$, $\quad \boldsymbol{v}(\neg\alpha) = -\boldsymbol{v}(\alpha)$
(где α, β являются ппф и $\boldsymbol{v}(\alpha)$, $\boldsymbol{v}(\beta) \in A$),
$\boldsymbol{v}(a \cup b) = \boldsymbol{v}(a) \oplus \boldsymbol{v}(b)$, $\quad \boldsymbol{v}(\sim a) = \boldsymbol{v}(a)'$,
$\boldsymbol{v}(a \cap_J b) = \boldsymbol{v}(a) \otimes \boldsymbol{v}(b)$, $\boldsymbol{v}(\theta a) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{v}(a))$, $\boldsymbol{v}([\alpha]) = \boldsymbol{g}(\boldsymbol{v}(\alpha))$
(где a, b представляют собой события и $\boldsymbol{v}(a)$, $\boldsymbol{v}(b) \in S$).

Теорема 3. *Аксиомы PC+(E1-E12) общезначимы в $\langle A,J,f,g\rangle$-модели с оценкой v.*

Доказательство очевидно. ■

в) Теоретико-категорная семантика

В случае {E1-E12}-системы, как и в случае алгебраической семантики, нам потребуются иное, более простое, определение событий, вызванное отсутствием модальных событий. Множество событий теперь имеет очевидную немодальную структуру, наталкивающую на мысль, что мы не обязаны рассматривать события как множества возможных миров (конечно, мы можем это делать, если в этом возникнет потребность, но это будет специальный, в не общий, случай интерпретации). Мы будем рассматривать события скорее как неопределенное понятие, апеллируя к обыденному пониманию, сконцентрировавших на структурных аспектах событий.

Следующий шаг заключается в категорном подходе к семантике **JVCD**-логики. С этой точки зрения нам требуется иметь в своем распоряжении разновидности категорий, способных передать различие формул и событий. Что касается формул, то для того, чтобы интерпретировать классическую логику, можно воспользоваться так называемыми N-категориями, введенными А.Рискосом и Л. М.Лайтой [18, p. 507].

Определение 1. N-категория $\boldsymbol{C}$ представляет собой категорию предпорядка, снабженную контравариантным функтором $\boldsymbol{N}$: $\boldsymbol{C} \to \boldsymbol{C}$, таким, что

(i) $\boldsymbol{C}$ имеет терминальный объект 1,

(ii) $\boldsymbol{C}$ имеет конечные произведения [-,-],

(iii) функтор $\boldsymbol{N}^2$ естественно эквивалентен тождеству в $\boldsymbol{C}$, т.е. $\boldsymbol{N}^2a \cong a$ для любого объекта a в $\boldsymbol{C}$,

(iv) $a \to b$ является стрелкой $\boldsymbol{C}$ тогда и только тогда, когда $[\boldsymbol{N}a,b] \cong 1$, для любых двух объектов a,b в $\boldsymbol{C}$.

Отметим, что скелетоном of N-категории является булева алгебра, $\boldsymbol{C}$ имеет инициальный объект $0 = \boldsymbol{N}1$ и $\boldsymbol{C}$ имеет конечные произведения $\langle a,b\rangle = \boldsymbol{N}\,[\boldsymbol{N}a, \boldsymbol{N}b]$.

Интерпретация событий могла бы быть получена, если мы примем во внимание двойную природу алгебры $\langle S,\cup, \cap_d,\sim\rangle$. Во-первых, булева алгебра $\langle S,\cup,\sim\rangle$ может быть вновь интерпретирована с помощью N-категории. Во-вторых, косая решетка $\langle S,\cup, \cap_d\rangle$ может быть интерпретирована с помощью нового бифунктора $\boldsymbol{D}$, имитирующего свойства дискуссивной конъюнкции. Таким образом мы определяем более сложную структуру в N-категории с помощью следующего определения.

Определение 2. DN-категория $\boldsymbol{C}$ является N-категорией, снабженной ковариантным бифунктором $\boldsymbol{D}$: $\boldsymbol{C} \times \boldsymbol{C} \to \boldsymbol{C}$, таким, что:

(i) $a\boldsymbol{D}(b\boldsymbol{D}c) \cong (a\boldsymbol{D}b)\boldsymbol{D}c$ для любых a, b, c в $\boldsymbol{C}$,

(ii) $[a\boldsymbol{D}b, a] \cong [a, b\boldsymbol{D}a] \cong a$ для любых a, b, c в $\boldsymbol{C}$,

(iii)для каждых a, b, c в $\boldsymbol{C}$:

(a) $a\boldsymbol{D}b \cong \boldsymbol{N}\,[\boldsymbol{N}a, \boldsymbol{N}\,(1\boldsymbol{D}b)]$,

(b) $1\boldsymbol{D}0 = 0$,

(c) $a \to 1\boldsymbol{D}a$ есть стрелка $\boldsymbol{C}$,

(d) $a\boldsymbol{D}[b,c] = [a\boldsymbol{D}b, a\boldsymbol{D}c]$.

Наконец, нам требуются два сопряженных функтора $\Theta{:}\boldsymbol{A}_1 \to \boldsymbol{A}_2$ и $\Psi{:}\boldsymbol{A}_2 \to \boldsymbol{A}_1$ между DN-категорией $\boldsymbol{A}_1$ и N-категорией $\boldsymbol{A}_2$. Они будут служить для интерпретации θ- и [-]-формул.

Теперь кажется естественным предложить следующий список в качестве словаря перевода высказываний в N-категорию $\boldsymbol{A}_1$ и событий в DN-категорию $\boldsymbol{A}_2$ ($\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{c}$ являются объектами $\boldsymbol{A}_1$, в то время как $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\mathbf{c}$ представляют собой объекты $\boldsymbol{A}_1$):

α	β	$\boldsymbol{a}$	θa	$[\alpha]$	$\alpha \vee \beta$	$a \cap_d b$	$\neg\alpha$	$\sim\boldsymbol{a}$	$\alpha \supset \beta$
$\underline{a}$	$\underline{b}$	$\boldsymbol{a}$	$\Theta\boldsymbol{a}$	$\Psi\underline{a}$	$[\underline{a}, \underline{b}]$	$\boldsymbol{aDb}$	$\underline{\boldsymbol{N}}\,\underline{a}$	$\boldsymbol{N}\,\boldsymbol{a}$	$[\underline{\boldsymbol{N}}\,\underline{a}, \underline{b}]$

Процесс интерпретации аксиом становится ясным, если мы примем во внимание, что если мы определяем $[\underline{\boldsymbol{N}}\ \underline{a}, \underline{b}]$ как $\underline{a} \Rightarrow \underline{b}$ и $\langle[\underline{\boldsymbol{N}}\ \underline{a}, \underline{b}], [\underline{\boldsymbol{N}}\ \underline{b}, \underline{a}]\rangle$ как $\Leftrightarrow$, то пункт (iv) из определения 1 может быть переписан как

(iv') $\underline{a} \to \underline{b}$ является стрелкой в $\boldsymbol{A}_1$ тогда и только тогда, когда $\underline{a} \Rightarrow \underline{b} \cong 1$.

Осуществляя соответствующие преобразования, мы получаем следующий список, представляющий собой перевод аксиом (E1)-(E12):

G1.$[\Theta\boldsymbol{a}, \Theta\boldsymbol{b}] \cong \Theta[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]$

G2. $\underline{\boldsymbol{N}}\Theta\boldsymbol{a} \cong \Theta(\boldsymbol{Na})$

G3. $\bar{\Theta}(a\bar{\boldsymbol{D}}[b, a]) \cong [\Theta a, \Theta(a\boldsymbol{D}b)] \cong \Theta a$

G4. $\Theta(a\boldsymbol{D}b) \cong \underline{\boldsymbol{N}}[\underline{\boldsymbol{N}}\Theta a, \underline{\boldsymbol{N}}\Theta(1\boldsymbol{D}b)]$

G5. $\Theta(1\boldsymbol{D}0) \cong \bar{\Theta}\underline{0}$

G6. $\Theta a \to \Theta(1\boldsymbol{D}a)$

G7. $\Theta(a\boldsymbol{D}(b\boldsymbol{D}c)) \cong \Theta((a\boldsymbol{D}b)\boldsymbol{D}c)$

G8. $\Theta(a\boldsymbol{D}[b, c]) \cong \Theta[a\boldsymbol{D}b, a\boldsymbol{D}c]$

G9. $\Theta\Psi\underline{a} \cong \underline{\alpha}$

G10. $\Theta\Psi[\underline{a}, \underline{b}] \cong \Theta[\Psi\underline{\alpha}, \Psi\underline{b}]$

G11. $\Theta\Psi\underline{\boldsymbol{N}}\ \underline{a} \cong \Theta\boldsymbol{N}\Psi\ \underline{a}$

G12. $\underline{a} \to \bar{\Theta}\boldsymbol{N}[\boldsymbol{N}\Psi\underline{a}, \boldsymbol{b}]$

Теперь нам необходимо понятие DN-функтора, которое может быть введено аналогично тому, как это было сделано в [18, p.509] для случая N-категорий.

Определение 3. Пусть $\boldsymbol{C_{DN}}$ и $\boldsymbol{C_{D'N'}}$ будут представлять собой две DN-категории (снабженные функторами $\boldsymbol{N}$ и $\boldsymbol{N'}$ и бифункторами $\boldsymbol{D}$ и $\boldsymbol{D'}$ соответственно). DN-функтор $\boldsymbol{F}$: $\boldsymbol{C_{DN}} \to \boldsymbol{C_{D'N'}}$ является N-функтором (т.е. сохраняющим структуру N-категории), обладающим следующими дополнительными свойствами (для a,b в $\boldsymbol{C_{DN}}$ и 1' в $\boldsymbol{C_{D'N'}}$):
(a) $\boldsymbol{F}1 \cong 1'$;
(b) $\boldsymbol{F}(a\boldsymbol{D}b) \cong (\boldsymbol{F}a)\boldsymbol{D}(\boldsymbol{F}b)$;
(c) $\boldsymbol{FN} \cong \boldsymbol{N'F}$.

Дуально к тому, как это сделано в [18, p.510-511] можно сконструировать N-категорную интерпретацию классической пропозициональной логики как пары ($\boldsymbol{C}$,($\boldsymbol{E}$)), где $\boldsymbol{C}$ есть N-категория и ($\boldsymbol{E}$) есть N-категорный перевод фильтров, порожденных множеством аксиом. В случае DN-категории подобная конструкция основывается на использовании понятия «строгой» импликации [15, p.157]. Ее определение выглядит следующим образом:

Определение 4. $x \boldsymbol{I} y =_{def} \boldsymbol{N}([\boldsymbol{N}a,a]\boldsymbol{DN}[\boldsymbol{N}p,q])$.

Следуя [15, p.158-159] путем использования «строгой» импликации мы можем ввести отношение конгруэнтности $\approx$ определяя

$$x \approx y \text{ тогда и только тогда, когда } x \boldsymbol{I} y,\ y \boldsymbol{I} x \in (\boldsymbol{E})$$

где ($\boldsymbol{E}$) будет представлять собой N-категорный перевод фильтров как в [18]. Поскольку алгебра классов эквивалентности для $\approx$ будет вновь алгеброй $\langle S,\cup, \cap_{i},\sim\rangle$ [15, p.159], то адаптируя этот результат для случая DN-категории, мы получаем, что категория $\boldsymbol{C_{DN}}/(\boldsymbol{E})_{\boldsymbol{DN}}$ будет DN-категорией, а функтор $\boldsymbol{F}$: $\boldsymbol{C_{DN}} \to \boldsymbol{C_{DN}}/(\boldsymbol{E})_{\boldsymbol{DN}}$ будет DN-функтором. Так как фильтр, состоящий из таких a, для которых $1\boldsymbol{D}a \cong 1$ является собственным фильтром $\boldsymbol{C_{DN}}/(\boldsymbol{E})_{\boldsymbol{DN}}$ (что следует из алгебраического результата в [15, p.159]), то DN-категорным эквивалентом $\langle S,\cup, \cap_{i},\sim\rangle$ будет $\boldsymbol{C_{DN}}/(\boldsymbol{E})_{\boldsymbol{DN}}$, где $(\boldsymbol{E})_{\boldsymbol{DN}}$ является максимальным фильтром.

Наконец, функторы Θ^*: $\boldsymbol{A}_2 \to \boldsymbol{A}_1$ и Ψ^*: $\boldsymbol{A}_1 \to \boldsymbol{A}_2$ между N-категорией $\boldsymbol{A}_1$ т типа $\boldsymbol{C}/(\boldsymbol{E})$ и DN-категорией $\boldsymbol{A}_2$ типа $\boldsymbol{C_{DN}}/(\boldsymbol{E})$ позволяют нам убедиться в пригодности структуры на полных расширениях N- и DN-категорий. Тогда мы получаем категорную интерпретацию системы **JVCD** как ($\boldsymbol{C}$, ($\boldsymbol{E}$), $\boldsymbol{C_{DN}}$, $(\boldsymbol{E})_{\boldsymbol{DN}}$, Θ, Ψ), описывающую множество высказываний и множество событий вместе с доказуемыми (истинными или реальными) событиями.

Ели мы определим, что **JVCD**-логика ($\boldsymbol{C}$, ($\boldsymbol{E}$), $\boldsymbol{C}_{DN}$, $(\boldsymbol{E})_{DN}$, Θ, Ψ) является (*синтаксически*) *непротиворечивой* в том смысле, что не имеет места, чтобы формула и ее отрицание были одновременно доказуемы, легко проверить, что следующее предложение справедливо:

Предложение 3. *JVCD-логика противоречива по отношению к $\boldsymbol{C}_{DN}$-формулам и их $\boldsymbol{C}_{DN}$-отрицаниям.*

Доказательство. Поскольку функтор Θ погружает объекты $\boldsymbol{C}_{DN}$ в $\boldsymbol{C}$, то противоречивость $\boldsymbol{C}_{DN}$ (вызванная противоречивостью $\langle S, \cup, \cap_b, \sim \rangle$) даст нам доказуемость некоторых противоречивых $\boldsymbol{C}_{DN}$-формул в $\boldsymbol{C}$. ■

Схожим образом мы можем также развить категорную семантику для (A1-A2, B1-B4,B7-B10)-версии системы JVCD. В этом случае вместо DN-категорий может быть использована подходящая модификация NM-категорий. Они могут быть определены следующим образом [2 , с.114]:

Определение 5. MN-категория $\boldsymbol{C}$ представляет собой N-категорию, снабженную ковариантным функтором $\boldsymbol{M}$: $\boldsymbol{C} \to \boldsymbol{C}$, таким, что:

(i) $\boldsymbol{M}[a, b] \cong [\boldsymbol{M}a, \boldsymbol{M}b]$ для любых a,b из $\boldsymbol{C}$,

(ii) для любого a из $\boldsymbol{C}$ существует стрелка $a \to \boldsymbol{M}a$ в $\boldsymbol{C}$,

(iii) функтор $\boldsymbol{M}^2$ естественно эквивалентен функтору $\boldsymbol{M}$, т.е. $\boldsymbol{M}^2 a \cong \boldsymbol{M}a$ для любого объекта a из $\boldsymbol{C}$,

(iv) $\boldsymbol{M}0 \cong \boldsymbol{M}0$.

Мы обогащаем это определение еще одним пунктом:

(v) функтор $\boldsymbol{NMNM}$ естественно эквивалентен функтору $\boldsymbol{M}$, т.е. $\boldsymbol{NMNM}a \cong \boldsymbol{M}a$ для любого объекта a из $\boldsymbol{C}$,

Таким образом, наша MN-категория в сущности дает нам ктегорную интерпретацию системы S5 модальной логики (скелетоном MN-категории была бы S5-модальная алгебра). Следующий шаг состоит в рассмотрении двух сопряженных функторов Θ: $\boldsymbol{A}_1 \to \boldsymbol{A}_2$ и Ψ: $\boldsymbol{A}_2 \to \boldsymbol{A}_1$ между MN-категорией $\boldsymbol{A}_1$ и N-категорией $\boldsymbol{A}_2$. Ясно, что они послужат нам для интерпретации θ- и [-]-формул. Словарь перевода высказываний в N-категорию $\boldsymbol{A}_1$ и событий в MN-категорию $\boldsymbol{A}_2$ ($\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{c}$ являются объектами $\boldsymbol{A}_1$, тогда как **a**, **b**, **c** представляют собой объекты $\boldsymbol{A}_1$) будет выглядеть следующим образом:

$\alpha \quad \beta \quad a \quad \theta a \quad [\alpha] \quad \alpha \vee \beta \quad \neg\alpha \quad \sim a \quad \alpha \supset \beta \quad \Diamond a$

$\underline{a} \quad \underline{b} \quad \boldsymbol{a} \quad \Theta\boldsymbol{a} \quad \Psi\underline{a} \quad [\underline{a}, \underline{b}] \quad \underline{\boldsymbol{N}}\,\underline{a} \quad \boldsymbol{N}\boldsymbol{a} \quad [\underline{\boldsymbol{N}}\,\underline{a}, \underline{b}] \quad \boldsymbol{M}\mathrm{a}$

Список переводов аксиом (A1-A2, B1-B4,B7-B10) получается путем осуществления соответствующих преобразований:

H1.$[\Theta \boldsymbol{a}, \Theta \boldsymbol{b}] \cong \Theta[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]$

H2. $\underline{\boldsymbol{N}}\Theta \boldsymbol{a} \cong \Theta(\boldsymbol{Na})$

K1. $\overline{\Theta}(\boldsymbol{M}[a, b]) \cong [\Theta \boldsymbol{M}a, \Theta \boldsymbol{M}b]$

K2. $\Theta a \to \Theta \boldsymbol{M}a$

K3. $\Theta \boldsymbol{MM}a \to \Theta \boldsymbol{M}a$

K4. $\Theta \boldsymbol{M}a \to \Theta \boldsymbol{NMNM}a$

K7. $\Theta \Psi \underline{a} \cong \underline{\alpha}$

K8. $\Theta \Psi[\underline{a}, \underline{b}] \cong \Theta[\Psi \underline{\alpha}, \Psi \underline{b}]$

K9. $\Theta \Psi \underline{\boldsymbol{N}}\ \underline{a} \cong \Theta \boldsymbol{N} \Psi \underline{a}$

K10. $\underline{a} \to \overline{\Theta}[\boldsymbol{MN}\Psi \underline{a}, \boldsymbol{b}]$

Продолжая действовать как в случае DN-категорий, мы далее получаем категорную интерпретацию системы **JVCD** как ($\boldsymbol{C}$, ($\boldsymbol{E}$), $\boldsymbol{C}_{MN}$, $(\boldsymbol{E})_{MN}$, Θ, Ψ), описывающую как множество высказываний и множество событий, так и доказуемые высказывания и события.

Литература

1. *Биркгоф Г.* Теория решеток. М., 1984.
2. *Васюков В.Л.* MN-категории для модальных логик // Логические исследования. Вып. 1. М., 1993. С. 114-123.
3. *Васюков В.Л.* Комбинированная логика В. А.Смирнова с ситуационной точки зрения (не-фегевский подход) // Логические исследования. Вып. 5. М., 1998. С. 221-229.
4. *Вуйцицкий Р.* Формальное построение ситуационной семантики // Синтаксические и семантические исследования неэкстенсиональных логик. М., 1989. С. 5-28.
5. *Смирнов В.А.* Комбинированные исчисления предложений и событий и логика истины фон Вригта // Исследования по неклассическим логикам. М., 1989. С. 16-29.
6. *Смирнов В.А.* Утверждение и предикация. комбинированные исчисления высказываний и событий // Синтаксические и семантические исследования неэкстенсиональных логик. М., 1989. С. 27-35.
7. *Bull R., Segerberg K.* Basic Modal Logic // Handbook of Philosophical Logic. Ed. by D.Gabbay and F.Guenthner. Vol. II. Reidel, Dordrecht, 1984. P. 1-88.
8. *Da Costa N.C.A. and Dubikajtis L.* On Jaśkowski's Discussive Logic // Non-Classical Logic. Model Theory and Computability, A. I. Arruda, N. C. A. da Costa and R.Chuaqui (eds.) North-Holland, 1977. P. 37-56.
9. *Da Costa N.C.A.* Remarks on Jaśkowski's Discussive Logic // Rep. Math. Log., No 4. 1975. P. 7-15.
10. *Da Costa N.C.A. and Doria F.* On Jaśkowski's Discussive Logic // Studia Logica, Vol 54, No 1. 1995. P. 33-60.

11. *Frege G.* Begriffschrift // Translations from the Philosophical Writings of Gottlob Frege Ed. by. P. Geach and M. Black. Oxford, 1952.
12. *Jaśkowski S.* Rachunek zdań dla systemów dedukcyjnych sprzecznych // Studia Soc. Sci. Torunensis. Sectio A. Vol. I. No. 5. 1948. (Английский перевод в [13]).
13. *Jaśkowski S.* Propositional Calculus for Contradictory Deductive Systems // Studia Logica. XXIV (1969). P. 143-157.
14. *Jordan P.* Quantenlogik und das Kommutative Gesetz // The Axiomatic Method, L.Henkin, P.Suppes, A.Tarski (eds.). North-Holland, Amsterdam, 1959. Pp. 365-375.
15. *Kotas J.* Discussive Sentential Calculus of Jaśkowski // Studia Logica. XXXIV (1975). No 2. P. 149-168.
16. *Meixner U.* Events and Their Reality // Logic and Logical Philosophy. No. 2. 1994. P.23-34.
17. *Perzanowski J.* Towards Post-Tractatus Ontology // Wittgenstein - Towards Re-Evaluation, Hrsg./Eds. R.Haller & J.Brandl. Wien, 1990. P. 185-199.
18. *Riscos A., Laita L.M.* N-categories in logic // Zeitschr. Math. Log. Grundl. Math., Bd. 33 (1987), S. 507-516.
19. *Słupecki J.* A Generalization of Modal Logic // Studia Logica. Vol. 28. 1971. P. 7-17.
20. *Scheffler U.* Events as Shadowy Entities // Logic and Logical Philosophy. No. 2. 1994 P.36-53.
21. *Suszko R.* Reifikacja sytuacji // Studia Filozoficzne. No 2. 1971. (Английский перевод в: Philosophical Logic in Poland, J.Woleński (ed.), Kluwer, 1994).

Е.Г.Драгалина-Чёрная

Онтология обобщенной квантификации

Two classical tests for logicality - Quine's thesis of ontological neutrality of logic and Tarski's invariance criterion – are discussed in a generalized quantifiers perspective.

Статья посвящена сравнению различных подходов к интерпретации квантификации и её обобщению. Целью этого сравнения является решение более общей задачи – обсуждение и уточнение онтологических критериев демаркации логического и нелогического, предложенных У.Куайном и А.Тарским.

В соответствии с *критерием онтологической нейтральности*, восходящим к работам Куайна 50-х годов, логика не должна допускать существование каких-либо абстрактных сущностей. Согласно *критерию инвариантности*, сформулированному в совместных работах Линденбаума и Тарского 30-х годов и подтвержденному Тарским через тридцать лет в работе «Что такое логические понятия?», логическими признаются лишь свойства и отношения, инвариантные относительно биективных преобразований универсума.

И *критерий онтологической нейтральности*, и *критерий инвариантности* - классические принципы демаркации логического и нелогического, по-разному уточняющие фундаментальную интуицию относительно онтологической природы логики: логика есть теория, имеющая дело лишь с формальными аспектами реальности. На мой взгляд, теория обобщенной квантификации, остающаяся до сих пор преимущественно прикладной и в силу этого маргинальной областью логики, открывает некоторые свежие перспективы в деле точной экспликации этой фундаментальной онтологической интуиции.

Как известно, именно введение понятия квантора в современную логику стало решающим событием, предопределившим её принципиальное отличие от логики традиционной. Этим нововведением логика обязана двум философам - Г. Фреге и Ч. Пирсу, с именами которых связаны две основные парадигмы современной интерпретации кванторов: трактовка их как *функций выбора* и как *второпорядковых предикатов*.

Интерпретация кванторов как функций выбора восходит к Пирсу. Кванторы, полагает Пирс, получают свое значение из игр, состоящих в выборе подходящих индивидов из варьирующихся областей интерпретации. Являясь, по сути, теоретической систематизацией обычного математического жаргона, принятого в обращении с кванторными выражениями: *«Имея значение x, можно найти значение y, такое что...»*, внешне этот подходфилософски непритязателен. Тем не менее, трактовка кванторов как функций выбора выражает, на мой взгляд, фундаментальную прагматистскую установку Пирса: значение знака должно быть выражено в терминах тех действий, к которым побуждает использование этого знака.

Точная экспликация подхода Пирса возможна с использованием функций выбора Т.Сколема. Скажем, первопорядковая формула

(1) $\forall x \exists y \forall z \exists v F(x, y, z, v)$

будет интерпретирована второпорядковой формулой

(2) $\exists f \exists g\ \forall x\ \forall z\ F(x, f(x), z, g(x, z))$

с квантификацией по сколемовским функциям f и g.

Такой "перевод" во второпорядковый язык может быть истолкован как теоретико-игровая интерпретация формулы (1). Эта возможность возникает, если рассматривать сколемовские функций как определяющие стратегию верификатора, стремящегося доказать истинность (1) в его игре против фальсификатора, стремящегося, в свою очередь, доказать ложность (1). Функции f и g указывают верификатору, какую стратегию он должен выбрать в зависимости от предыдущих выборов фальсификатора, а интерпретирующая формула (2) понимается как утверждение о существовании у верификатора выигрышной стратегии в семантической игре с формулой (1).

Функциональная (теоретико-игровая) интерпретация с самого начала была нацелена на экспликацию идеи линейной итерированной квантификации и естественным образом обобщается на случаи более сложных кванторных зависимостей. Эта возможность связана с интерпретацией кванторной зависимости как зависимости информационной.

Полноте информации в семантической игре с формулой (1) соответствуют "полные" наборы аргументов у сколемовских функций. А именно: каждая функция в формуле (2) имеет аргументами все переменные, связанные в формуле (1) теми кванторами общности, в области действия которых находится заменяемый этой функцией первопорядковый квантор существования. Эта особенность (2) означает не что иное, как полную информированность верификатора обо всех предшествующих ходах фальсификатора в семантической игре с формулой (1). Полнота информации в семантических играх соответствует линейной зависимости кванторов.

Игры с неполной информацией влекут нелинейную зависимость кванторов. Формула с ветвящимся квантором Хенкина:

(3) $\forall x \exists y$

$\rangle F(x, y, z, u)$,

$\forall z \exists u$

("для всех x существует yи для всех z существует v, зависящее только от z") интерпретируется второпорядковой формулой

(4) $\exists f \exists g\ \forall x\ \forall z\ F(x, f(x), z, g(z))$,

где g зависит только от z, но не от x.

Обобщая этот подход, Я.Хинтикка провозглашает создание логики, "дружественной - к - независимости" (IF, т.е. Independence – Friendly логики), разработку которой он сам считает революционным событием в логике XX века (см. [*Hintikka* 1997]). В языке этой логики формула (4) может быть представлена как

(5) $(\forall x)\ (\exists y)\ (\forall z)\ (\exists v\,/\,\forall x)\ F(x, y, z, v)$,

где знак "/ " в $(\exists v\,/\,\forall x)$ указывает на информационную независимость интерпретации квантора $\exists v$ от интерпретации квантора $\forall x$. Это представление имеет то преимущество, что позволяет естественно выражать такие сложные информационные отношения как, скажем, независимость квантора от интенсионального оператора.

В качестве примеров естественно-языковой ветвящейся квантификации обычно обсуждаются предложения: *«Каждый писатель любит некоторую написанную им книгу так же, как каждый критик ненавидит некоторую рецензированную им книгу»*, *«Некий сосед каждого деревенского жителя и некий сосед каждого горожанина ненавидят друг друга»* [Hintikka 1973, 344] , *«Большинство философов и большинство лингвистов согласны друг с другом по поводу ветвящейся квантификации»* [Barwise 1979, 60].

Вопреки последнему из приведенных примеров, до сих пор остается спорным вопрос о логико-онтологической природе ветвящейся квантификации. С серьезными трудностями сталкивается, например, попытка применения к кванторам Хенкина *критерия онтологической нейтральности* У.Куайна.

Исходя из своего знаменитого лозунга: *"Быть - значит быть значением квантифицируемой переменной"*, Куайн отказывает в онтологической нейтральности второпорядковой логике. Эта логика (а точнее, по Куайну, математическая теория) допускает квантификацию по множествам и, следовательно, предполагает онтологию таких абстрактных сущностей как множества. Вместе с тем, ветвящиеся кванторы, допускающие квантификацию только по индивидным переменным, удовлетворяют, по мнению Куайна, критерию онтологической нейтральности. Известно, однако что Эренфойтом, М.Мостовским, Харелом и другими были получены результаты, свидетельствующие, в конечном счете, о выразительной эквивалентности теории ветвящейся квантификации и второпорядковой логики (ветвящиеся кванторы оказались, в частности, достаточны для характеризации бесконечных структур).

Складывается странная с точки зрения *критерия онтологической нейтральности* ситуация: «онтологически нейтральная» по виду логика оказывается эквивалентна по своим выразительным возможностям «онтологически нагруженной» второпорядковой логике. Этот обескураживающий результат применения критерия Куайна побуждает обратиться к альтернативному онтологическому критерию логического - *критерию инвариантности* Тарского. Обсуждение этого критерия обычно ведется в абстрактной логике (обобщенной теории моделей), генетически связанной с трактовкой кванторов как второпорядковых предикатов.

Традиция предикатной трактовки экзистенциального и универсального кванторов восходит к Г.Фреге, понимавшему их как свойства понятий, то есть как второпорядковые одноместные предикаты. Утверждение существования означает, по Фреге, что экстенсионал соответствующего первопорядкового предиката непуст; утверждение с квантором общности - что этот экстенсионал совпадает с универсумом. «Конечно, - замечает Фреге, - на первый взгляд кажется, что в предложении «Все киты – млекопитающие» речь идет о животных, а не о понятиях; однако, если спросить, о каком животном тогда идет речь, то какого-то отдельного представить нельзя. ... Даже если наше предложение и можно оправдать наблюдением за отдельным животным, это ничего не доказывает относительно его содержания. Для вопроса, о чём оно, безразлично, истинно оно или нет, или на каком основании мы принимаем его за истинное. Итак, если понятие есть нечто объективное, то и высказывание о нем может содержать нечто фактическое» [*Фреге* 2000, 77].

Аналогичным образом Фреге определяет понятие кардинального числа. Так, суждение *"Юпитер имеет четыре луны"* содержит утверждение о понятии, а именно, о том, что существует в точности четыре вещи, подпадающие под понятие "луна Юпитера". «Если я говорю, - пишет Фреге, - «Карету кайзера везут четыре лошади», то понятию «лошадь, везущая карету кайзера» я прилагаю число четыре» [*там же*, 75]

Любопытно, что Э.Гуссерль также рассматривал существование как второпорядковый предикат, относящийся не к объекту как таковому, а к "объекту в контексте полагания", то есть к значению. По-видимому, такой подход естественен для феноменолога, стремящегося не описывать реально существующее, а исследовать условия возможности значимого.

Используя терминологию Гуссерля, можно сказать, что кванторы выражают психические свойства и отношения, которые, в отличие от физических (играть в теннис, заниматься математикой), не оказывают влияния на другие свойства и отношения предметов, а сами существуют в силу этих других свойств и отношений. Характеристика некоего отношения как «психического» не предполагает его отнесения к области психологии, но выражает тот факт, что оно является отношением к содержанию идеи, т.е. к значению или понятию. К числу таких «психических» свойств относятся свойства множества быть непустым, содержать все элементы универсума или, скажем, большинство из них, быть счетным, конечным или бесконечным. Из двух множеств одно может, например, содержать все элементы другого или больше элементов, чем другое; бинарное отношение может быть полностью или частично упорядоченным, транзитивным и т.п.

На этом пути возникает возможность обобщения стандартных первопорядковых кванторов, осуществленная А.Мостовским [*Mostowski* 1957]. Он предложил рассматривать кванторы как второпрядковые свойства первопорядковых свойств, то есть как классы подмножеств универсума (точнее, как функции, задаваемые на множествах объектов универсума модели и принимающие в качестве значений истину или ложь, или, говоря иначе, как функции, ассоциирующие с каждой моделью класс подмножеств её универсума). Например, квантор Мостовского *"существует бесконечно много"* есть класс бесконечных подмножеств универсума: $\{x \subseteq U$: x бесконечно$\}$.При этом логическим может считаться, по Мостовскому, только квантор, проходящий тест на инвариантность относительно изоморфных преобразований универсума.

Как известно, интерпретация нелогических свойств и отношений может варьироваться от модели к модели. Было бы неверно сказать, что обобщенные кванторы не допускают такого варьирования. Так, в модели с бесконечным универсумом интерпретация универсального квантора - это бесконечное множество, в модели с пятью элементами - множество из пяти элементов. Однако, не будучи абсолютно инвариантными, логические кванторы инвариантны относительно изоморфных преобразований модели, в частности, относительно перестановок индивидов в области интерпретации. Эта инвариантность свидетельствует о том, что логические кванторы не различают индивидные объекты и характеризуют лишь те свойства модели, которые не зависят от её неструктурных модификаций.

Полагая инвариантность относительно изоморфных преобразований признаком логичности как таковой, Тарский формулирует общий философский тезис о природе логики. «Не раз было отмечено, - пишет он, - в особенности представителями математической логики, что наша логика на деле есть логика объема. Это означает, что два понятия неразличимы, если они имеют один и тот же объем, даже если у них различные содержания. Обычно полагают, что мы не можем логически различать свойства и классы. Теперь же в свете наших предположений оказывается, что наша логика - даже не логика объема, она - логика чисел, числовых отношений» [*Tarski* 1986, 11]. Таким образом, по Тарскому, невозможно не только логическое различение свойств и классов, но и логическое различение равномощных классов, и, следовательно, "наша логика" есть логика кардинальности.

Действительно, теория квантификации Мостовского подтверждает философский тезис Тарского. Как показал Мостовский, любой второпорядковый предикат, удовлетворяющий тесту на инвариантность, выражает свойство, зависящее только от мощности соответствующего первопорядкового предиката. Однако сохраняет ли силу тезис Тарского при дальнейших обобщениях понятия обобщенного квантора?

В связи с лингвистическими приложениями широко известно одно из таких обобщений, предложенное Д.Барвайсом и Р.Купером Согласно этим авторам, мы используем логические кванторы для того, чтобы приписывать свойства (такие как, например, непустота, универсальность, конечность) множествам.

Обобщая идею обобщенного квантора, они характеризуют как кванторные *любые свойства множеств*.

В естественном языке свойства множеств выражаются, по наблюдениям Барвайса и Купера, именными фразами (типа "каждый человек", "большинство женщин", "пятеро детей", и даже собственными именами типа "Джон"). Поэтому, полагают они, "все именные фразы языка и только они являются кванторами по универсуму рассмотрения" [*Barwise, Cooper* 1981, 177].

Именные фразы (включая имена собственные) не обладают, однако, свойством инвариантности относительно перестановок универсума. Рассмотрим две пары предложений: *«Эйнштейн x (x является одним из десяти крупнейших физиков всех времен)», « Эйнштейн x (x является одним из десяти крупнейших новеллистов всех времен)» и «Большинство (натуральных чисел между 1 и 10) x [x < 7]», «Большинство (натуральных чисел между 1 и 10) x [9< x < 17]»* (примеры из [*Sher* 1991, 24]).

Несмотря на то, что экстенсионал *"x является одним из десяти крупнейших физиков всех времен"* может быть получен из экстенсионала *"x является одним из десяти крупнейших новеллистов всех времен"* простой перестановкой универсума, "естественно - языковой квантор" *"Эйнштейн"* припишет двум множествам различные истинностные значения. Аналогичным образом, "квантор" *"большинство натуральных чисел между 1 и 10"* припишет различные истинностные значения экстенсионалам *"x < 7"* и *"9< x < 17"*, хотя каждый из них является результатом перестановки другого. Таким образом, кванторы Барвайса и Купера, различая индивиды в области рассмотрения, не проходят тест на инвариантность и не могут считаться логическими кванторами.

Обобщение идеи обобщенного квантора, предложенное Барвайсом и Купером, не является, конечно, единственно возможным. Нет, например, никакой концептуальной необходимости рассматривать кванторы только как второпорядковые *свойства* первопорядковых *свойств*. Естественное обобщение обобщенных кванторов Мостовского было проведено П.Линдстрёмом (см. [*Lindström* 1966]). Полиадические (многоместные) кванторы Линдстрёма имеют вид $Q(x_1,\dots, x_n)\varphi(x_1,\dots ,x_n)$ и интерпретируются как второпорядковые *отношения* между первопорядковыми *отношениями*. Бинарными примерами полиадических кванторов являются:

(1) *Силлогистические кванторы*, скажем, «Все … есть…»= $\{\langle X,Y\rangle: X,Y\subseteq U$ и $X\subseteq Y\}$. (Ср. замечание Е.К.Войшвилло о том,

что логическими константами в силлогистике являются бинарные отношения A, E, I, O [*Войшвилло* 2003, 29]);

(2) *Квантор "вполне-упорядоченности" Решера:* $Q^R = \{<X, Y>: X, Y \subseteq U$ и $X \langle Y\}$ (*«Существует меньше кошек, чем мышей»)*;

(3) *Квантор "равномощности" Хартига:* $Q^H = \{<X,Y>: X,Y \subseteq U$ и $X = Y\}$ (*«Существует столько же кошек, сколько и мышей»)*;

(4) *«Связывающий» квантор Кинана: («Каждая кошка гоняется за своей мышью»).*

Идея полиадических кванторов восходит к схоластической концепции «множественных кванторов», следы влияния которой можно усмотреть, на мой взгляд, в учении Пирса об «универсальных множественных субъектах». Подобные субъекты содержатся, по Пирсу, в предложения типа *«Любые два кота, запертые вместе, подерутся».*

В стандартной логической нотации полиадические кванторы не рассматриваются как имеющие самостоятельное значение, а интерпретируются как итерированные одноместные кванторы. Ясно, однако, что, рассматриваемая как единое целое, любая итерированная кванторная приставка может пониматься как полиадический квантор. Особый интерес представляет полиадическая трактовка неоднородных кванторных приставок (*«Каждая кошка охотится за некоторой мышью», «Существует мышь, за которой охотится каждая кошка»*). Дело в том, что неоднородные кванторные приставки, выражающие, в отличие от кванторов Мостовского, не свойства классов индивидов, а свойства классов пар индивидов (бинарных отношений), различают равномощные отношения. Не оперируя понятием обобщенного квантора, этот факт показал З.Н.Микеладзе на следующей простой модели.

Пусть дан универсум из трех индивидов $U=\{a,b,c\}$. Зададим два бинарных отношения на U: $F1=\{(a,a), (a,b), (a,c)\}$ и $F2= \{(a,a), (b,b), (c,c)\}$. Эти отношения имеют одинаковое число элементов, одинаковое число элементов имеют и их дополнения. Однако утверждение $\exists x \forall y F1(x,y)$ не эквивалентно утверждению $\exists x \forall y F2(x,y)$, а $\forall x \exists y F1(x,y)$ не эквивалентно $\forall x \exists y F2(x,y)$. Иначе говоря, бинарные кванторы $\exists x \forall y$ и $\forall x \exists y$ различают равномощные отношения (см. [*Микеладзе* 1979, 296]).

Таким образом, философский тезис Тарского о «логике кардинальности» может быть и справедлив для теории монадической квантификации (логики свойств классов индивидов), но не для теории бинарной квантификации (логики свойств классов пар индивидов).

Бинарные кванторы принимают во внимание не только кардинальность, но и другие формальные аспекты универсума. Различая равномощные отношения, они обладают инвариантностью относительно перестановок, однако, перестановок уже не индивидов, а бинарных отношений, то есть пар индивидов. Соответствующая этой инвариантности онтология уже не сводится к онтологии кардинальности. Она оказывается онтологией структур, типов упорядочивания универсума.

Литература

1. *Войшвилло Е.К.* Проблема непустоты субъектов высказываний (суждений) // Логика и В.Е. К. М., 2003.
2. *Микеладзе З.Н.* Об одном классе логических понятий // Логический вывод. М., 1979.
3. *Фреге Г.* Основоположения арифметики. Томск, 2000.
4. *Barwise J.* On Branching Quantifiers in English // Journal of Philosophical Logic. 8. 1979.
5. *Barwise J.* and *R. Cooper*. Generalized Quantifiers and Natural Language // Linguistics and Philosophy. 4. 1981.
6. *Hintikka J.* Quantifiers vs. Quantification Theory // Dialectica. 27. 1973.
7. *Hintikka J.* Selected Papers. Dordrecht, 1997. Vol.2.
8. *Lindström P.* First Order Predicate Logic with Generalized Quantifiers // Theoria. 35. 1966.
9. *Mostowski A.* On a Generalization of Quantifiers // Fundamenta Matematicae.44. 1957.
10. *Sher G.* The Bounds of Logic. A Generalized Viewpoint. Cambridge, 1991.
11. *Tarski A.* What are Logical Notions? // History and Philosophy of Logic. 7. 1986.
12. *van Benthem J.* Polyadic Quantifiers // Linguistics and Philosophy. 12. 1989.

Логика юридической аргументации[1]

Рассуждения, осуществляемые в процессе юридической аргументации, имеют определенную специфику. Эта специфика прежде всего заключается в понимании высказываний.

Различаются три типа высказываний. Первый, высказывания рассматриваются в качеств ассерторических. Так понимаются высказывания потерпевшими, свидетелями и т.д., а также сотрудниками правоохранительных органов на предварительных этапах расследования преступлений. Второй, утвердительные высказывания понимаются как конструктивно доказанные в смысле, близком интуиционистской логике, а отрицательные – как обоснованные, в том числе, в результате приведения к абсурду допущения о доказанности соответствующих утвердительных высказываний. Так понимаются высказывания при принятии судебных решений по уголовным делам. Человек считается виновным, если его вина доказана конструктивно, а невиновным, если утверждение о виновности опровергнуто, например, путем приведения к абсурду, или просто не доказано конструктивно. Третий, как утвердительные, так и отрицательные высказывания понимаются в качестве юридически конструктивно доказанных. Причем, отрицательное высказывание юридически конструктивно доказано, если, и только, если соответствующее ему утвердительное высказывание конструктивно опровергнуто. (Отрицательное высказывание А можно представить в виде $\neg$ B, где B есть “соответствующее ему” утвердительное высказывание, а $\neg$ – знак отрицания.)

Логика высказываний первого типа – логика ассерторических высказываний, одной из наиболее простых моделей которой (для изучения и применения) является классическая логика.

Логика высказываний второго типа – логика конструктивных высказываний в интуиционистском смысле, наиболее известной моделью этой логики является логика интуиционистская (нерелевантная).

---

[1] Работа поддержана РГНФ, проект03-03-00246 а/Б.

Логика высказываний третьего типа – логика юридически конструктивных высказываний.

Пример. В закрытом помещении (в камере предварительного заключения) находились три человека, и один из них оказался убит. Точно установлено, что в помещение никто не входил и никто из него не выходил. Установили, что имеет место именно убийство, а не самоубийство, т.е. умерший человек не убивал (самого себя) – $\neg A_1$, второй не убивал – $\neg A_2$. Следовательно, третий человек совершил убийство – A_3. Схематически:

$$\frac{\begin{array}{c}A_1 \vee A_2 \vee A_3\\ \neg A_1\end{array}}{\dfrac{\begin{array}{c}A_2 \vee A_3\\ \neg A_2\end{array}}{A_3}}$$

Такое косвенное логическое доказательство является приемлемым, если в нем фигурируют ассерторические высказывания. Для принятия судебного решения такого доказательства недостаточно. Утверждение, доказанное этим способом, требует еще и обоснования посредством прямого доказательства. В данном случае утверждение о том, что убил третий человек, необходимо обосновать путем воссоздания события преступления: чем убил, как и т.д. Здесь ситуация сходна с доказательством в конструктивной (интуиционистской) логике. Так, для принятия решения о невиновности подсудимого достаточно опровержения доказательства о его виновности путем приведения к абсурду. В третьем из указанных выше случаев (при третьем понимании высказываний) в отличие от интуиционистской логики доказательство ложности утверждения тоже должно быть конструктивным, но уже не в интуиционистском смысле, поскольку рассуждения от противного для обоснования ложности недостаточно. В этом случае логика юридической аргументации является логикой модальной, в которой суждения оцениваются как юридически конструктивно доказанные, юридически конструктивно опровергнутые и юридически недетерминированные. Высказывание считается юридически конструктивно доказанным, если, и только, если на основе фактических доказательств без сомнения установлено, что описанное им положение дел имело место.

Из сказанного можно заключить, что одним из оснований появления различных логических систем является различение типов высказываний, отношения по формам между которыми выражаются этими системами. Вторым основанием множественности логических систем являются способы моделирования отношений по формам. Моделями здесь служат системы так называемых теоретических объектов. Среди них различают гипотетические, идеальные, абстрактные и идеализированные объекты.

Примерами идеализированных объектов в логике являются неопределенная (обычная) конъюнкция – &, дизъюнкция, например, нестрогая – $\vee$ (при образовании этих объектов отвлекаются от временных параметров событий), материальная импликация – $\supset$ и др. Так, материальная импликация имеет некоторое *сходство* как с условной связью ($\rightarrow$), так и с отношением логического следования ($\Rightarrow$). При истинности основания условного суждения следствие этого суждения не может быть ложным, то есть условное суждение $A \rightarrow B$ является ложным, если A истинно, а B ложно. Аналогичным свойством обладает отношение логического следования: если информация, выражаемая логической формой заключения, является частью информации, выражаемой логическими формами посылок, то при истинных посылках заключение является истинным. Материальная импликация является *упрощением* (а поэтому и *некоторым искажением*) как условной связи, так и отношения логического следования. Упрощение очевидно, поскольку ни условная связь, ни отношение логического следования (понимаемое как отношение по информативности) не определяются таблично.

Примеры искажения. Результат отрицания импликативного суждения – $(A \& \neg B)$ сильнее результата отрицания условного суждения $\Diamond(A \& \neg B)$. ($\Diamond$ – знак возможности). Из ложных посылок не следует любое высказывание. (Конечно, известные парадоксы материальной импликации обусловлены не только отождествлением отношения логического следования с материальной импликацией.) Вместо с тем введение такого теоретического объекта, как материальная импликации облегчает исследование отношений между суждениями, понятиями и т.д. по логическим формам.

Для более адекватного представления логических форм высказываний и т.д. вводятся иные модели логических терминов, например условная связь, понятие релевантного следования и др.

Логической системой, которой выражаются отношения по формам между высказываниями третьего из указанных выше типов с логическими терминами ⊃ (материальная импликация), ∧ (некоммуникативная конъюнкция), ∨ (некоммуникативная дизъюнкция), □ (юридически конструктивно доказано, необходимо), ¬◊ (юридически конструктивно опровергнуто, невозможно), является построенная нами и переинтерпретированная логика S_r. Знак "◊" читается: возможно. В целях сокращения ограничимся терминами ¬, ⊃, □, ◊.

Оценки суждений n, i, c, соответственно читаются: юридически конструктивно доказано, юридически конструктивно опровергнуто, юридически конструктивно не доказано и не опровергнуто.

Определения логических терминов:

A	**¬A**	**□A**	**◊A**
n	**i**	**n**	**n**
c	**c**	**i**	**n**
i	**n**	**i**	**i**

		B		
	⊃	**n**	**c**	**i**
	n	**n**	**c**	**i**
A	**c**	**n**	**n|c**	**c**
	i	**n**	**n**	**n**

n|c понимается как то ли **n**, то ли **c**. Выделенное значение – **n**.

Сответствующее исчисление включает все схемы аксиом КИВ, в которых метасимволы **A, B, C** обозначают модализированные формулы, **modus ponens, правило Геделя,** а также схемы аксиом:

$\Box A \supset A$;
$\neg\Box\neg A \supset \Diamond A$;
$\Diamond A \supset \neg\Box\neg A$;
$\neg\Diamond A \supset \Box(A \supset B)$;
$\Box B \supset \Box(A \supset B)$;
$\Diamond B \supset \Diamond(A \supset B)$;
$\Diamond\neg A \supset \Diamond(A \supset B)$;
$\Diamond(A \supset B) \supset (\Box A \supset \Diamond B)$;
$\Box(A \supset B) \supset (\Box A \supset \Box B)$;
$\Box(A \supset B) \supset (\Diamond A \supset \Diamond B)$;.
$\Box A \supset \Box\Box A$;
$\Diamond\Diamond A \supset \Diamond A$;
$\Diamond\Box A \supset \Box A$;
$\Diamond A \supset \Box\Diamond A$.

Интерпретация (альтернативная) – это функция $\|\ \|$, определяемая слудующим образом.

Если P – пропозициональная переменная, то $\|P\| \in \{n, c, i\}$.

Если $||A||$ и $||B||$ определены, то $||\neg A|| = n \Leftrightarrow ||A|| = i$; $||\neg A|| = c \Leftrightarrow ||A|| = c$; $||\neg A|| = i \Leftrightarrow ||A|| = n$;
если $||A|| = i$ или $||B|| = n$, то $||A\supset B|| = n$; если $||A|| = ||B|| = c$, то $||A\supset B|| \in \{n, c\}$; если $||A|| = c$ и $||B|| = i$, то $||A\supset B|| = c$; $||A|| = n$ $||B|| = i \Leftrightarrow ||A\supset B|| = i$;
$||\Box A|| = n \Leftrightarrow ||A|| = n$; если $||A|| = c$ или $||A|| = i$, то $||\Box A|| \in i$;
$||\Diamond A|| = i \Leftrightarrow ||A|| = i$; если $||A|| = n$ или $||A|| = c$, то $||\Diamond A|| = n$.
Метатеорема о семантической полноте доказана.

Некоторые особенности этой логической системы.

Во-первых, в ней имеет место **правило Геделя.**

Во-вторых, все производные правила вывода классического исчисления высказываний, являясь правилами вывода данного исчисления, применимы в выводе лишь к модализированным формулам. Некоторые (по крайней мере некоторые) прямые правила вывода применимы и к немодализированным формулам, например, правило: $A\vee B, \neg A \Rightarrow B$. Такие непрямые правила, как правило дедукции

$$\frac{\Gamma, A \Rightarrow B}{\Gamma \Rightarrow A\supset B}$$

и приведения к абсурду

$$\frac{\Gamma, A \Rightarrow B; \Gamma, A \Rightarrow \neg B}{\Gamma \Rightarrow \neg A}$$

не применимы к немодализированным формулам в выводе. Однако применимым к любым формулам в выводе является *ослабленное правило приведения к абсурду*

$$\frac{\Gamma, A \Rightarrow B; \Gamma, A \Rightarrow \neg B}{\Gamma \Rightarrow \Diamond\neg A}$$

Для построения релевантного варианта этой системы вводится понятие обобщенного описания состояния. Таковым является любое подмножество, в том числе пустое, множества $\{a_1^n, a_1^c, a_1^i, \ldots, a_r^n, a_r^c, a_r^i, \ldots\}$. Если α – описание состояния релевантной логики, то переменная a_m принимает значение n в α если, и только если, $a_m^n \in \alpha$, a_m принимает значение c, если, и только если, $a_m^c \in \alpha$, a_m принимает значение i, если, и только если, $a_m^i \in \alpha$. Определение релевантной импликации: $\models A\rightarrow B \Leftrightarrow A \models B \Leftrightarrow$ информация B относительно всех описаний состояний (I(B,M)) есть часть информации A относительно всех описаний состояний (I(A, M)) $\Leftrightarrow M_A \subseteq M_B$. ($M_A$ и M_B – все описания состояний, в которых A, соответственно B, имеет значение n. Обобщенные описания состояний обладают следующими свойствами:
Если $M_A \subseteq M_B$, $M_B \subseteq M_C$, то $M_A \subseteq M_C$,

Если $M_A \subseteq M_C$, $M_B \subseteq M_C$, то $M_A \cap M_B \subseteq M_C$,
Если $M_A \subseteq M_C$, $M_A \subseteq M_B$, то $M_A \subseteq M_C \cup M_B$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ивлев В. Ю., Ивлев Ю. В.* Проблема построения теории фактических модальностей // Логические исследования. Вып. 7. М., 2000. С. 269-278.
2. *Ивлев Ю. В.* Таблицы истинности для модальной логики // Вестн. Моск. ун-та. Сер. Философия. 1973. № 6. С. 51-61.
3. *Ивлев Ю. В.* Содержательная семантика модальной логики. М., 1985. 170 с.
4. *Ивлев Ю. В.* Модальная логика. М., 1991. 224 с.
5. *Ивлев Ю. В.* Квазифункциональная логика // НТИ. Сер. 2. Информ. процессы и системы. 1992. № 6.
6. *Ивлев Ю. В.* Квазиматричная логика – основа теории фактически модальностей // Логические исследования. Вып. 8. М., 2001. С. 50-64.
7. *Ivlev Y. V.* Theory of Logicel Modalities // Multi. Val. Logic. 2000. Vol. 5. P. 91-102.
8. *Ivlev Y. V.* Outlines of the transition from the principles of traditional logic to the principles of non-classical logic // Zwischen traditioneller und modernen logik. Nichnklassische Ansatze. Mentis, 2001. P. 297-310.
9. *Ivlev Y. V.* Quasi-matrix logic as a paraconsistent logic for dubitable information // Logic and Logical Philosofy. Vol. 8. (2000). P. 91-97.
10. *Ivlev Y. V.* Quasi-Functional Logic and Logic of Propositional Attitudes // Philosophie und Logik. Frege-Kolloquien Jena 1989/1991. Berlin – N. Y., 1993. P.200-204.

А.С.Карпенко

Дуал трехзначной логики Гейтинга[1]

In this paper a dual to Heyting's three-valued logic is constructed. As results we receive a three-valued paraconsistent logic $\mathbf{D_3}$ with unusual properties. In different from famous three-valued paraconsistent logics $\mathbf{D_3}$ has only one designated value 1 and also it verifies the law of contrposition, but $\mathbf{D_3}$ is logic without structural rules.

Одним из направлений в современной логике является построение дуальных друг другу систем. Особый интерес привлекли работы по построению дуальных систем относительно интуиционистской логики **H**, которые оказались *паранепротиворечивыми.* В таких системах для произвольных формул A и B из $\{A, \neg A\}$ в общем случае не следует B. Как следствие, в системах с *modus ponens* не имеет места закон Дунса Скота

$$A \supset (\neg A \supset B).$$

Кратко, история этого вопроса выглядит так. Г. Генцен в 1935 г. (см. русский перевод [1]) формулирует секвенциальные исчисления классической логики **LK** и интуиционистской логики **LJ**. **LJ** отличается от **LK** тем, что сукцеденты секвенций первой могут состоять не более, чем из одной формулы. Генцен пишет: «... Это ограничение является единственным пунктом, отличающим **LK**-вывод от **LJ**-вывода» (с. 26).

Однако существует возможность построить дуальное интуиционистскому секвенциальное исчисление **DLJ**. Оно отличается от **LK** тем, что антецеденты секвенции первой могут состоять не более, чем из одной формулы. В полученной таким образом логике не каждое противоречие $A \wedge \neg A$ отбрасывается. Более того, поскольку секвенция $A \wedge \neg A \vdash B$ отбрасывается, то **DLJ** оказывается паранепротиворечивой логикой.

Впервые подобное секвенциальное исчисление было построено Дж. Чермаком в 1977 г. [6], а затем Н.Д. Гудманом [7]. На эти работы обратил внимание В.А. Смирнов [4].

Однако особый интерес представляет статья И. Урбаса [10], поскольку в предыдущих работах не используются все связки

[1] Работа выполнен при поддержке гранта РГНФ № 02-03-18196.

Генцена и, как заметил Урбас, «не совсем ясно, в каком точном смысле каждая система есть дуал интуиционистской **LJ**. Именно в работе Урбаса строится дуальная интуиционистская логика **DLJ** со всеми генценовскими связками. Важно, что в этой работе обсуждаются свойства дуальных интуиционистских систем. В этих системах отбрасываются $A \wedge \neg A \vdash B$ и $A \vdash \neg A \supset B$.

На самом деле *дуальность* может определяться и по-другому. Напомним, что алгебраическим примером интуиционистской логики **H** являются алгебры Гейтинга (псевдобулевы алгебры). Алгебры Гейтинга являются решетками с 0, резидуальными относительно пересечения (см. [5]), где «резидуалом» относительно $\wedge$ является как раз интуиционистская импликация $\Rightarrow$, определяемая следующим образом:

$$x \leq y \Rightarrow z \text{ т.т.т., когда } x \wedge y \leq z.$$

Псевдодополнение $\neg x$ определяется так: $\neg x = x \Rightarrow 0$.

Если $<L, \vee, \wedge, \Rightarrow, 0, 1>$ есть алгебра Гейтинга, то $\Leftarrow$ есть бинарная операция, дуальная к $\Rightarrow$, т. е. элемент z $(= x \Leftarrow y)$ является наименьшим элементом со свойством $x \cup z \geq y$. Операция $x \Leftarrow y$ в [3 с. 72] называется «псевдоразностью». В [9] алгебра $<L, \vee, \wedge, \Leftarrow, 0, 1>$ изучается под названием *брауэровой алгебры*. Или, по-другому, алгебры Брауэра являются решетками с 1, резидуальными относительно объединения:

$$x \geq y \Leftarrow z \text{ т.т.т., когда } x \vee y \geq z.$$

Дуальное псевдодополнение определяется так: $\ulcorner x = x \Leftarrow 1$.

Легко видеть, что в DH закон дунса Скота

$$A \Leftarrow (\ulcorner A \Leftarrow B)$$

не имеет места.

Такой способ построения дуальных систем наводит на мысль определять значение логических операций противоположным образом относительно упорядочивания этих самих значений.

Рассмотрим логическую матрицу знаменитой трехзначной суперинтуиционистской логики Гейтинга $\mathbf{G_3}$:

$$\mathfrak{M}_3^G = < \{0, {}^1/_2, 1\} \vee, \wedge, \neg, \Rightarrow, \{1\} >,$$

где

$$x \vee y = \max(x,y),$$
$$x \wedge y = \min(x,y),$$

$$\neg x = \begin{cases} 1, \text{ если } x = 0 \\ 0, \text{ если } x \neq 0, \end{cases}$$

$$x \Rightarrow y = \begin{cases} 1, \text{ если } x \le y \\ y, \text{ если } x > y. \end{cases}$$

Тогда имеем следующие таблицы истинности для $\neg x$ и $x \Rightarrow y$:

x	$\neg x$
0	1
$^1/_2$	0
1	0

$\Rightarrow$	0	$^1/_2$	1
0	1	1	1
$^1/_2$	0	1	1
1	0	$^1/_2$	1

Теперь противоположным (дуальным) образом к матрице $\mathfrak{M}_3^G$ определим операции $\ulcorner$ и $\Leftarrow$. Заметим, что *max*(x,y) переходит в *min*(x,y) и наоборот, а выделенным значением становится 0:

$$\mathfrak{M}_3^D = < \{0, {}^1/_2, 1\} \wedge, \vee, \ \ulcorner, \Leftarrow, \{0\} >,$$

$$\ulcorner x = \begin{cases} 0, \text{ если } x = 1 \\ 1, \text{ если } x \neq 1, \end{cases}$$

$$x \Leftarrow y = \begin{cases} 0, \text{ если } x = 1 \\ x, \text{ если } x > y. \end{cases}$$

Для удобства и сравнения с другими логиками переобозначим 0 на 1 и 1 на 0 в истинностной таблице для $\Leftarrow$, а в качестве выделенного истинностного значения возьмем 1. Тогда имеем следующие таблицы истинности для $\ulcorner x$ и $x \Leftarrow y$:

x	$\ulcorner x$
0	1
$^1/_2$	1
1	0

$\Leftarrow$	0	$^1/_2$	1
0	1	1	1
$^1/_2$	$^1/_2$	1	1
1	0	0	1

Очевидно, что правило *modus ponens* проходит и легко проверить, что закон Дунса Скота

$$A \Leftarrow (\ulcorner A \Leftarrow B)$$

здесь не имеет места.

Впервые подобная логика появилась в [2], обозначенная как **D₃**. Таким образом дуалом к трехзначной интуиционистской логике Гейтинга $\mathbf{G_3}$ является паранепротиворечивая логика $\mathbf{D_3}$. Неожиданно оказалось, что подобная логика в обзоре по трехзначным паранепротиворечивым логикам вообще не встречается (см. [8]). Заметим, что из всех известных трехзначных паранепротиворечивых логик $\mathbf{D_3}$ является с *единственным* выделенным значением 1. Более того, в отличие от всех паранепротиворечивых логик в ней содержится контрпозиция

$$(A \Leftarrow B) \Leftarrow (\ulcorner B \Leftarrow \ulcorner A).$$

Но за это приходится платить – эта логика без структурных формул (правил): в ней нет законов утверждения консеквента (утончения), сокращения и перестановки. Таким образом, паранепротиворечивая логика $\mathbf{D_3}$ является логикой без структурных правил.

Литература

1. *Генцен Г.* Исследование логических выводов // *Генцен Г.* Математическая теория логического вывода. М. 1967.
2. *Кварталова Н.Л.* Паранепротиворечивость и релевантность (кандидатская диссертация). М.: МГУ, 2004.
3. *Расёва Е., Сикорский Р.* Математика метаматематики. М.: Наука. 1972.
4. *Смирнов В.А.* Об одной системе паранепротиворечивой логики // Многозначные, релевантные и паранепротиворечивые логики. (Труды научно-исследовательского семинара по логике Института философии АН СССР). М., 1984. С. 129-133.
5. *Blyth T. S, Janowith M. F.* Residuation theory. Oxford: Pergamon Press. 1972.
6. *Czermak J.* A remark on Gentzen's calculus of sequents // Notre Dame Journal of Formal Logic. Vol. 18. 1977.
7. *Goodman N.D.* The logic of contradiction // Zeitschrift für mathematische Logic und Grundlagen der Mathematik. Bd. 27. № 2. 1981.
8. *Karpenko A.S.* Three-valued paraconsistent logics // Multiple-valued Logic. Vol. 5. 2000. P. 117-123.
9. *McKinsey J. C. C., Tarski A.* On closure elements in closure algebras // Annals of Mathematics. Vol. 47, № 1. P. 122-162. 1946.
10. *Urbas I.* Dual-intuitionistic logic // Notre Dame Journal of Formal Logic. Vol. 37. № 3. 1996. P. 440-451.

Е.Е.Ледников

Контексты знания и мнения[1]

It is proposed to differ knowledge and belief contexts in accordance with philosophical tradition of differing knowledge and belief notions. The analysis of these contexts with help of first order modal logic with epistemic and doxastic modal operators is able to solve successfully well-known «puzzles» of such contexts. It is necessary for this aim to construct genuine singular terms of knowledge and belief contexts as individual descriptions of modified for such contexts Russell's theory. It is very important to investigate semantic relations between knowledge and belief to clarify logical structure of contexts under consideration. Some evident semantic relations between knowledge and belief that characterize their traits are noted.

Еще античные философы задумывались над вопросом «что есть знание?». Хорошо известно положение Парменида, поддержанное Платоном [1, 2] – «о текучем знания не бывает» (а возможно только мнение - Е.Л.). Смысл данного положения, если не принимать во внимание связь с метафизическим идеализмом его авторов, может быть рационально понят как требование формулировать в науке законы не относительно изменчивых (текучих, преходящих, единичных) событий, а относительно устойчивых (в идеале - вневременных) факторов бытия мира.

Разумеется, научное познание не может быть сведено к простой регистрации единичных фактов-событий. Но и без их фиксации наука тоже невозможна. Причем фактические данные о землетрясениях, ураганах, эпидемиях, социальных катаклизмах и т.п. вовсе не являются «мнениями», хотя в них и идет речь об уникальных, не воспроизводимых событиях. Именно изучение подобных событий, формулировка закономерностей их возникновения и протекания представляет наиболее трудоемкую задачу науки - крайне сложно смоделировать то, что никогда больше не повторится (при имевшем место наборе значений параметров).

Итак, знание возможно как об «устойчивом», так и о «текучем». О первом, «устойчивом», оно получается, когда познающий

[1] Работа выполнена при поддержке РГНФ, грант №04-03-00144.

человек конструирует абстрактные предметы с помощью абстракций отождествления, конструктивизации, идеализации, изолирующей абстракции, а затем устанавливает и формулирует законы взаимосвязи этих предметов. О втором, «текучем», знание воплощается в сообщениях наблюдателей и экспериментаторов, касающихся как воспроизводимых, повторяющихся, так и уникальных событий. Воспроизводимые, повторяющиеся события служат материалом для конструирования абстрактных предметов, так что знание о них - это знание об «устойчивом».

Теперь уместно спросить - а чем знание будет отличаться от мнения? Ведь мнение, как и знание, оказывается возможным не только о «текучем», но и об «устойчивом». Очевидно, современного, научно ориентированного философа не может устроить гегелевское понимание мнения как «субъективной релятивизации абсолютного», а знания - как «объективного осознания относительной истины как проявления истины абсолютной». Понятия относительной и абсолютной истин уместны лишь при гегелевском понимании познания как актов самопознания мирового духа. Хотелось бы остаться в рамках здравого смысла – в рамках понимания познания как воспроизведения в нашей голове важнейших (для нас) характеристик окружающего мира. В этом случае определяющим для знания оказывается понятие истины. Именно интенция (направленность) на истинность, осознание истинности некоторого утверждения, органически связанное с его проверочной процедурой, превращает это утверждение в знание. В противном случае, когда вопрос об истинности ставить преждевременно или вообще неуместно, данное утверждение следует отнести к мнению.

Говоря об истине, будем иметь в виду исключительно аристотелевское или же платоновское ее понимание. То есть теорию корреспонденции в первом случае и теорию когеренции во втором. Действительно, знание о мире - это утверждение о том, что есть "на самом деле", которое проверяется экспериментально или же гипотетико-дедуктивным методом. Знание о математических объектах - это утверждение, не противоречащее ранее доказанным положениям (скажем, из области теории чисел), причем это утверждение может быть представлено в качестве теоремы.

Разумеется, далеко не всегда знание - это явно установленная истина. Иногда утверждения относят к знанию по косвенным признакам - например, они удовлетворяют идеальным нормам знания (выражены в аксиоматической форме) или же их разделяет авторитетное научное сообщество по причине соответствия принятой парадигме. Однако в этом случае существует опасность принять за знание всего лишь мнение. Так, зачастую бывает трудно ответить на вопрос - является ли соответствующая парадигма образцом знания или феноменом мнения определенной научной группы (вспомним отношение официальной травматологии к новым методам лечения переломов, предложенным в 60-х годах курганским врачом Илизаровым). С другой стороны, сколько существует аксиоматически построенных рассуждений, достаточно бесполезных в научном отношении! Так что косвенные свидетельства в пользу знания должны использоваться достаточно осторожно и критически.

Наконец, последний вопрос - насколько уместно противопоставлять знание мнению? Очевидно, в принятой нами системе рассуждений о мнении нельзя говорить как о чем-то, являющемся истинным или ложным. Однако данное обстоятельство не дискредитирует мнения как элементы духовной культуры человека. Скажем, все догматы религии, все философские рассуждения о смысле человеческого существования, добре и зле, прекрасном и безобразном и т.п., будучи отнесены к области мнений, не становятся менее значимыми в жизни человека. Нужно только относиться к ним именно как к мнениям, дополняющим знания, поскольку из одних знаний духовный мир человека состоять не может. Мнения - это не только конвенции или гипотезы, но и положения, принимаемые в ходе развития цивилизаций, неотъемлемые их элементы. Поэтому неуместно спорить о мнениях - какая религия «правильная», какая мораль «нравственная», какой художественный метод «прогрессивный». Духовная нетерпимость одной из своих причин имеет необоснованную попытку выдавать мнения за знания. С другой стороны, попытка возвысить знания над мнениями (например, в духе Св.Августина, противопоставлявшего «знание, ведущее к спасению», праздному, суетному любопытству) - прямая дорога к сциентизму, к дискредитации авторитета науки.

Интерес к контекстам знания и мнения возник в начале 20-х годов прошлого столетия. Изначально он был связан с проблемой так называемых пропозициональных установок, на которую обратил внимание еще Л.Витгенштейн [3]. Вслед за ним Б.Рассел [4], Р.Карнап [5], У.Куайн [6], каждый по-своему, пытались истолковать интенсиональность контекстов пропозициональных установок (проявляющуюся, в частности, в нарушении правила замены эквивалентного), не выходя за пределы экстенсионального языка. Напротив, А.Черч [7] был убежден в необходимости рассмотрения пропозициональных установок как отношения между субъектом установки и интенсиональным объектом – суждением. Новый этап исследования понятий знания и мнения, логической реконструкции контекстов, содержащих данные понятия, связан с трактовкой Я.Хинтиккой знания и мнения как эпистемической и доксатической модальностей соответственно в рамках его модальной системы [8]. С.Крипке пытался понять причину нарушения правила подставимости тождественного в контекстах мнения, сосредоточив усилия на поисках «твердых десигнаторов» среди имен естественного языка [9]. Предпринимались попытки рассматривать в качестве субъекта знания и мнения «компетентного» субъекта, досконально овладевшего правилами языка и логики (Д.Элмог), у которого не может возникнуть проблем с нарушением правил подставимости тождественного, $\exists$-введения и $\forall$-удаления [10]. Е.Д.Смирнова предпочла рассматривать контексты мнения в рамках логики с второпорядковыми экстенсиональными предикатами, выполняющими функции кванторов, и интенсиональными функторами в духе идей Р.Монтегю [11]. Тем не менее, несмотря на столь интенсивные исследования (а список работ, приведенный нами, не претендует на полноту), до сих пор отсутствует логическая теория, пригодная для формализации нетривиальных дедуктивных и семантических связей между знанием и мнением.

Мы полагаем, что решение перечисленных проблем следует искать в рамках первопорядковой модальной логики с эпистемическими и доксатическими модальными операторами. Нет смысла заниматься поисками «твердых десигнаторов» для контекстов знания и мнения среди имен естественного языка по причине отсутствия таковых. Подлинными сингулярными терминами эпистемических и доксатических контекстов могут быть только индивидные дескрипции, контекстуальная элиминируемость которых определяется условием эпистемического (соответственно, доксатического) существования и единственности. Другими словами, расселовские контекстуальные определения йота-оператора следует переформулировать так, чтобы идеи расселовской теории индивидных дескрипций оказалось возможным распространить на контексты знания и мнения [12].

Далее, следует принять во внимание существенное различие между знанием и мнением, на которое указывали еще античные мыслители (в частности, Парменид и Аристотель). В то время как знание выражается в истинных суждениях (вряд ли уместно говорить, что субъект α «знает», что 2+2=5), мнение, напротив, нередко выражается ложным суждением – притом, что само суждение мнения оказывается истинным. Например, может оказаться истинным суждение «Школьник Василий считает, что Копенгаген является столицей Швеции». В терминах семантики возможных миров последнее обстоятельство будет означать, что отношение достижимости на доксатических альтернативах не должно быть рефлексивным.

Особого внимания заслуживает выявление семантических связей между (личностным) знанием и мнением, в исследовании которых бесспорным пионером явился Я.Хинтикка [13]. В первую очередь напрашивается вывод, что знание имплицирует мнение, но не наоборот. Назовем ВК-логикой логику знания и мнения, в которой используются личностные операторы знания (K_α) и мнения (B_α). Тогда в данной логике должно быть истинным высказывание $K_\alpha A \supset B_\alpha A$ (где A – произвольное высказывание классической логики), но импликация в обратную сторону не имеет места, если только мнение субъекта α не основано на знании. Но субъект может иметь мнение о чем-либо, не зная, так ли это на самом деле. Скажем, субъект α полагает, что следующим президентом России будет женщина, что равносильно истинности высказывания $B_\alpha A \wedge \sim K_\alpha A$. С другой стороны, поскольку знание имплицирует мнение, высказывание $K_\alpha(A \wedge \sim B_\alpha A)$ будет ложным.

Приведенное выше мнение школьника о том, что Копенгаген – столица Швеции, означает истинность высказывания $B_\alpha A \wedge \sim A$. Далее, субъект α может иметь о чем-либо мнение, полагая, что он не обладает достоверным знанием об этом, то есть другой истиной ВК-логики может быть высказывание $B_\alpha(A \wedge \sim K_\alpha A)$. Еще одно важное свойство знания и мнения состоит в том, что субъект мнения α может знать, что его мнение не основано на знании, что он судит, так сказать, по наитию, то есть высказывание $K_\alpha(B_\alpha A \wedge \sim K_\alpha A)$ также может быть истинным. Наконец, если субъект α нечто знает, то он считает, что это знает, то есть истинно высказывание $K_\alpha A \supset B_\alpha(K_\alpha A)$. И поскольку человек обычно отдает себе отчет в своих мнениях, то истинно высказывание $B_\alpha A \supset K_\alpha B_\alpha A$.

Разумеется, приведенные примеры не исчерпывают всего богатства семантических связей между знанием и мнением. Мы указали лишь на те из них, которые лежат на поверхности, сразу бросаются в глаза. Что касается более глубоких связей знания и мнения, то они ждут своего дальнейшего исследования.

Литература

1. *Платон* «Тимей» // *Платон* Собр. соч. в 4 т. М., 1994. Т. 3. С. 433, 455.
2. *Аристотель* Метафизика // *Аристотель* Собр. соч. в 4 т. М., 1976, Т.1. С.327.
3. *Витгенштейн Л.* Логико-философский трактат. М., 1958. С. 78.
4. *Рассел Б.* Исследование значения и истины. М., 1999. С.19, 185, 291сл.
5. *Карнап Р.* Значение и необходимость. М., 2000. С. 97, 110, 192, 216, 331.
6. *Quine W.* Word and object. Cambridge (Mass.) 1975. P. 146f.
7. *Church A.* On Carnap's analysis of statements of assertion and belief // Analysis. 1950. 10. P. 97-99.
8. *Хинтикка Я.* Семантика пропозициональных установок // Логико-эпистемологические исследования. М., 1980. С. 68-101.
9. *Крипке С.* Загадка контекстов мнения // Новое в лингвистике. М., 1986. Вып. 18. С. 194-242.
10. *Almog J.* Would you believe that? // Synthese. 1984. Vol. 58, № 1. P. 1-38.
11. *Смирнова Е.Д.* О загадке контекстов мнения // Логические исследования. М., 2001. Вып. 8. С. 199-209.
12. *Ледников Е.Е.* Индивидные дескрипции в эпистемических контекстах // Материалы конференции «Смирновские чтения» (4). М., 2003. С. 148-150.
13. *Hintikka J.* Knowledge and belief. Ithaca, 1962.

С.А.Павлов

Логический анализ понятия глобализации

The notion of globalization is considered from logical point of view. It is paid attention to definition problem of this notion. Basic elements of globalization conception and criteria of scientific approach to it are discussed. It is noted difficulties of the construction such conception.

Целью статьи является изложение ряда результатов логического анализа понятия и концепции глобализации, который является необходимой частью методологии исследования глобалистики как науки.

Логический анализ использования термина "глобализация" обнаруживает ряд трудностей. Первая из них состоит в том, что имеется несколько заметно отличающихся друг от друга определений этого термина. Это свидетельствует о неоднозначности понимания этого термина разными исследователями и об отсутствии общего согласия по поводу его определения, А также о зависимости содержания понятия глобализация от контекста его употребления. Так Э.Перро [9], Р.Робертсон [10], указывают на существование большого количества трактовок термина «глобализация» и отсутствие его четкого определения, что ставит проблему уточнения понятия «глобализация»

Приведем несколько различных определений для сравнения.
Первое из энциклопедии «Глобалистика» [1]:

Глобализация – процесс становления единого взаимосвязанного мира, в котором *народы* не отделены друг от друга *привычными* протекционистскими барьерами и границами, одновременно и препятствующими их общению, и предохраняющими их от неупорядоченных внешних воздействий.

Глобализация – это свободное, *ничем не ограниченное* перемещение по всему миру людей, идей, товаров и денег, подчиненное *универсальному международному законодательству демократического характера.*

Эксперты МВФ определяют феномен **глобализации**
как «растущую экономическую взаимозависимость стран всего мира в результате возрастающего объема и разнообразия международных сделок с товарами, услугами и мировых

потоков капитала, а также благодаря все более быстрой и широкой диффузии технологий».

Эти примеры иллюстрируют вышеуказанные трудности. Курсивом отмечены слова, смысл которых не является достаточно ясным. Последнее же определение выражает лишь узко экономический аспект исследуемого нами понятия.

Поэтому логико-семантический подход к анализу понятия глобализации требует начать с уточнения смысла, в котором употребляется данный термин (ср. в [4, 5, 6]).

Как известно, имеются диахронный и синхронные планы рассмотрения процессов. В диахронном плане различают несколько этапов или стадий (ступеней) глобализации. Ряд авторов отмечают значительные различия в реальных процессах и концепциях глобализации, имевших место в 80-е и 90-е гг. XX столетия, то есть во время и после противостояния идеологически противоположных систем. В синхронном же плане констатируются различия в определении глобализации в зависимости как от контекста и дискурса, в которых оно употребляется, так и в понимании предмета, к которому оно прилагается.

Необходимо отличать фактически происходящие процессы глобализации от моделей и концепций глобализма.

Имеет смысл различать и не смешивать процесс глобализации с управлением ходом этого процесса, если полагать, что этим процессом можно управлять. В противном случае, считая его неуправляемым, возможно рассматривать глобализацию как процесс, протекающий спонтанно, хаотично, но рождающий из себя закономерности, подобно тому, как Порядок возникает из Хаоса в моделях Пригожина. В данном случае, Новый Мировой Порядок из Либерального Экономического Хаоса.

Отметим, что смысл термин "глобализация" в политическом дискурсе значительно отличается от смысла этого термина в экономическом дискурсе. В политическом дискурсе "глобализация" означает новую систему международных отношений, соответствующую новому балансу сил на мировой арене, которая с начала 90-х годов прошлого века сменила систему, существовавшую с 1945 года, созданную государствами-победителями во Второй мировой войне. Кроме того, обновляющиеся представления о суверенитете и его ограничениях ставят под вопрос ряд положений в области международного права, установленных со времени заключения Вестфальского мира, то есть с 1648 года.

Для дальнейшего уточнения смысла, в котором употребляется термин "глобализация", необходимо учитывать несколько противопоставлений, в которых фигурирует этот термин. Это противопоставления процессов глобализации и регионализации и отношений "глобальный" – "локальный". А также противостояние стремлений к глобализации и к автаркии. Центрообразующему представлению о мегаполисе противостоит представление о глобальной деревне.

Приведем еще ряд противопоставлений, которые имеет смысл учитывать при анализе концепций глобализации:
феномен глобализации и проект глобализации,
открытие глобализации и провозглашение глобализации,
исследование глобализации и управление этим процессом.

Логическая постановка вопроса о терминах, играющих существенную роль в для концепции глобализации ведет к их уточнению. Постановка вопроса о объектах (индивидах с логической точки зрения) к которым приложим предикат «глобальный» показывает, что допустимо говорить о глобальной экономике (в силу наличия таких объектов как ТНК и ТНБ), но словосочетание «глобальная политика» порождает вопросы о ее центре, что может вызывать логико-семантические проблемы, подобные тем, к которым ведет употребление таких слов как «нынешний король Франции».

В глобальном человейнике [2] заново ставятся под вопрос представления об идентичности (самоопределении) личности, справедливости, истине. Идентичность личности стирается из-за исчезновения ее политических и экономических привязок. Так по Э.Перро [9] глобализация – это процесс, целью которого является формирование «хомо-экономикус», т.е. имеет место сужение содержания понятия «человек».

В самом абстрактном виде глобальность – это характеристика социальных систем, включающая направление их развития, тем самым это понятие высокого уровня, которое не следует сводить к предикатам первого порядка.

С научной точки зрения построение и анализ концепций глобализации требует *во-первых*: задания множества исходных элементов системы (например: таких как система, процесс, управление, связи, унификация, стандартизация, обмен, взаимозависимость и других); *во-вторых*: формулировки основных исходных положений концепции (то есть, аксиом), характеризующих свойства элементов, их взаимосвязи и взаимозависимости; *в третьих*:

указания на следствия и результаты, вытекающие из формулировки концепции с учетом принятых условий и предпосылок.

О научности концепции имеет смысл говорить, если в заданных рамках с ее помощью можно объяснять и прогнозировать существенные для исследователя (каковым может оказаться аналитик, политолог или экономист) стороны и явления процесса глобализации. В противном случае употребление термина "глобализация" будет ненаучным, зачастую связанным с прагматическим использованием идей и идеологий, способствующим созданию в СМИ расхожих мифов о глобализме и антиглобализме. К такому употреблению понятия глобализации следует относиться более чем критически.

В классификации концептуальных схем, в рамках которых пытаются осмыслить глобальные тенденции современной политической динамики, имеет смысл выделить два типа: 1) мир как гомогенизирующаяся и универсализующая среда, 2) мир как фундаментально гетерогенная структура, порождающая разделения и противостояния различного рода. Эти схемы часто противопоставляют друг другу, однако эмпирически наблюдаются обе тенденции как гомогенизации, так и гетерогенизации, что говорит о дуальности процесса глобализации, сопряженной как с универсализацией принципов международных взаимодействий (в самых различных сферах политической, финансовой, технологической, культурной и т. д.), так и с усложнением внутренней структуры и системы связывающих взаимодействий единого универсального миропорядка.

В анализе глобальных процессов необходимо выделять причины и следствия глобализации. Кратко отметим ряд основных причин или источников глобализации: 1) технологический прогресс в области средств коммуникации, обмена информацией, транспортных систем, 2) либерализация торговли и другие формы экономической либерализации, 3) значительное расширение сферы деятельности международных и транснациональных организаций, включая транснациональные корпорации (ТНК) и банки (ТНБ), 4) достижение практически полного единства взглядов на рыночную систему хозяйства, 5) формирование унифицированных средств массовой информации, массовой культуры, использование английского языка в качестве всеобщего средства общения. Следствия глобализации классифицируют, разделяя на положительные, рассматриваемые как ее преимущества и выгоды, и на отрицательные, ведущие к проблемам и конфликтам, рассматриваемым как издержки этого процесса.

К преимуществам и выгодам глобализации относят: 1) углубление специализации и международного разделения труда за счет конкуренции и расширения рынка, 2) экономия на масштабах производства, 3) выигрыш от торговли на взаимовыгодной основе в международном масштабе, 4) повышение производительности труда в результате рационализации производства на глобальном уровне и распространения передовой технологии, 5) общее повышение благосостояния в мире.

Помимо преимуществ, процесс глобализации сопряжен с возникновением проблем и возможных конфликтов. Возникновение глобальных экологических проблем и исследование пределов экономического роста стимулировали возникновение глобалистики как науки (см. [7]). Угрозы возникновения конфликтов на региональном, национальном и мировом уровнях связывают с неравномерным распределением преимуществ в процессе глобализации мировой экономики. В логическом анализе таких процессов необходимо указывать на множество индивидов или групп индивидов, являющихся получателями благ и преимуществ от глобализации. Возможность региональной или глобальной нестабильности в условиях взаимозависимости национальных экономик на мировом уровне может возникать в связи с экономическим спадом. Эта нестабильность способна повлечь за собой стремление разорвать взаимные связи, созданные в ходе глобализации, вызывая тем самым экономические конфликты. Проблемы для некоторых стран связаны с опасением, что контроль над их экономикой может перейти от суверенных правительств к наиболее сильным государствам или глобальным корпорациям.

Глобализация является многоаспектным процессом. Так эксперты ЮНЕСКО предостерегают: "Ошибается тот, кто считает глобализацию процессом исключительно экономическим. Прежде всего, потому, что любое явление такого масштаба, затрагивающее интересы всего человечества, не может ограничиваться только отношениями в сфере производства и потребления товаров и услуг". Поэтому имеет смысл различать экономические, финансовые, политические, технологические, информационные, культурные и другие процессы глобализации, имеющие разные механизмы своей реализации и развития. Эти процессы идут с разной скоростью в разных регионах и в разных социальных слоях, порождая, в числе других, социальные контрасты и противоречия. В то же время глобализацию рассматривают как совокупность всех вышеперечисленных процессов.

Так, логика является существенной и необходимой частью интеллектуальной культуры. Поэтому на всех этапах процесса культурной глобализации логика являлась составной компонентой, включенной в этот процесс.

Для анализа противоречий, а также систем, информация о которых не полна, подходит разработанная автором четырехзначная логика со следующими истинностными значениями: истинно и ложно; ложно и неистинно; истинно и ложно; ни истинно и ни ложно (см. в [3]). Далее, для анализа сложной структуры понятия глобализации имеет смысл рассматривать его в многомерном концептуальном пространстве, не упрощая и не сводя это понятие к линейному набору признаков (о концептуальном пространстве семиозиса и его измерениях см. в [4]).

Необходимо также учитывать нечеткость определяемых понятий, изменчивость их предмета во времени. Таким образом, можно констатировать, что имеются значительные трудности в корректном определении понятия "глобализация", а также производных от него понятий. Также трудности, обнаруживаемые при применении принципов семантики и законов логики к анализу и оперированию с этим понятием, показывают, что концепции глобализации еще недостаточно развиты и что к аргументации и к оценкам, основанных на них, следует относиться с осторожностью.

Литература

1. Глобализация // Энциклопедия «Глобалистика». М., 2003.
2. *Зиновьев А.А.* // Глобальный человейник. М., 2003.
3. *Павлов С.А.* Логика ложности FL4 // Труды научно-исследовательского семинара логического центра Института философии РАН. 1993. М., 1994. С. 14-35.
4. *Павлов С.А.* Стратегическая интеллектуальная инициатива // Вестн. Росс. Филос. Общества. № 4. 1998. С. 79-81.
5. *Панарин А.С.* Искушение глобализмом. М. 2000.
6. *Уткин А.И.* Глобализация: процесс и осмысление. М., 2001.
7. *Федотов А.П.* Глобалистика: Начала науки о современном мире М., 2002.
8. *Чумаков А.Н.* Философия глобальных проблем. М., 1994.
9. *Perrot E.* Pencer la mondialization // Recherches de science religieuse. P., 1998. Vol. 86, № 1. P. 15-40.
10. *Robertson R., Knondker H.* Discourses of globalization: Preliminary considerations // International sociology. L., 1999. Vol 13, № 1. P. 25-40.

В.М.Попов, Г.Н.Шуклин

Интуиционистски приемлемая параполная логика[1]

In the paper a propositional logic AAP which is a paracomplete sublogic of of intuitionistic propositional logic is constructed. The semantics of AAP which is a modification of Kripke semantics adequate to the intuitionistic prepositional logic, and a sequential calculus GAAP axiomatizing the AAP logic, are also described. The embeddings of intuitonistic prepositional logic into AAP are defined.

Строится пропозициональная логика AAP, являющаяся параполной подлогикой интуиционистской пропозициональной логики. Описываются семантика логики AAP, представляющая модификацию семантики Крипке, адекватной интуиционистской пропозициональной логике, и секвенциальное исчисление GAAP, аксиоматизирующее логику AAP. Определяются погружения интуиционистской пропозициональной логике в AAP.

Язык L логики AAP есть стандартно определяемый пропозициональный язык над алфавитом $< S, \&, \vee, \supset, \neg\, ,), (>$, где S есть множество $\{s_1, s_2, s_3, \ldots\}$ всех пропозициональных переменных языка L. Определение L-формулы индуктивно: (i) всякая пропозициональная переменная языка L есть L-формула, (ii) если A и B есть L-формулы, то $(A \& B)$, $(A \vee B)$, $(A \supset B)$, $(\neg A)$ есть L-формулы. Элементарной L-формулой называется L-формула, которая является пропозициональной переменной языка L или имеет вид $(\neg p)$, где p – пропозициональная переменная языка L. Термины «формула» и «элементарная формула» используются как сокращения для «L-формула» и «элементарная L-формула» соответственно. Логика AAP есть наименьшее множество формул, которое замкнуто относительно правила подстановки и правила modus ponens , и которому принадлежат: (а) все интуиционистски доказуемые формулы, ни в одну из которых не входит $\neg$, (б) все формулы вида

$(A \supset (\neg (B \supset B))) \supset (\neg A))$,

[1] Работа выполнена при поддержке РГНФ, грант № 02-03-11819 а.

где A и B есть формулы и при этом A не есть пропозициональная перемеменная языка L, (в) все формулы вида $(C \supset ((\neg C) \supset D))$, где C и D есть формулы. AAP – теорией называется множество формул, включающее AAP и замкнутое относительно правила modus ponens. Полной AAP-теорией называется такая AAP-теорию T, что для всякой

формулы A верно, что $A \in T$ или $(\neg A) \in T$. Неполной AAP-теорией называется AAP-теория, не являющаяся полной AAP-теорией. Параполной AAP-теорией называется такая неполная AAP-теория T, что всякая полная AAP-теория, включающая T, равна множеству всех формул.

Теорема 1. (о параполноте логики AAP)

Существует параполная AAP – теория.

AAP-моделью называется упорядоченная тройка $< G, R, \models >$, где G есть непустое множество, R есть рефлексивное и транзитивное бинарное отношение на G, $\models$ есть подмножество множества $G \times \{A \mid A$ есть формула$\}$, и выполняются следующие условия: (1) для всякой элементарной формулы e и всяких α и β из G верно, что если$\alpha \models e$ и $\alpha R \beta$, то $\beta \models e$, (2) для всяких форму A и B, всякой формулы C, не являющейся пропозициональной переменной языка L , всякой пропозициональной переменной p языка L и всякого α из G верно, что

(2.1) $\alpha \models (A \,\&\, B)$ т.т.т. $\alpha \models A$ и $\alpha \models B$,
(2.2) $\alpha \models (A \vee B)$ т.т.т. $\alpha \models A$ или $\alpha \models B$,
(2.3) $\alpha \models (A \supset B)$ т.т.т. для всякого β из G верно, что если $\alpha R \beta$ и $\beta \models A$,то $\beta \models B$,
(2.4) $\alpha \models (\neg C)$ т.т.т. для всякого β из G верно, что если $\alpha R \beta$, то неверно, что $\alpha \models C$,
(2.5) если $\alpha \models (\neg p)$, то для всякого β из G $\alpha R \beta$ влечет, что $\beta \models p$ неверно.

Формула A называется общезначимой в AAP – модели $<G, R, \models>$, если всякий α из G таков, что $\alpha \models A$.

Теорема 2. Для всякой формулы A выполняется следующее условие: $A \in AAP$ т.т.т. A общезначимо во всякой AAP-модели.

Секвенциальное исчисление GAAP является секвенциальным исчислением генценовского типа. Формулировка исчисления GAAP получается из предложенной в [1] формулировки исчисления GI интуиционистской логики предикатов первого порядка исключением правил для кванторов (с соответствующей модификацией языка) и заменой правила $A, \Gamma \to \Delta \,/\, \Gamma \to \Delta, (\neg A)$введения негации справа правилом $B, \Gamma \to \Delta \,/\, \Gamma \to \Delta, (\neg B)$ограниченного введения негации справа: B не является пропозициональной переменной языка L. Выводы в GAAPстроятся обычным для генценовских секвенциальных исчислений способом. Теорема об устранимости сечения и нижеследующие теоремы 3 и 4 доказаны с использованием методов работы [1].

Теорема 3. Для всякой формулы A выполняется условие: A Є AAP т.т.т. секвенция → A выводима в GAAP.

Теорема 4. Исчисление GAAP разрешимо.

Следствием теоремы 3 и 4 является теорема 5.

Теорема 5. Логики AAP разрешима.

Следует обратить внимание на то, что логика AAP не имеет конечной характеристической матрицы. Доказательство несуществования конечной характеристической матрицы для AAP аналогично известному геделевскому доказательству несуществования конечной характеристической матрицы для интуиционистской пропозициональной логики.

Связь логики AAP с интуиционистской пропозициональной логикой IntP (язык логики IntP есть L) устанавливается следующими теоремами 6 и 7.

Теорема 6. Пусть ϕ есть вычислимое отображение множества всех пропозициональных переменных языка L во множество всех формул, удовлетворяющее следующим условиям: (1) $\phi(p)$ не есть пропозициональная переменная языка L ни для какой пропозициональной переменной p языка L, (2) для всякой пропозициональной переменной p языка L формулы $(p \supset \phi(p))$ и $(\phi(p) \supset p)$ принадлежат логике AAP. Пусть h_ϕ есть такое отображение множества всех формул в само это множество, что для всякой пропозициональной переменной p языка L и всяких формул B и C выполняются следующие условия:

(a) $h_\phi(p) = \phi(p)$,
(в) $h_\phi((B \bullet C)) = (h_\phi(B) \bullet h_\phi(C))$, где $\bullet \in \{\&, \vee, \supset\}$,
(c) $h_\phi((\neg B)) = (\neg h_\phi(B))$.

Тогда для всякой формулы A: $A \in IntP$ т.т.т. $h_\phi(A) \in AAP$.

Например, определив для всякой пропозициональной переменной p языка L $\phi(p)$ как $(p \,\&\, p)$ (или как $(p \vee p)$), получаем отображение h_ϕ, погружающее логику IntP в AAP.

Теорема 7. Пусть g есть такое отображение множества всех формул в само это множество, что для всякой пропозициональной переменной p языка L и всяких формул B и C выполняются следующие условия:

(I) $g(p) = p$,

(II) $g((B \bullet C)) = (g(B) \bullet g(C))$, где $\bullet \in \{\&, v, \supset\}$,

(III) $g((\neg B)) = (g(B) \supset (\neg (s_1 \supset s_1)))$.

Тогда для всякой формулы A: $A \in IntP$ т.т.т. $g(A) \in IntP$.

Используя теорему 7, можно доказать, что для всякой формулы A такой, что всякое вхождение $\neg$ в A есть вхождение в формулу $(\neg (s_1 \supset s_1))$, верно следующее: $A \in IntP$ т.т.т. $A \in AAP$.

Литература

1. *Генцен Г.* Исследования логических выводов // Математическая теория логического вывода. М., 1967. С. 9–74.
2. *Драгалин А.Г.* Математический интуиционизм. Введение в теорию доказательств. М., 1979.

Я.В.Рязанцев

Базовая операция в трехзначной логике Юрьева[1]

The article presents a logical operation which has properties of a truly base operation in Iouriev's three-value logic. It is an analog to Pearse's arrow (OR-NOT) in Boolean logic. The formulae for calculating the basic operations of Iouriev's logic such as negation, alternation, conjunction, strong alternation making use of the new operation are shown The existence of a truly base logical operation is crucial for engineering of microelectronic computing devices based on three-value logic. It has been shown that the AND-NOT operation, which is an analog of Sheffer's stroke, is not a base operation.

В булевой логике имеются операции, называемые базовыми, обладающие тем свойством, что через них можно выразить все остальные операции. Это штрих Шеффера – логическая операция И-НЕ (обозначается как A|B), которая введена Г. Шеффером в 1913 г. и имеет следующую таблицу истинности:

$$A|B = \sim(A \vee B) \tag{1}$$

A	B	A|B
1	1	0
1	0	1
0	1	1
0	0	1

Стрелка Пирса – логическая операция ИЛИ-НЕ (обозначается как A↓B), которая введена Ч.Пирсом в конце 19 в. Имеет следующую таблицу истинности:

$$A \downarrow B = \sim(A \& B) \tag{2}$$

[1] Работа поддержана грантом РФФИ, № 04-06-80167.

A	B	$A \downarrow B$
1	1	0
1	0	0
0	1	0
0	0	1

Например, в булевой логике действуют следующие соотношения:

отрицание

$$\sim A = A|A \qquad (3)$$

$$\sim A = A \downarrow A \qquad (4);$$

конъюнкция

$$A\&B = (A \downarrow A) \downarrow (B \downarrow B) \qquad (5)$$

$$A\&B = (A|A)|(B|B) \qquad (6);$$

дизъюнкция

$$A \vee B = (A|B)|(A|B) \qquad (7)$$

$$A \vee B = (A \downarrow B) \downarrow (A \downarrow B) \qquad (8).$$

Д.Н. Юрьевым в 1999 г. в результате исследований моделей биологических нейронов была предложена [1] новая трехзначная логика I_3 , которую определяют следующие таблицы истинности операций (далее все обозначения операций и операндов относятся к трехзначной логике):

отрицание (НЕ)

A	~A
-1	1
0	0
1	-1

дизъюнкция (ИЛИ)

A∨B	-1	0	1
-1	-1	-1	0
0	-1	0	1
1	0	1	1

конъюнкция (И)

A&B	-1	0	1
-1	-1	0	0
0	0	0	0
1	0	0	1

сильная дизъюнкция (Исключающее ИЛИ)

A•B	-1	0	1
-1	0	-1	0
0	-1	0	1
1	0	1	0

Однако данные операции не являются истинно базовыми в логике Юрьева, а могут лишь в различном сочетании образовывать базовые наборы логических операций [2].

Представляет интерес вопрос: существуют ли в логике Юрьева истинно базовые операции? Ответ на него имеет существенное значение при проектировании микроэлектронных устройств, работающих на трехзначной логике Юрьева.

По аналогии с булевой логикой, обозначим трехзначную операцию ИЛИ-НЕ стрелкой:

$$A \downarrow B = \sim (A \vee B) \qquad (9)$$

Для новой операции вычислим таблицу истинности:

A↓B	**-1**	**0**	**1**
-1	1	1	0
0	1	0	-1
1	0	-1	-1

По аналогии с выводом операций отрицания и дизъюнкции в булевой логике с помощью стрелки Пирса, покажем, что из трехзначного ИЛИ-НЕ также можно получить операции отрицания и дизъюнкции логики I_3:

$$\sim A = A \downarrow A \qquad (10),$$

$$A \vee B = (\sim A) \downarrow (\sim B) = (A \downarrow A) \downarrow (B \downarrow B) \qquad (11).$$

Другое выражение той же операции (11):

$$A \vee B = (A \downarrow B) \downarrow (A \downarrow B) \qquad (12).$$

Операция отрицания сильной дизъюнкции выражается следующим образом:

$$\sim (A \bullet B) = (A \downarrow (A \downarrow B)) \downarrow (B \downarrow (A \downarrow B)) \qquad (13)$$

и имеет следующую таблицу истинности:

~ (A•B)	**-1**	**0**	**1**
-1	0	1	0
0	1	0	-1
1	0	-1	0

Тогда, операция сильной дизъюнкции выражается через (9) следующим образом:

$$A \bullet B = \sim (\sim A \bullet B)) =$$

$$= ((A \downarrow (A \downarrow B)) \downarrow (B \downarrow (A \downarrow B))) \downarrow ((A \downarrow (A \downarrow B)) \downarrow (B \downarrow (A \downarrow B))) \qquad (14)$$

Операция конъюнкции выражается через формулу (14):

$$A \& B = (A \downarrow B) \downarrow (A \bullet B) =$$

$$= (A \downarrow B) \downarrow ((A \downarrow (A \downarrow B)) \downarrow (B \downarrow (A \downarrow B))) \downarrow ((A \downarrow (A \downarrow B)) \downarrow (B \downarrow (A \downarrow B))) \quad (15)$$

Таким образом, показано, что через операцию (9) можно выразить все основные логические операции трехзначной логики Юрьева, то есть, эта операция является истинно базовой.

Другими словами, с помощью единственной операции (9) – аналога булевой стрелки Пирса - можно вычислить любые выражения логики I_3.

Аналог булевого штриха Шеффера в логике Юрьева имеет следующую таблицу истинности:

$$A|B = \sim (A\&B) \qquad (16)$$

A|B	-1	0	1
-1	1	0	0
0	0	0	0
1	0	0	-1

Выражение операции отрицания с помощью операции (16):

$$\sim A = A|A \qquad (17)$$

конъюнкция:

$$A\&B = (A|B)|(A|B) \qquad (18)$$

$$A\&B = (A|A)|(B|B) \qquad (19).$$

Операцию дизъюнкции выразить через операцию (16) невозможно, ввиду доминирования нулей в таблице истинности этой операции – если один из операндов принимает значение «ноль», то каким бы ни было значение второго операнда, результат всегда будет равен нулю, что противоречит свойствам дизъюнкции. Это позволяет сделать вывод о том, что операция (16) – аналог штриха Шеффера в логике Юрьева – не является истинно базовой операцией.

Приведем формулы и таблицы истинности для некоторых операций, выраженных через операции (9) и (16):

Операция «сильного противодействия»:

$$A>>B = A|(\sim B) = A|(B|B) \qquad (20)$$

A>>B	-1	0	1
-1	0	0	1
0	0	0	0
1	-1	0	0

Операция «слабого противодействия»:

$$A>B = A\downarrow(\sim B) = A\downarrow(B\downarrow B) \qquad (21)$$

A>B	-1	0	1
-1	0	1	1
0	-1	0	1
1	-1	-1	0

Наличие истинно базовой логической операции имеет существенное значение при проектировании микроэлектронных вычислительных устройств на базе трехзначной логики.

Литература

1. *Юрьев Д.Н.* Применение трехзначных таблиц истинности к работе формального нейрона // Компьютерные технологии в науке, производстве, социальных и экономических процессах. Материалы междунар. Научно-практ. конф.. Ч. 6. Новочеркасск, 2000.
2. *Юрьев Д.Н.* Новая трехзначная логика // Труды научно-исследовательского семинара Логического центра Института философии РАН. Вып. XV. М. 2001.

А.В. Чагров, Л.А. Чагрова

Об алгоритмической проблеме пропозициональной определимости формул первого порядка в семантике формальной логики А.Виссера[1]

A classical predicate first-order formula φ is propositionally definable (on a class of frames C) if there exists a propositional formula ψ such that, for any frame F (from the class C), $F \models \varphi$ if and only if $F \models \psi$. The main results are: the problem of propositional definability (on the class of frames of Visser's formal logic) of first-order formulas is undecidable. Some closed problems are discussed.

Хотя логика, о которой идёт речь в данной работе, была введена А. Виссером в статье [6] 1981 года, активное изучение формальной, как назвал её сам автор (название, звучащее в заголовке [6] представляется более подходящим, хотя и более длинным), по сути началось лишь к середине 90-х годов, да и то ввиду её близости к базисной логике из той же статьи (это название тоже не вполне удачно, но более подходящих названий до сих пор не предложено). Небольшой экскурс в происхождение этих логических исследований читатель может найти в [1] и [5]. Здесь же нас будут интересовать некоторые семантические проблемы, связанные с формальной, в первую очередь, логикой, хотя некоторые замечания будут касать и базисной, и интуиционистской пропозициональными логик, а также модальных. Для удобства читателя мы постараемся сделать изложение в части, касающейся именно базисной и формальной логик, замкнутым в себе, дав необходимый минимум определений. При этом полагаем, что читатель хотя бы немного знаком с аппаратом (семантическим, прежде всего) модальных и суперинтуиционистских логик (отошлём по этому поводу, например, к книге [4]), не говоря уж о классической логике первого порядка.

Итак, язык базисной и формальной логик А. Виссера (далее для краткости говорим просто о базисной и формальной логиках) определяется точно так же как язык интуиционистской и супер-

---

[1] Работа выполнен при поддержке гранта РФФИ 03-06-80115.

интуиционистских логик, то есть формулы строятся из пропозициональных переменных p, q, r, ... (с индексами в случае необходимости) и константы $\bot$ («ложь») с помощью пропозициональных связок $\wedge$ (конъюнкция), $\vee$ (дизъюнкция) и $\to$ (импликация). Отрицание $\neg$ вводится как сокращение: $\neg\varphi = \varphi \to \bot$.

Семантические понятия аналогичны используемым для интуиционистских формул за исключением требования рефлексивности в реляционных моделях и шкалах Крипке, которое отменяется в случае базисной логики, а в случае формальной логики заменяется на иррефлексивность и отсутствие бесконечных возрастающих цепей. Дадим полные определения; отметим, что определения семантических в [6] даются в несколько иной, но эквивалентной форме.

Шкалой Крипке называем в этой статье пару $F = \langle W,R \rangle$, где W — непустое множество (миров), R — транзитивное, антисимметричное бинарное отношение (достижимости) на W, то есть для F справедливы условия $\forall x \forall y \forall z(xRy \ \& \ yRz \Rightarrow yRz)$ и $\forall x \forall y \forall z(xRy \ \& \ yRx \Rightarrow x = y)$. Оценкой на шкале $F = \langle W,R \rangle$ называем функцию V, сопоставляющую каждой переменной p наследственное множество в этой шкале, то есть такое множество $V(p)$, для которого из того, что $x \in V(p)$ и xRy, следует, что $y \in V(p)$. Шкалу с заданной на ней оценкой называем моделью, то есть модель – это пара $M = \langle F,V \rangle$, где F – шкала, а V – оценка на F. Истинность формулы φ в мире w модели M (символически, $\langle M,w \rangle \models \varphi$) определяется дословно также, как в случае интуиционистской логики:

$\langle M,w \rangle \models p$, если $w \in V(p)$;

условие $\langle M,w \rangle \models \bot$ не выполняется никогда;

$\langle M,w \rangle \models \varphi \wedge \psi$, если $\langle M,w \rangle \models \varphi$ и $\langle M,w \rangle \models \psi$;

$\langle M,w \rangle \models \varphi \vee \psi$, если $\langle M,w \rangle \models \varphi$ или $\langle M,w \rangle \models \psi$;

$\langle M,w \rangle \models \varphi \to \psi$, если для всякого мира w', такого что wRw', из условия $\langle M,w' \rangle \models \varphi$ следует условие $\langle M,w' \rangle \models \psi$.

Говорим, что формула φ истинна в шкале F (символически, $F \models \varphi$), если φ истинна в любой точке всякой модели, заданной на шкале F.

Теперь мы можем определить базисную и формальную логики. Хотя в [6] эти логики задаются аксиоматически, доказанные там теоремы о полноте позволяют базисную логику **BPL** и формальную логику **FPL** определить, как множество формул, истинных во всех шкалах, и как множество формул, истинных во всех конечных иррефлексивных шкалах, соответственно. Уточним, что иррефлексивность есть выполнение условия $\forall x \sim xRx$. Для полноты картины напомним, что интуиционистская логика может быть задана как множество формул, истинных во всех рефлексивных шкалах, и как множество формул, истинных во всех конечных рефлексивных шкалах.

Обратим внимание, что шкалы можно рассматривать как модели для замкнутых классических (по отношению к определению истинности) формул первого порядка в сигнатуре из одного бинарного отношения (то есть отношения достижимости R) и равенства. Собственно, выше мы уже использовали для описания свойств шкал в семантических определениях формулы первого порядка, применяя для них иную символику, нежели для формул базисной логики. Будем в дальнейшем использовать символическую запись $F \vDash \varphi$ и для случая, когда формула φ является формулой первого порядка. Для удобства формулировок формулы, которые мы имели в виду в предыдущих абзацах, то есть формулы из языка базисной, формальной и интуиционистской логик будем называть пропозициональными, а классические формулы первого порядка – первопорядковыми.

Говорим, что пропозициональная формула φ и первопорядковая формула ψ эквивалентны на классе шкал C логики (на классе шкал логики L или, другими словами, в семантике логики L), если для любой шкалы F из этого класса условия $F \vDash \varphi$ и $F \vDash \psi$ равносильны. В этом случае говорим также, что φ является пропозициональным эквивалентом ψ, а ψ является первопорядковым эквивалентом φ на этом классе шкал. Формулу первого порядка называем пропозиционально определимой на данном классе шкал, если существует ее пропозициональный эквивалент на этом классе; пропозициональную формулу называем первопорядково определимой на данном классе шкал, если существует ее первопорядковый эквивалент на этом классе.

Приведём примеры.

Прежде всего, транзитивность и антисимметричность шкал тривиально пропозиционально определимы, поскольку входят в определение шкал – каждая из них пропозиционально определима формулой $p \to p$, например. Ни рефлексивность (то есть формула $\forall x\; xRx$), ни иррефлексивность пропозиционально определимыми не являются. Покажем это сходными рассуждениями.

Допустим, что рефлексивность (то есть формула $\forall x\; xRx$) пропозиционально определима пропозициональной формулой φ. По своему выбору φ должна быть истинна в шкале $\langle W_1, R_1 \rangle$, где

W_1 есть множество целых чисел, а R_1 – обычное числовое отношение нестрогого неравенства $\leq$, и φ должна опровергаться в шкале $\langle W_2,R_2\rangle$, где W_2 – множество рациональных чисел, а R_2 – обычное числовое отношение строгого неравенства $<$. Однако множества истинных пропозициональных формул одинаковы для этих шкал: и шкала $\langle W_1,R_1\rangle$, и шкала $\langle W_2,R_2\rangle$ определяют суперинтуиционистскую логику, образно названную А.В. Кузнецовым цепной логикой (другое название – логика Даммета), то есть результат добавления к интуиционистской логике аксиомы $(p \to q) \vee (q \to p)$. Получили противоречие, которое показывает, что допущенное нами неверно, то есть пропозициональной формулы, эквивалентной формуле $\forall x\, xRx$ не существвет.

Теперь допустим, что иррефлексивность (то есть формула $\forall x \sim xRx$) пропозиционально определима пропозициональной формулой φ. Вновь воспользовавшись шкалами $\langle W_1,R_1\rangle$ и $\langle W_2,R_2\rangle$ из предыдущего абзаца, замечаем, что пропозициональная формула φ должна быть либо одновременно истинна в этих шкалах, либо одновременно опровержимой, хотя одна из них рефлексивна (то есть иррефлексивной не является, по крайней мере), а другая иррефлексивна. Получили противоречие с выбором φ. Значит, желаемой пропозициональной формулы φ не существует.

Чтобы у читателя, привыкшего к тому, что в качестве шкал интуиционистской логики рассматриваются рефлексивные шкалы в то время как мы в приведенном рассуждении использовали для описания одной из суперинтуиционистских логик иррефлексивную шкалу $\langle W_2,R_2\rangle$, отметим, что это (то есть наложение требования рефлексивности в интуиционистских шкалах) делается для того, чтобы в них была истинна принадлежащая интуиционистской логике формула $p \to (q \to p)$. Тем не менее, эта формула не эквивалентна рефлексивности. Легко показать, что ее первопорядковым эквивалентом является более слабая формула $\forall x \forall y \forall z(xRy \mathbin{\&} yRz \Rightarrow \exists u(yRu \mathbin{\&} uRz))$.

Итак, существуют формулы первого порядка, которые пропозиционально определимы, и существуют формулы первого порядка, которые пропозиционально определимыми не являются.

Собственно, наличие условий первого порядка, которые по-разному соотносятся с пропозициональными формулами, известны давно, и не только по отношению к рассматриваемым здесь пропозициональным формулам, но и к модальным, например, или при рассмотрении традиционных интуиционистских, то есть рефлексивных, шкал. Более того, в [2] в качестве одного из результатов была получена неразрешимость пропозициональной определимости формул первого порядка на интуиционистских (рефлексивных) шкалах, то есть *отсутствие алгоритма, который по формуле первого порядка давал бы ответ на вопрос о пропозициональной определимости этой формулы на классе рефлексивных шкал*. Кроме того, там же была доказана неразрешимость проблемы соответствия на интуиционистских шкалах: *не существует алгоритма, который по пропозициональной и первопорядковой формулам давал бы ответ на вопрос об их эквивалентности на классе рефлексивных шкал*. В качестве следствия мгновенно получаются аналогичные результаты для шкал базисной логики **BPL**, а используя обычные погружения интуиционистской логики в модальные можно модифицировать доказательства [2] и для случая модальных формул.

Однако и приведенные примеры, и отмеченные результаты [2] относятся к классам шкал, которые сами являются первопорядково определимыми, то есть описываются условиями, выражаемыми формулами первого порядка. Для формальной логики **FPL** ситуация совершенно иная. Прежде всего, мы вслед за А. Виссером семантически определили **FPL** классом <u>конечных</u> иррефлексивных шкал, а условие конечности не описывается формулами первого порядка. Несложно доказать, что **FPL** вообще невозможно задать хоть каким-нибудь классом шкал, который бы описывался условиями, выражаемыми первопорядковыми формулами.

Если рассмотреть весь класс шкал логики **FPL**, то есть совокупность всех шкал, в которых истинны формулы, принадлежащие **FPL**, то этот класс описывается условием обрыва бесконечных цепей вида $x_1Rx_2Rx_3Rx_4$... (здесь x_1, x_2, x_3, x_4... не обязательно различны). Легко заметить, что в случае конечности это условие эквивалентно иррефлексивности. Для интересующегося деталями читателя укажем, что «ответственность» за эти свойства шкал несёт принадлежащая **FPL** формула (аналог модальной формулы Лёба) $(((\bot \to \bot) \to p) \to p) \to ((\bot \to \bot) \to p)$.

Так вот, полученные в [2] результаты на случай шкал **FPL** не переносятся автоматически. Следует заметить, что доказательства неразрешимости пропозициональной определимости и проблемы соответствия в [2] являются побочным продуктом рассмотрения в определенном смысле противоположной проблемы – проблемы первопоряковой определимости, которая технически более сложна, а кроме того, и не является целью рассмотрения в данной работе. Поэтому естественной представляется задача поиска доказательства неразрешимости пропозициональной определимости первопорядковых формул в классе шкал логики **FPL**, не зависящее от конструкций, непосредственно использованных в [2]. (Справедливости ради следовало бы здесь сказать и о задаче поиска доказательства разрешимости этой проблемы, априори допустив саму возможность такого положительного решения, но при написании данного текста мы, разумеется, уже знаем, какое направление поиска следовало выбрать.)

Теорема 1. *Проблема пропозициональной определимости формул первого порядка в семантике Крипке формальной логики А. Виссера* **FPL** *алгоритмически неразрешима.*

Доказательство теоремы 1, хотя и проще доказательств [2], всё ж таки здесь опускается по причине большого объёма. В качестве самых общих соображений укажем, что мы строим эффективную последовательность первопорядковых формул, каждая из которых либо не является пропозиционально определимой, либо тождественно ложна, а потому пропозиционально определима, например, константой $\bot$, причем не существует алгоритма, позволяющего выяснить, какая из альтернатив выполняется. Это доказательство, тем самым, попутно обосновывает ещё два следующих утверждения. Подчеркнём, что все три теоремы независимы друг от друга в том смысле, что не являются следствиями друг друга; по крайней мере, мы не знаем никаких рассуждений, дающих хотя бы одну из них в предположении, что остальные справедливы, да так, чтобы это предположение использовалось по существу.

Теорема 2. *Проблема соответствия пропозициональных формул и формул первого порядка в семантике Крипке формальной логики А. Виссера* **FPL** *алгоритмически неразрешима.*

Теорема 3. *Проблема пропозициональной определимости формул первого порядка константными пропозициональными формулами в семантике Крипке формальной логики А. Виссера* **FPL** *алгоритмически неразрешима.*

Конечно, можно было бы по аналогии с теоремой 3 сформулировать еще одно утверждение: *проблема пропозициональной определимости формул первого порядка пропозициональной константой $\bot$ в семантике Крипке формальной логики А. Виссера* **FPL** *алгоритмически неразрешима.*. Однако легко понять, что это ничто иное как теорема Чёрча о неразрешимости логики предикатов (разумеется, её усиленный вариант – для сигнатуры из одного бинарного отношения и равенства, но он тоже хорошо известен): замкнутая формула тождественно ложна тогда и только тогда, когда её отрицание тождественно истинно. Тем не менее, наше доказательство теоремы 1 даёт в качестве побочного результата следующее утверждение, непосредственно из формулировки теоремы Чёрча не получающееся: *множество формул первого порядка, не являющихся пропозиционально определимыми, и множество тождественно ложных формул первого порядка не являются рекурсивно отделимыми.* (Напомним, что множества A и B называются рекурсивно отделимыми, если существует такое разрешимое множество C, что A включается в C, а B – в дополнение C.) Мы не выделяем это утверждение в качестве теоремы в данной статье, поскольку основной вид алгоритмических проблем, которые нас интересуют, – это вопросы о разрешимости свойств формул. Тем не менее, отметим, что наши доказательства всех теорем данной статьи позволяют переформулировать полученные теоремы в виде отсутствия рекурсивной отделимости некоторых множеств (или, что практически то же самое, свойств) формул.

Теорема 4. *Множество формул первого порядка, которые пропозиционально определимы в семантике Крипке формальной логики А. Виссера* **FPL** *формулами от n переменных, но не определимы пропозициональными в семантике Крипке формальной логики А. Виссера* **FPL** *формулами от меньшего числа переменных, алгоритмически неразрешимо.*

Доказательство этой теоремы несколько иное, хотя и близкое по технике: вместо пропозициональной константы $\perp$ участвуют пропозициональные формулы от n переменных, которые не эквивалентны пропозициональным формулам от меньшего числа переменных. Наконец, еще одна модификация, теперь уж модификация доказательств всех предыдущих результатов, даёт следующие теоремы. Уточним, что здесь модификация по духу такая же, как та, которую можно использовать при изменении доказательства теоремы Чёрча с целью получения доказательства теоремы Трахтенброта. Аналогичный приём был использован нами в [3], где не рассматривалась, правда, определимость формул первого порядка, а, как и в [2], там в центре внимания была более технически сложная алгоритмическая проблема первопорядковой определимости.

Теорема 5. *Проблема пропозициональной определимости формул первого порядка на классе конечных шкал формальной логики А. Виссера* **FPL** *алгоритмически неразрешима.*

Теорема 6. *Проблема соответствия пропозициональных формул и формул первого порядка на классе конечных шкал формальной логики А. Виссера* **FPL** *алгоритмически неразрешима.*

Теорема 7. *Проблема пропозициональной определимости формул первого порядка константными пропозициональными формулами на классе конечных шкал формальной логики А. Виссера* **FPL** *алгоритмически неразрешима..*

Теорема 8. *Множество формул первого порядка, которые пропозиционально определимы на классе конечных шкал формальной логики А. Виссера* **FPL** *формулами от n переменных, но не определимы пропозициональными на классе конечных шкал формальной логики А. Виссера* **FPL** *формулами от меньшего числа переменных, алгоритмически неразрешимо.*

В заключение сформулируем одно из направлений дальнейших исследований, связанное с тематикой данной статьи, упомянутое, впрочем, нами уже неоднократно. Это алгоритмическая проблема первопорядковой определимости. Как было уже отмечено, пропозициональная формула $(((\bot \to \bot) \to p) \to p) \to ((\bot \to \bot) \to p)$ не имеет первопорядковых эквивалентов на классе шкал базисной логики (то есть на классе всех рассматриваемых в данной работе шкал), в то время как некоторые другие пропозициональные формулы первопорядковые эквивалентны имеют. Любопытно, что эта формула имеет первопорядковый эквивалент на классе шкал, в которых истинны интуиционистские формулы (то есть справедливо условие $\forall x \forall y \forall z(xRy \;\&\; yRz \Rightarrow \exists u(yRu \;\&\; uRz)))$, и на классе традиционных интуиционистских (то есть рефлексивных) шкал, поскольку ни в одной шкале она не истинна, а стало быть эквивалентна условию первого порядка $\sim \forall x\, x{=}x$ (как впрочем, и любой другой тождественно ложной формуле).

Можно ли алгоритмически решать вопрос о первопорядковой определимости пропозициональных формул на классе всех шкал? Ответ не следует из основного результата [2], поскольку, как мы заметили выше рефлексивность не является пропозиционально определимым свойством, а в [2] рассматривались традиционные интуиционистские шкалы, то есть заведомо рефлексивные. Однако доказательство [2], повторенное практически дословно даёт таки отрицательный ответ, то есть справедлива

Теорема 9. *Проблема первопорядковой определимости пропозициональных формул первого порядка в семантике Крипке базисной логики А. Виссера* **BPL** *алгоритмически неразрешима.*

Однако для случая формальной логики такое перенесение доказательств не проходит, и мы оставляем вопрос об аналоге теоремы 9 для случая логики **FPL** открытым.

Литература

1. *Чагров А.В.* Формальная пропозициональная логика А. Виссера и её расширения // Логические исследования. Вып. 10. М., 2003. С. 204–211.
2. *Чагрова Л.А.* О проблеме определимости пропозициональных формул интуиционистской логики формулами классической логики первого порядка. Дисс. канд. физ.-мат. наук. Калинин, 1989.
3. *Chagrov A.V., Chagrova L.A.* Algorithmic problems concerning first-order definability of modal formulas on the class of all finite frames // Studia Logica. 1995. Vol. 55, No 3. P. 421–448.
4. *Chagrov A.V., Zakharyaschev M.V.* Modal Logic. Oxford University Press, 1997.
5. *Suzuki Y., Wolter F., and Zakharyaschev M.* Speaking about transitive frames in propositional languages // Journal of Logic, Language, and Information. Vol. 7. 1998. P. 317–339.
6. *Visser A.* A propositional logic with explicit fixed points // Studia Logica. Vol. 40. 1981. P. 155–175.

Логика групп[1]

Def1. *Язык*

1. p, q, r… $\in$ Var - множество пропозициональных переменных;
2. $\to$ - логическая связка;
3. (,) - скобки.

Def2. *Формулы* **FG**

1. Var$\subseteq$**FG**;
2. Если A, B $\in$**FG**, то $(A\to B)\in$**FG**;
3. Ничто другое формулой не является.

Def3. *Группа* **G** = <M,+,-,0>, где $0\in M$, + - бинарная, а - - унарная операции, для которых выполняются следующие постулаты:

1. $x+(y+z) = (x+y)+z$
2. $0+x = x$
3. $-x+x = 0$

Лемма 1. Во всякой группе имеют место следующие равенства:

1. $x+0 = x$
2. $--x = x$
3. $x+(-x) = -x+x$
4. $-(x+y) = -y+-x$

Определим интерпретацию формул в группах.

Пусть **G** – произвольная группа, а $Val=M^{Var}$ - множество всех приписываний значений пропозициональным переменным.

Распространим Val на множество всех формул.

Def4. $v(A\to B) = -v(A)+v(B)$ для $v\in Val$

Def5. Формула A *общезначима* ($\models A$) е. и т.е. для всех групп **G** и для всех $v\in Val$ имеет место $v(A)=0$.

Def6. $\neg A = A\to(A\to A)$

Аксиомы логики групп

A1. $(A\to B)\to((C\to A)\to(C\to B))$
A2. $(A\to A)\to(B\to B)$

[1] Работа поддержана РФФИ, грант № 04-03-002660

A3. $A \to \neg\neg A$
A4. $\neg\neg A \to A$
A5. $(A \to B) \to \neg(B \to A)$
A6. $\neg(B \to A) \to (A \to B)$

R1. $A, A \to B \Rightarrow B$
R2. $A \to B \Rightarrow (B \to C) \to (A \to C)$

Def7. *Выводом* из множества гипотез Г формулы A будем называть непустую конечную последовательность формул $A_1, \ldots, A_n$, такую, что $n \geq 1$, $A_n = A$ и для всякой формулы A_i $(1 \leq i \leq n)$ справедливо, что она либо элемент множества Г, либо аксиома логики, либо получена из предшествующих формул по одному из правил вывода.

Посредством $\Gamma|\text{-}A$ будем обозначать тот факт, что существует вывод формулы A из множества гипотез Г. Будем говорить, что формула A *доказуема* и является *теоремой* логики ($|\text{-}A$), если множество Г пусто.

Без доказательства будем пользоваться обычными свойствами отношения выводимости.

Теорема непротиворечивости. Все теоремы построенной логики общезначимы.

Достаточно проверить, что для произвольной группы G и произвольного приписывания v все аксиомы принимают значение 0, а правила вывода сохраняют значение 0 от посылок к заключению.

Примем обозначения $v(A) = a$, $v(B) = b$, $v(C) = c$.

A0. $v(\neg A) = v(A \to (A \to A)) = \text{-}v(A)+\text{-}v(A)+v(A) = \text{-}v(A)$
A1. $v((A \to B) \to ((C \to A) \to (C \to B))) = \text{-}v(A \to B)+\text{-}$
$v(C \to A)+v(C \to B) = \text{-}(\text{-}a+b)+\text{-}(\text{-}c+a)+\text{-}c+b =$
$\text{-}b+a+\text{-}a+c+\text{-}c+b = \text{-}b+0+0+b = \text{-}b+b = 0$

A2. $v((A \to A) \to (B \to B) = \text{-}v(A \to A)+v(B \to B) = \text{-}(\text{-}a+a)+\text{-}b+b = a+\text{-}$
$a+\text{-}b+b = 0$
A3. $v(A \to \neg\neg A) = \text{-}v(A)+v(\neg\neg A) = \text{-}a+\text{-}v(\neg A) = \text{-}a+\text{--}a = 0$
A4. $v(\neg\neg A \to A) = \text{-}v(\neg\neg A)+v(A) = \text{--}v(\neg A)+a = \text{---}a+a = \text{-}a+a = 0$
A5. $v((A \to B) \to \neg(B \to A)) = \text{-}v(A \to B)+v(\neg(B \to A)) = \text{-}(\text{-}a+b)+\text{-}$
$v(B \to A) = \text{-}b+\text{--}a+\text{-}(\text{-}b+a) = \text{-}b+a+\text{-}a+\text{--}b = \text{-}b+0+b = \text{-}b+b = 0$
A6. $v(\neg(B \to A) \to (A \to B)) = \text{-}v(\neg(B \to A))+v(A \to B) = \text{--}v(B \to A)+\text{-}$
$a+b = v(B \to A)+\text{-}a+b = \text{-}b+a+\text{-}a+b = 0$

R1.

1. $v(A)=0$	- условие
2. $v(A \to B)=0$	- условие

3. $-v(A)+v(B)=0$ - из 2 по Def4.
4. $v(A)-v(A)+v(B)=v(A)+0$ - из 3.
5. $0+v(B)=v(A)$ - из 4 по Def3.
6. $v(B)=0$ - из 5 по 1 и Def3.

R2.

1. $v(A\to B)=0$ - условие
2. $-v(A)+v(B)=0$ - из 1 по Def4.
3. $-a+b=0$ - из 2.
4. $a+(-a)+b=a+0$ - из 3.
5. $0+b=a$ - из 4 по Def3.
6. $b=a$ - из 5 по Def3.
7. $v((B\to C)\to(A\to C)) = -v(B\to C)+v(A\to C)$ - Def4.
8. $-v(B\to C)+v(A\to C) = -(-b+c)+(-a)+c$ - Def4.
9. $-(-b+c)+(-a)+c = -c+(--b)+(-a)+c$ - лемма 1.
10. $-c+(--b)+(-a)+c = -c+b+(-a)+c$ - лемма 1.
11. $-c+b+(-a)+c = -c+a+(-a)+c$ - из 6.
12. $-c+a+(-a)+c = -c+0+c$ - Def3.
13. $-c+0+c = -c+c = 0$ - Def3.
14. $v((B\to C)\to(A\to C)) = 0$ - из 7 – 13.

Теорема доказана.

Лемма 2. В построенной логике имеют место следующие выводимости:

T1. $A\to B,\ B\to C \vdash A\to C$
T2. $A\to B \vdash \neg B\to\neg A$
T3. $\vdash A\to A$
T4. $A\to B,\ B\to A \vdash F(A)\to F(B)$, где $F(B)$ получена из $F(A)$ заменой нуля или более подформул вида A на B.
T5. $A\to B,\ B\to A,\ F(A) \vdash F(B)$
T6. $F(\neg\neg A) \vdash F(A)$
T7. $F(A) \vdash F(\neg\neg A)$
T8. $\vdash ((A\to B)\to(A\to C))\to(B\to C)$
T9. $\vdash A\to((B\to B)\to A)$
T10. $\vdash ((B\to B)\to A)\to A$
T11. $\vdash (A\to(\neg A\to B))\to B$
T12. $\vdash B\to(A\to(\neg A\to B))$
T13. $\vdash (\neg A\to(\neg B\to C))\to(\neg(\neg A\to B)\to C)$
T14. $\vdash (\neg(\neg A\to B)\to C)\to(\neg A\to(\neg B\to C))$
T15. $\vdash (\neg A\to(B\to B))\to A$
T16. $\vdash A\to(\neg A\to(B\to B))$

Доказательство.

T1.

1. $A \to B$ - гипотеза
2. $B \to C$ - гипотеза
3. $(B \to C) \to ((A \to B) \to (A \to C))$ - A1.
4. $(A \to B) \to (A \to C)$ - из 2, 3 по R1.
5. $A \to C$ - из 1, 4 по R1.

T2.

1. $A \to B$ - гипотеза
2. $(B \to (B \to B)) \to (A \to (B \to B))$ - из 1 по R2.
3. $((B \to B) \to (A \to A)) \to ((A \to (B \to B)) \to (A \to (A \to A)))$ - A1.
4. $(B \to B) \to (A \to A)$ - A2.
5. $(A \to (B \to B)) \to (A \to (A \to A))$ - из 3, 4 по R1.
6. $(B \to (B \to B)) \to (A \to (A \to A))$ - из 2, 5 по T1.
7. $\neg B \to \neg A$ - из 6 по Def6.

T3.

1. $\neg\neg A \to A$ - A4.
2. $A \to \neg\neg A$ - A3.
3. $A \to A$ - из 1, 2 по T1.

T4. Доказательство проводим индукцией по степени формулы F.

1.1 F – пропозициональная переменная и $F \neq A$. Тогда $F(A)=F(B)$ и формула $F(A) \to F(B)$ выводима в силу T3.

1.2. F – пропозициональная переменная и $F=A$. Тогда формула $F(A) \to F(B)$ выводима либо в силу T3, либо как гипотеза.

2. $F=D \to E$. По индуктивному допущению выводимы формулы $D(B) \to D(A)$, $E(A) \to E(B)$. Покажем, что в этом случае будет выводима формула $(D(A) \to E(A)) \to (D(B) \to E(B$.

1. $E(A) \to E(B)$ - инд. доп.
2. $(E(A) \to E(B)) \to ((D(A) \to E(A)) \to (D(A) \to E(B)))$ - A1.
3. $(D(A) \to E(A)) \to (D(A) \to E(B))$ - из 1, 2 по R1.
4. $((D(A) \to E(B)) \to (D(B) \to E(B))) \to ((D(A) \to E(A)) \to (D(B) \to E(B)))$ - из 3 по R2.
5. $D(B) \to D(A)$ - инд. доп.
6. $(D(A) \to E(B)) \to (D(B) \to E(B))$ - из 5 по R2.
7. $(D(A) \to E(A)) \to (D(B) \to E(B))$ - из 4, 6 по R1.

T5.

1. $A \to B$ - гипотеза
2. $B \to A$ - гипотеза
3. $F(A)$ - гипотеза

4. $F(A)\to F(B)$ - из 1, 2 по T4.
5. $F(B)$ - из 3, 4 по R1.

T6.
1. $\neg\neg A\to A$ - A4.
2. $A\to\neg\neg A$ - A3.
3. $F(\neg\neg A)$ - гипотеза
4. $F(A)$ - из 1, 2, 3 по T5.

T7.
1. $\neg\neg A\to A$ - A4.
2. $A\to\neg\neg A$ - A3.
3. $F(A)$ - гипотеза
4. $F(\neg\neg A)$ - из 1, 2, 3 по T5.

T8.
1. $(C\to B)\to((A\to C)\to(A\to B))$ - A1.
2. $\neg((A\to C)\to(A\to B))\to\neg(C\to B)$ - из 1 по T2.
3. $(B\to C)\to\neg(C\to B)$ - A5.
4. $\neg(C\to B)\to(B\to C)$ - A6.
5. $\neg((A\to C)\to(A\to B))\to(B\to C)$ - из 2, 3, 4 по T5.
6. $((A\to B)\to(A\to C))\to\neg((A\to C)\to(A\to B))$ - A5.
7. $\neg((A\to C)\to(A\to B))\to((A\to B)\to(A\to C))$ - A6.
8. $((A\to B)\to(A\to C))\to(B\to C)$ - из 5, 6, 7 по T5.

T9.
1. $\neg A\to\neg A$ - T3.
2. $(A\to(A\to A))\to\neg A$ - из 1 по Def6.
3. $\neg\neg A\to\neg(A\to(A\to A))$ - из 2 по T2.
4. $A\to\neg(A\to(A\to A))$ - из 3 по T6.
5. $((A\to A)\to A))\to\neg(A\to(A\to A))$ - A5.
6. $\neg(A\to(A\to A))\to((A\to A)\to A))$ - A6.
7. $A\to((A\to A)\to A))$ - из 4, 5, 6 по T5.
8. $(A\to A)\to(B\to B)$ - A2.
9. $(B\to B)\to(A\to A)$ - A2.
10. $A\to((B\to B)\to A))$ - из 7, 8, 9 по T5.

T10.
1. $\neg A\to\neg A$ - T3.
2. $\neg A\to(A\to(A\to A))$ - из 1 по Def6.
3. $\neg(A\to(A\to A))\to\neg\neg A$ - из 2 по T2.
4. $\neg(A\to(A\to A))\to A$ - из 3 по T6.
5. $((A\to A)\to A))\to\neg(A\to(A\to A))$ - A5.
6. $\neg(A\to(A\to A))\to((A\to A)\to A))$ - A6.
7. $((A\to A)\to A))\to A$ - из 4, 5, 6 по T5.
8. $(A\to A)\to(B\to B)$ - A2.

9. $(B\to B)\to(A\to A)$ - A2.
10. $((B\to B)\to A))\to A$ - из 7, 8, 9 по T5.

T11.
1. $((A\to A)\to B)\to B$ - T10.
2. $((\neg A\to(A\to A))\to(\neg A\to B))\to((A\to A)\to B)$ - T8.
3. $((A\to A)\to B)\to((\neg A\to(A\to A))\to(\neg A\to B))$ - A1.
4. $((\neg A\to(A\to A))\to(\neg A\to B))\to B$ - из 1, 2, 3 по T5.
5. $(A\to A)\to(\neg A\to\neg A)$ - A2.
6. $(\neg A\to\neg A)\to(A\to A)$ - A2.
7. $((\neg A\to(\neg A\to\neg A))\to(\neg A\to B))\to B$ - из 4, 5, 6 по T5.
8. $(\neg\neg A\to(\neg A\to B))\to B$ - из 7 по Def6.
9. $(A\to(\neg A\to B))\to B$ - из 8 по T6.

T12.
1. $B\to((A\to A)\to B))$ - T9.
2. $((\neg A\to(A\to A))\to(\neg A\to B))\to((A\to A)\to B)$ - T8.
3. $((A\to A)\to B)\to((\neg A\to(A\to A))\to(\neg A\to B))$ - A1.
4. $B\to((\neg A\to(A\to A))\to(\neg A\to B))$ - из 1, 2, 3 по T5.
5. $(A\to A)\to(\neg A\to\neg A)$ - A2.
6. $(\neg A\to\neg A)\to(A\to A)$ - A2.
7. $B\to((\neg A\to(\neg A\to\neg A))\to(\neg A\to B))$ - из 4, 5, 6 по T5.
8. $B\to(\neg\neg A\to(\neg A\to B))$ - из 7 по Def6.
9. $B\to(A\to(\neg A\to B))$ - из 8 по T6.

T13.
1. $(\neg(\neg A\to B)\to C)\to(\neg(\neg A\to B)\to C)$ - T3.
2. $(B\to\neg A)\to\neg(\neg A\to B)$ - A5.
3. $\neg(\neg A\to B)\to(B\to\neg A)$ - A6.
4. $((B\to\neg A)\to C)\to(\neg(\neg A\to B)\to C)$ - из 1, 2, 3 по T5.
5. $C\to(B\to(\neg B\to C))$ - T12.
6. $(B\to(\neg B\to C))\to C$ - T11.
7. $((B\to\neg A)\to(B\to(\neg B\to C)))\to(\neg(\neg A\to B)\to C)$ - из 4, 5, 6 по T5.
8. $((B\to\neg A)\to(B\to(\neg B\to C)))\to(\neg A\to(\neg B\to C))$ - T8.
9. $(\neg A\to(\neg B\to C))\to((B\to\neg A)\to(B\to(\neg B\to C)))$ - A1.
10. $(\neg A\to(\neg B\to C))\to(\neg(\neg A\to B)\to C)$ - из 7, 8, 9 по T5.

T14.
1. $(\neg(\neg A\to B)\to C)\to(\neg(\neg A\to B)\to C)$ - T3.
2. $(B\to\neg A)\to\neg(\neg A\to B)$ - A5.
3. $\neg(\neg A\to B)\to(B\to\neg A)$ - A6.
4. $(\neg(\neg A\to B)\to C)\to((B\to\neg A)\to C)$ - из 1, 2, 3 по T5.
5. $C\to(B\to(\neg B\to C))$ - T12.

6. $(B\to(\neg B\to C))\to C$ - T11.

7. $(\neg(\neg A\to B)\to C)\to((B\to\neg A)\to(B\to(\neg B\to C)))$ - из 4, 5, 6 по T5.

8. $((B\to\neg A)\to(B\to(\neg B\to C)))\to(\neg A\to(\neg B\to C))$ - T8.

9. $(\neg A\to(\neg B\to C))\to((B\to\neg A)\to(B\to(\neg B\to C)))$ - A1.

10. $(\neg(\neg A\to B)\to C)\to(\neg A\to(\neg B\to C))$ - из 7, 8, 9 по T5.

T15.

1. $\neg A\to((B\to B)\to\neg A)$ - T9.
2. $\neg((B\to B)\to\neg A)\to\neg\neg A$ - из 1 по T2.
3. $\neg((B\to B)\to\neg A)\to A$ - из 2 по T6.
4. $(\neg A\to(B\to B))\to\neg((B\to B)\to\neg A)$ - A5.
5. $\neg((B\to B)\to\neg A)\to(\neg A\to(B\to B))$ - A6.
6. $(\neg A\to(B\to B))\to A$ - из 3, 4, 5 по T5.

T16.

1. $((B\to B)\to\neg A))\to\neg A$ - T10.
2. $\neg\neg A\to\neg((B\to B)\to\neg A))$ - из 1 по T2.
3. $A\to\neg((B\to B)\to\neg A))$ - из 2 по T6.
4. $(\neg A\to(B\to B))\to\neg((B\to B)\to\neg A)$ - A5.
5. $\neg((B\to B)\to\neg A)\to(\neg A\to(B\to B))$ - A6.
6. $A\to(\neg A\to(B\to B))$ - из 3, 4, 5 по T5.

Лемма доказана.

Def8. $A\approx_\Gamma B \Leftrightarrow \Gamma\vdash A\to B$ и $\Gamma\vdash B\to A$

Очевидно, что $\approx_\Gamma$ является отношением эквивалентности, т.е. транзитивно, симметрично и рефлексивно.

Def9. $|A|_\Gamma = \{B\mid B\approx_\Gamma A\}$

Определим *алгебру Линденбаума* **GL** для логики групп.

Def10. $\mathbf{GL}/_\Gamma = \langle FG/\approx_\Gamma, +, -, 0\rangle$, где $FG/\approx_\Gamma$ - множество всех классов эквивалентности для формул логики групп. Операции задаются следующими условиями:

1. $|A|_\Gamma+|B|_\Gamma = |\neg A\to B|_\Gamma$
2. $-|A|_\Gamma = |\neg A|_\Gamma$
3. $0 = |A\to A|_\Gamma$

В силу A2 в определении константы 0 не имеет значения, какая конкретная формула A выбрана.

Лемма 3. $\mathbf{GL}/_\Gamma$ является группой.

Для доказательства леммы достаточно показать, что операции алгебры обладают следующими свойствами:

1. $|A|_\Gamma+(|B|_\Gamma+|C|_\Gamma) = (|A|_\Gamma+|B|_\Gamma)+|C|_\Gamma$
2. $|A|_\Gamma+0 = |A|_\Gamma$

3. $|A|_Г+(-|A|_Г) = 0$

Доказательство.

1. $|A|_Г+(|B|_Г+|C|_Г) = |\neg A\to(\neg B\to C)|_Г$ - Def10.
2. $\vdash (\neg A\to(\neg B\to C))\to(\neg(\neg A\to B)\to C)$ - T13.
3. $\vdash (\neg(\neg A\to B)\to C)\to(\neg A\to(\neg B\to C))$ - T14.
4. $(\neg A\to(\neg B\to C)) \approx_Г (\neg(\neg A\to B)\to C)$ - из 2, 3 по Def9.
5. $|\neg A\to(\neg B\to C)|_Г = |\neg(\neg A\to B)\to C|_Г$ - из 4 по Def10.
6. $|\neg(\neg A\to B)\to C|_Г = (|A|_Г+|B|_Г)+|C|_Г$ - Def10.
7. $|A|_Г+(|B|_Г+|C|_Г) = (|A|_Г+|B|_Г)+|C|_Г$ - из 1, 5, 6.

1. $|A|_Г+0 = |A|_Г+|B\to B|_Г = |\neg A\to(B\to B)|_Г$ - Def10.
2. $\vdash (\neg A\to(B\to B))\to A$ - T15.
3. $\vdash A\to(\neg A\to(B\to B))$ - T16.
4. $(\neg A\to(B\to B)) \approx_Г A$ - из 2, 3 по Def9.
5. $|\neg A\to(B\to B)|_Г = |A|_Г$ - из 4 по Def10.
6. $|A|_Г+0 = |A|_Г$ - из 1, 5.

1. $|A|_Г+(-|A|_Г) = |\neg A\to\neg A|_Г = 0$ - Def10.

Лемма доказана.

Лемма 4. Если $\mathbf{GL}/_Г$ – алгебра Линденбаума для логики групп, а $\mathbf{v}$**:Var -> FG/**$\approx_Г$ – функция приписывания значений пропозициональным переменным, задаваемая условием $\mathbf{v}(p)=|p|_Г$, то для любой формулы A будет иметь место $\mathbf{v}(A)=|A|_Г$.

Доказательство проводим индукцией по построению формулы.

$A=B\to C$

1. $v(B) = |B|_Г$ - индуктивное допущение.
2. $v(C) = |C|_Г$ - индуктивное допущение.
3. $v(B\to C) = -v(B)+v(C)$ - Def4.
4. $-v(B) = -|B|_Г$ - из 1.
5. $-|B|_Г = |\neg B|_Г$ - Def10.
6. $-v(B)+v(C) = |\neg B|_Г +|C|_Г$ - из 2, 4, 5.
7. $|\neg B|_Г +|C|_Г = |\neg\neg B\to C|_Г$ - из 6 по Def10.
8. $\vdash (\neg\neg B\to C)\to(B\to C)$ - теорема логики
9. $\vdash (B\to C)\to(\neg\neg B\to C)$ - теорема логики
10. $(B\to C) \approx_Г (\neg\neg B\to C)$ - из 8, 9 по Def8.
11. $|B\to C|_Г = |\neg\neg B\to C|_Г$ - из 10 по Def9.
12. $v(B\to C) = |B\to C|_Г$ - из 3, 6, 7, 11.

Лемма доказана.

Теорема полноты. Всякая общезначимая формула доказуема.

Доказательство.

1. $\models B$	- допущение.
2. $v(B) = 0$	- из 1 по Def5 для всякой группы $\mathbf{G}=<M,+,-,0>$ и всякого приписывания $v\in M^{Var}$
3. $v(B) = \vert A\to A\vert_{\varnothing}$	- из 2 для $\mathbf{GL}/_{\varnothing}= <F/\approx_{\varnothing}, +, -, 0>$ и приписывания $v(p)=\vert p\vert_{\varnothing}$.
4. $\vert A\to A\vert_{\varnothing} = \vert B\vert_{\varnothing}$	- из 3 по лемме 4.
5. $(A\to A) \approx_{\varnothing} B$	- из 4 по Def9.
6. $\vdash (A\to A)\to B$	- из 5 по Def8.
7. $\vdash B$	- из 6 и T3 по R1.

Теорема доказана.

Выразимость классических операторов min и max посредством операторов логики I_3, расширенной константой 1, и некоторые вопросы их практического применения[1]

In an article of A.S. Karpenko [1] interrelation of logic I_3 [2] with Kleene's algebra through interval logics $\mathbf{QK_3}$ and $\mathbf{AQK_3}$ established. In an article [3] impossibility of expression of classical operators *min* and *max* through operators of I_3 were proved. This theorem is valid in case of using only operators of logic I_3, but if this logic extended with constant 1 then expression of classical operators is possible without supplementary logic.

Напомним операции логики I_3:
конъюнкция (&)

Y \ X	1	0	-1
1	1	0	0
0	0	0	0
-1	0	0	-1

слабая дизъюнкция (V)

[1] Работа поддержана грантом РФФИ, № 04-06-80167.

Y \ X	1	0	-1
1	1	1	0
0	1	0	-1
-1	0	-1	-1

сильная дизъюнкция (●)

Y \ X	1	0	-1
1	0	1	0
0	1	0	-1
-1	0	-1	0

и инволюцию (~)

X	~X
1	-1
0	0
-1	1

Теперь, добавив к этим операциям константу 1, можно выразить операторы min и max:

min

Y \ X	1	0	-1
1	1	0	-1
0	0	0	-1
-1	-1	-1	-1

max

Y \ X	1	0	1
1	1	1	1
0	1	0	0
-1	1	0	-1

следующим образом:

$$[x\mathrm{v}y]\mathrm{v}[\sim((x\bullet y)\&1)]\mathrm{v}[(\sim 1)\&x]\mathrm{v}[(\sim 1)\&y] = \min(x,y) \qquad (1).$$

Выразить оператор max можно как общепринятым способом через минимум и инволюцию так и иным способом, при котором достаточно в формуле (1) инвертировать константу:

$$[x\mathrm{v}y]\mathrm{v}[\sim((x\bullet y)\&(\sim 1)]\mathrm{v}[1\&x]\mathrm{v}[1\&y] = \max(x,y) \qquad (2)$$

Из этого следует то, что расширенная константой логика I_3 есть алгебра Клини [4], а значит её расширенный вариант содержит дистрибутивную решётку и для него справедлива теорема о представления.

На сегодняшний день, решая обратную задачу, используя операторы min и max удалось выразить только один оператор логики I_3, а именно конъюнкцию:

$$x\&y = \min(\min(\max(0,x),\max(0,y)),\max(x,y)) \qquad (3)$$

Если впоследствии удастся выразить аналогичным способом ещё один оператор, то учитывая, что любой из трёх операторов выражается через два оставшихся и инволюцию [8]:

$$xvy = \sim(\sim(x\&y)\bullet\sim(x\bullet y)) \qquad (4)$$

$$x\&y = \sim(\sim(xvy)v(x\bullet y)) \qquad (5)$$

$$x\bullet y = \sim(\sim(xvy)v(x\&y)) \qquad (6)$$

тогда с алгебраической точки зрения логика I_3 с константой 1 есть алгебра Клини. Если же будет показано, что этого сделать нельзя, то это будет означать, что I_3 с константой 1 есть алгебра Клини, расширенная или операцией v, или операцией •.

Оператор слабой дизъюнкции представляет особый интерес, так как имеет самую простую аппаратную реализацию.

Принципы обработки сигналов можно пояснить, рассматривая работу схемы состоящей из двух сопротивлений (рис. 1).

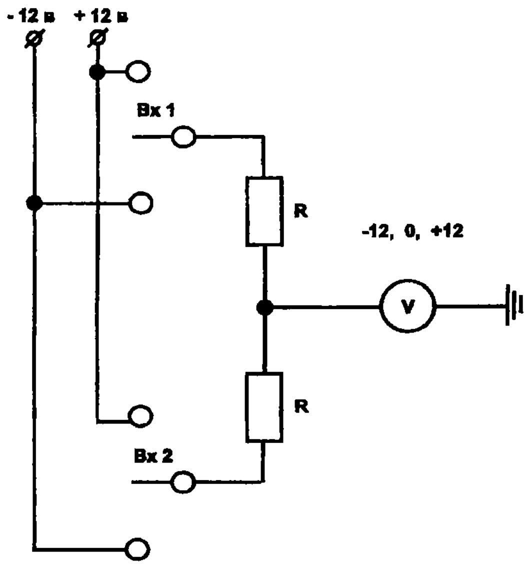


Рис. 1 Принципиальная схема реализации логического элемента – слабой дизъюнкции.

На её входы подаются сигналы (например + 12в, 0, - 12в), а выходом является средняя точка вышеупомянутых сопротивлений, при биполярном источнике питания ($\pm$ 12в), определением результата работы такой схемы является измерение полярности (вектора) выходного сигнала. Его полярность соответствует знаку переменной в табл. 4. Трехзначная логика I_3 [2] была разработана для моделирования нейроподобных элементов и искусственных нейронных сетей [7], но может найти применение не только в параллельном распознавании образов по обучающим примерам, но и в последовательной обработке чисел по заданной программе.

Единственной попыткой создания ЭВМ работающей на основе обработки трехзначного, а не двухзначного сигнала была машина «Сетунь» разработанная в МГУ под руководством Н.П.Брусенцова [5] и выпускавшаяся Астраханским заводом электронной аппаратуры с1961 по1965 год.

Основное преимущество трёхуровнего кодирования состоит в том, что трёхуровневый, биполярный сигнал (-1;0;+1), единственный сигнал, имеющий ту же неспутываемость и помехозащищенность, что и бинарный. Но, как отмечалось [6], недостатком «Сетуни», было то, что хотя передача сигнала осуществлялась при помощи трехуровневого кодирования, его обработка происходила на основе бинарной логики, т.е. отмечалось, что возможности многозначной логики в ней использованы, не были.

При этом следует отметить, что при применении логики I_3 знак числа задается полярностью сигнала и не занимает отдельный регистр и операция вычитания реализуется на аппаратном, а не программном уровне.

Для наглядности покажем принципы работы одноразрядного сумматора – простейшего элемента любого счетно-решающего устройства или электронно–вычислительной машины (рис. 2)

Одноразрядный сумматор состоит из двух логических элементов логики I_3 , один из которых реализует функцию сильной дизъюнкции, а второй конъюнкции. Первое число подается параллельно на первые входы вышеуказанных элементов, а второе соответственно на вторые. При этом на выходе элемента, реализующего сильную дизъюнкцию, появляется младший разряд суммы, а на выходе логического элемента, реализующего конъюнкцию, соответственно – старший.

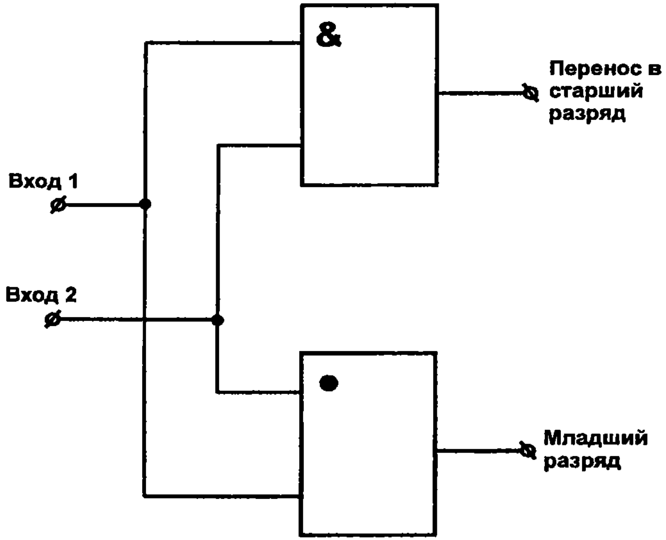


Рис. 2 Логическая схема одноразрядного сумматора.

На основе вышеописанных принципов строится множитель и математический модуль.

Данный подход позволяет использовать преимущества не только трехуровневой передач сигнала, но и трехзначной логики.

Литература

1. *Карпенко А.С.* Не истинностно-функциональная логика Клини с антибулевой операцией // Труды научно-исследовательского семинара Логического центра Института философии РАН. Вып. XV. М. 2001. С. 41-45.
2. *Юрьев Д.Н.* Новая трехзначная логика // Труды научно-исследовательского семинара Логического центра Института философии РАН. Вып. XV. М. 2001.
3. *Карпенко А.С.* Нерегулярность и "существенная" немонотонность логики Юрьева I_3 // Труды научно-исследовательского семинара Логического центра Института философии РАН. Вып. XVI. М.: ИФРАН, 2001. С. 54 – 58.
4. *Mukaidano M.* A set of independent and complete axioms for a fuzzy algebra (Kleene algebra) // International Symposium on multiple-valued logic. 11th. Oklakoma. 1981. P. 27-34.

5. *Брусенцов Н.П.* Опыт разработки троичной вычислительной машины // Вестн. Моск. ун-та. Сер.1: Математика, механика/ 1965 № 2.
6. *Epstein G., Freider G., Rine D.C.* The development of multiple-valued logic as related to computer science // Computer. 1974. Vol. 7, N 9.
7. *Юрьев Д.Н.* Применение трехзначных таблиц истинности к работе формального нейрона // Компьютерные технологии в науке, производстве, социальных и экономических процессах. Материалы междунар/ научно-практ. конф. Ч. 6. Новочеркасск, 2000.
8. *Юрьев Д.Н.* Новые законы и свойства логики I_3 // Смирновские чтения. 4 Междунар. конф. Ин-т философии РАН. М., 2003. С. 57 – 59.

Научное издание

ТРУДЫ НАУЧНО-ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКОГО СЕМИНАРА ЛОГИЧЕСКОГО ЦЕНТРА ИНСТИТУТА ФИЛОСОФИИ РАН.
Выпуск XVII

Утверждено к печати Ученым советом Института философии РАН

В авторской редакции
Корректура авторов
Художник *В.К.Кузнецов*

Лицензия ЛР № 020831 от 12.10.98 г.

Подписано в печать с оригинал-макета 17.08.2004.
Формат 60x84 1/16. Печать офсетная. Гарнитура Таймс.
Усл. печ. л. 7,44. Уч.-изд.л. 4,71. Тираж 500 экз. Заказ № 031.

Оригинал-макет изготовлен в Институте философии РАН
Компьютерный набор авторов
Компьютерная верстка *С.А.Павлов*

Отпечатано в ЦОП Института философии РАН
119992, Москва, Волхонка, 14.