The monograph is devoted to the study of the properties of the three-valued semantics for the classical propositional logic. The whole class of the three-valued implicative-negative matrices for the classical propositional logic is described. The classification based on the functional properties of the basic operations of such matrices is devised. Also, the class of matrices with the classical set of tautologies but a non-classical consequence relation is investigated. It is shown that some important properties of the classical propositional logic are only present in the case of two-valued semantics.

Russian Academy of Sciences
Institute of Philosophy

Leonid Devyatkin

THREE-VALUED SEMANTICS FOR THE CLASSICAL PROPOSITIONAL LOGIC

Москва
2011

Российская Академия Наук
Институт философии

Л.Ю. Девяткин

ТРЕХЗНАЧНЫЕ СЕМАНТИКИ ДЛЯ КЛАССИЧЕСКОЙ ЛОГИКИ ВЫСКАЗЫВАНИЙ

Москва
2011

УДК 161.12
ББК 87.4
Д 25

В авторской редакции

Рецензенты

кандидат филос. наук *Д.В. Зайцев*
кандидат филос. наук *Е.В. Левенец*

Д 25 **Девяткин Л.Ю.** Трехзначные семантики для классической логики высказываний [Текст] / Л.Ю. Девяткин; Рос. акад. наук, Ин-т философии. – М. : ИФ РАН, 2011. – 108 с. ; 17 см. – Библиогр: с. 107–108. – 500 экз. – ISBN 978-5-9540-0203-4.

Монография посвящена исследованию свойств трехзначных семантик для классической логики высказываний. Автором полностью описан трехзначных импликативно-негативных характеристических матриц для классической логики высказываний. Построена классификация подобных матриц с одним выделенным значением на основе функциональных свойств их базовых операций. Также исследованы матрицы с классическим классом законов, но неклассическим отношением логического следования. Показано, что отдельные важные свойства классической логики высказываний имеют место только при семантике с двумя истинностными значениями.

ISBN 978-5-9540-0203-4

Содержание

Contents

Введение

Данная книга посвящена анализу классической логики высказываний с позиций многозначной логики.

Классическая логика занимает особое место в системе логического знания. Она явилась отправной точкой для создания неклассических логик, исследования, в области которых играют фундаментальную роль в современной логике как науке. Также, классическая логика играет ключевую роль для анализа и систематизации всего многообразия неклассических логик. Ведь само существование неклассических логик возможно только в соотнесении с классической.

Многозначные логики – одно из ключевых направлений в современной логике. В 1920-х гг. Я.Лукасевичем [25] и Э.Постом [29] независимо друг от друга были построены первые системы, основанные на отходе от принципа бивалентности. Предложенная Лукасевичем и Постом методология нашла применение во многих областях логических исследований. Средствами трехзначной логики Лукасевичу удалось дать табличные определения модальных операторов необходимости и возможности. Как известно, нельзя построить двухзначные таблицы истинности для модальных операторов. Также были построены паранепротиворечивые (логики Розоноэра [13], Сетте [32], Д'Оттавиано [18]), интуиционистские (логика Гейтинга [22]) и многие другие многозначные логики.

Как оказалось, многозначная логика также позволяет построить формализацию классической логики, отличную от стандартной. Примеры логических матриц, в которых класс законов является классическим, приводят, в частности Н.Решер [30], Р.Эпштейн [19], Г.Малиновский [27], А.С.Карпенко [7]. Важно, что, в отличие от двухзначного случая, существует множество разнообразных многозначных семантик для классической логики высказываний.

Особенно интересен тот факт, что оказывается возможным построить логическую матрицу, в которой сохраняться все тавтологии и их класс будет замкнут относительно классических правил вывода, но объем логического следования (т. е. пары множеств посылок и заключений, таких, что заключение логически следует из посылок) не будет классическим.

Таким образом, мы еще раз убеждаемся в фундаментальном характере классической логики и ее особом месте среди логических систем. Вместе с тем, многозначная логика дает нам новые инструменты для исследования свойств классической логики и возможность взглянуть на нее под новым углом. Мы воспользуемся этой возможностью, применив метод логических матриц, который широко используется в многозначных логиках.

В настоящей работе будут рассмотрены логические матрицы с тремя элементами множества-носителя. Под логической матрицей мы понимаем структуру вида $M = <U, F, D>$, где U – множество истинностных значений (множество-носитель матрицы), F – множество операций, заданных на U и замкнутых относительно операции суперпозиции, D – непустое собственное подмножество U, элементы которого называются *выделенными значениями* и интерпретируются как «истина».

Нас будут интересовать такие логические матрицы, в которых оказываются общезначимыми все тавтологии классической логики высказываний. В качестве базовых операций матрицы будем рассматривать одну бинарную операцию и одну унарную.

Первая глава посвящена примерам трехзначных матриц для классической логики, встречающимся в существующей литературе.

Во второй главе мы систематически рассмотрим трехзначные матрицы, такие, что формула в них логически следует из посылок, если, и только если, она логически следует из них в классической двузначной матрице. Будет показано, что базовые операции данных матриц различны по функциональным свойствам.

Третья глава посвящена матрицам, в которых класс законов является классическим, однако отношение логического следование классическим не является.

В заключительной главе мы отдельно остановимся на интересном свойстве, которое демонстрируют некоторые трехзначные матрицы для классической логики. Как оказалось, базовые операции таких матриц могут не сохранять классические значения истинности. То есть, при оценке переменных, ограниченной множеством $\{1, 0\}$, результирующее значение формулы может оказаться неклассическим.

ГЛАВА 1. ИСТОРИЯ ВОПРОСА

Данный раздел работы мы посвятим обзору результатов, имеющих непосредственное отношение к проблематике нашего исследования.

В 1938 г. в работе «Об одном трехзначном исчислении и его применении к анализу парадоксов классического расширенного функционального исчисления» [1] Д.А.Бочваром была построена трехзначная система B_3. Основой для ее построения стала попытка формализации соотношений между предикатами истинности, ложности и бессмысленности высказываний. Важнейшим свойством этой теории является возможность решения проблемы анализа парадоксов классической логики путем формального доказательства бессмысленности определенных высказываний.

Начиная построение исчисления высказываний, автор определяет соотношение понятий «предложение» и «высказывание» следующим образом. Высказывание имеет смысл, если оно истинно или ложно. Высказывание называется предложением, если имеет смысл. Высказывание, не имеющее смысла, называется бессмысленным или бессодержательным. При этом всякое высказывание либо не имеет смысла, либо истинно или ложно. Если же некоторое высказывание **A** не имеет смысла, то высказывания “**A** ложно” и “**A** истинно” имеют смысл и являются ложными. То есть, как указывает автор, «предикаты ложности, истинности и бессмысленности могут со смыслом высказываться о любом высказывании».

Таким образом, можно выделить две группы высказываний.

I	II
“**А**”	“**А** верно”
“не-**А**”	“**А** ложно”
“**А** и **В**”	“**А** верно и **В** верно”
“**А** или **В**”	“**А** верно или верно **В**”
“если **А**, то **В**”	“если **А** верно, то **В** верно ”

Типы I и типы II называются, соответственно, внутренними и внешними формами утверждения, отрицания, конъюнкции, дизъюнкции импликации. Легко увидеть, что при подстановке во внутреннюю форму бессмысленного высказывания, результатом всегда будет бессмысленное высказывание. Высказывания же внешней формы всегда имеют смысл. Пусть **А** – бессмысленное высказывание. Тогда внешнее утверждение «**А** верно» ложно, но не бессмысленно. Очевидно, что, если внешнее утверждение всегда имеет смысл, таким же свойством обладают и остальные внешние формы.

Что же касается предложений, внешние формы становятся формально эквивалентными внутренним. То есть, для предложений соответствующие внешние и внутренние формы становятся одновременно истинными или одновременно ложными.

Бочвар указывает на то, что обычно при содержательной интерпретации основных функций классического исчисления предложений (этот термин обусловлен различием, которое Бочвар проводит между понятиями «высказывание» и «предложение») наряду с внутренними формами применяются также внешние. А именно, для отрицания, дизъюнкции и импликации. Однако классическое исчисление предложений не рассматривает утверждения как функции от переменного предложения. Таким образом, как указывает автор, отмеченная выше двойственность, не соответствует действительной природе классического исчисления предложений. На самом деле, его следует содержательно интерпретировать с помощью системы внутренних форм.

Далее, автор отмечает, что «принципиально, при содержательной интерпретации формализма классической логики и математики, система внутренних форм является, конечно, и абсолютно достаточной, поскольку речь идет о символах исчисления предложений».

На этих основаниях, Бочвар предлагает называть внутренние и внешние формы, соответственно, классическими и неклассическими содержательными функциями переменных высказываний.

Перейдем к рассмотрению матричного исчисления высказываний, построенного Д.А.Бочваром.

Основные понятия и определения

Язык матричного исчисления высказываний Бочвара (L_{B_3}) содержит следующие, и только следующие, символы:

(i) скобки), (,

(ii) бинарная логическая связка ∩,

(iii) унарные логические связки ~, ¬, ├,

(iv) пропозициональные переменные **p**, **q**, **r**, …, $\mathbf{p_n}$, $\mathbf{q_n}$, $\mathbf{r_n}$, $\mathbf{s_n}$, $\mathbf{p_n}$, …

Сформулируем определение L_{B_3} -формулы.

(i) **p**, **q**, **r**, …, $\mathbf{p_n}$, $\mathbf{q_n}$, $\mathbf{r_n}$, $\mathbf{s_n}$, $\mathbf{p_n}$, … есть L_{B_3} -формулы,

(ii) если **A** есть L_{B_3} – формула, то ~**A**, ¬**A**, ├**A** есть L_{B_3}-формулы,

(iii) если **A** и **B** есть L_{B_3} – формулы, то **A** ∩ **B** есть L_{B_3}-формула,

(iv) ничто иное не является формулой.

Условимся, что ~*, ¬*, ├* есть унарные операции на {0, ½, 1}, определяемые таблицами:

x	~*x
1	0
½	½
0	1

x	¬* x
1	0
½	0
0	1

x	├* x
1	1
½	0
0	0

Также условимся, что ∩* есть бинарная операция на {0, ½, 1}, определяемая таблицей:

∩*	1	½	0
1	1	½	0
½	½	½	½
0	0	½	0

Руководствуясь приведенными выше соображениями Д.А.Бочвара о содержательной интерпретации основных функций классического исчисления предложений, будем называть формальное внутреннее отрицание $\sim^*$ и формальную внутреннюю логическую сумму $\cap^*$ классическими функциями, а формальное внешнее отрицание $\neg^*$ и формальное внешнее утверждение $\vdash^*$ – неклассическими.

Ясно, что $M < \{0, ½, 1\}, \{1\}, \{\sim^*, \neg^*, \vdash^*, \cap^*\} >$ есть матрица. Оценка v в матрице M определяется как отображение множества пропозициональных переменных в носитель матрицы M. Значение L_{B_3}-формулы **A** в матрице M при оценке v (обозначается $|\mathbf{A}|_v^M$) определяется индукцией по построению L_{B_3}-формулы.

(i) $|\mathbf{p}|_v^M = v(\mathbf{p})$, если **p** есть пропозициональная переменная.

(ii) $|\sim\mathbf{A}|_v^M = \sim^*|\mathbf{A}|_v^M$, если **A** есть L_{B_3}-формула.

(iii) $|\neg\mathbf{A}|_v^M = \neg^*|\mathbf{A}|_v^M$, если **A** есть L_{B_3}-формула.

(iv) $|\vdash\mathbf{A}|_v^M = \vdash^*|\mathbf{A}|_v^M$, если **A** есть L_{B_3}-формула.

(v) $|\mathbf{A} \cap \mathbf{B}|_v^M = |\mathbf{A}|_v^M \cap^* |\mathbf{B}|_v^M$, если **A** и **B** есть L_{B_3}-формулы.

Формула называется тавтологией в матричной логике высказываний, если она имеет выделенное значение при любой оценке v в матрице M. Доказательство заключается в проверке методом построения таблицы истинности для данной формулы.

Прежде чем перейти непосредственно к теореме о том, что построенное выше исчисление высказываний содержит часть, изоморфную с классическим исчислением предложений, определим ряд дополнительных связок:

$(\mathbf{p} \cup \mathbf{q}) =_{df} \sim(\sim\mathbf{p} \cap \sim\mathbf{q})$

$(\mathbf{p} \supset \mathbf{q}) =_{df} \sim(\mathbf{p} \cap \sim\mathbf{q})$

Функция, соответствующая $\mathbf{p} \cup \mathbf{q}$ – классическая дизъюнкция, читается «**p** или **q**». Функция, соответствующая $\mathbf{p} \supset \mathbf{q}$ – классическая импликация, читается «если **p**, то **q**».

Теперь, пользуясь формальным внешним утверждением, определим следующие связки:

$\sim^N\mathbf{p} =_{df} \sim\vdash\mathbf{p}$

$(\mathbf{p} \cup^N \mathbf{q}) =_{df} (\vdash\mathbf{p} \cup \vdash\mathbf{q})$

$(\mathbf{p} \supset^N \mathbf{q}) =_{df} (\vdash\mathbf{p} \supset \vdash\mathbf{q})$

Функции, соответствующие этим связкам – это внешние или, говоря иначе, неклассические функции, $\sim^N \mathbf{p}$ читается «**p** не верно», $\mathbf{p} \supset^N \mathbf{q}$ читается «**p** верно или **q** верно», $\mathbf{p} \cup^N \mathbf{q}$ читается «если **p** верно, то **q** верно».

Сформулируем теорему.

Теорема. *Матричное исчисление высказываний содержит часть, изоморфную с классическим исчислением предложений, причем формулы этой части исчисления высказываний получаются из формул классического исчисления предложений с помощью преобразования* (буквы к.и.п. обозначают ниже классическое исчисление предложений, а буквы и.в. – исчисление высказываний).

1. Каждое переменное предложение переходит в переменное высказывание с тем же обозначением.
2. Знак $\neg$ к.и.п. переходит в знак $\sim^N$ и.в.
3. Знак $\wedge$ к.и.п. переходит в знак $\cap^N$ и.в.
4. Знак $\vee$ к.и.п. переходит в знак $\cup^N$ и.в.
5. Знак $\supset$ к.и.п. переходит в знак $\supset^N$ и.в.

Доказательство. Легко проверить построением матриц, что следующие формулы являются тавтологиями.

1. $\mathbf{p} \supset^N (\mathbf{p} \cap \mathbf{p})$
2. $(\mathbf{p} \cap \mathbf{q}) \supset^N (\mathbf{q} \cap \mathbf{p})$
3. $(\mathbf{p} \supset^N \mathbf{q}) \supset^N ((\mathbf{p} \cap \mathbf{r}) \supset^N (\mathbf{q} \cap \mathbf{r}))$
4. $(\mathbf{p} \supset^N \mathbf{q}) \supset^N ((\mathbf{q} \supset^N \mathbf{r}) \supset^N (\mathbf{p} \supset^N \mathbf{r}))$
5. $\mathbf{q} \supset^N (\mathbf{p} \supset^N \mathbf{q})$
6. $(\mathbf{p} \cap (\mathbf{p} \supset^N \mathbf{q})) \supset^N \mathbf{q}$
7. $\mathbf{p} \supset^N (\mathbf{p} \cup^N \mathbf{q})$
8. $(\mathbf{p} \cup^N \mathbf{q}) \supset^N (\mathbf{q} \cup^N \mathbf{p})$
9. $((\mathbf{p} \supset^N \mathbf{r}) \cap (\mathbf{q} \supset^N \mathbf{r})) \supset^N ((\mathbf{p} \cup^N \mathbf{q}) \supset^N \mathbf{r})$
10. $\sim^N \mathbf{p} \supset^N (\mathbf{p} \supset^N \mathbf{q})$
11. $((\mathbf{p} \supset^N \mathbf{q}) \cap (\mathbf{p} \supset^N \sim^N \mathbf{q})) \supset^N \sim^N \mathbf{p}$
12. $\mathbf{p} \cup^N \sim^N \mathbf{p}$

Система формул (1)–(12) является изоморфным образом следующей системы формул классического исчисления предложений.

1. $\mathbf{p} \supset (\mathbf{p} \wedge \mathbf{p})$
2. $(\mathbf{p} \wedge \mathbf{q}) \supset (\mathbf{q} \wedge \mathbf{p})$

3. $(\mathbf{p} \supset \mathbf{q}) \supset ((\mathbf{p} \wedge \mathbf{r}) \supset (\mathbf{q} \wedge \mathbf{r}))$
4. $(\mathbf{p} \supset \mathbf{q}) \supset ((\mathbf{q} \supset \mathbf{r}) \supset (\mathbf{p} \supset \mathbf{r}))$
5. $\mathbf{q} \supset (\mathbf{p} \supset \mathbf{q})$
6. $(\mathbf{p} \wedge (\mathbf{p} \supset \mathbf{q})) \supset \mathbf{q}$
7. $\mathbf{p} \supset (\mathbf{p} \vee \mathbf{q})$
8. $(\mathbf{p} \vee \mathbf{q}) \supset (\mathbf{q} \vee \mathbf{p})$
9. $((\mathbf{p} \supset \mathbf{r}) \wedge (\mathbf{q} \supset \mathbf{r}))\supset((\mathbf{p} \vee \mathbf{q}) \supset \mathbf{r})$
10. $\neg \mathbf{p} \supset (\mathbf{p} \supset \mathbf{q})$
11. $((\mathbf{p} \supset \mathbf{q}) \wedge (\mathbf{p} \supset \sim\mathbf{q})) \supset \neg \mathbf{p}$
12. $\mathbf{p} \vee \neg \mathbf{p}$

Но эта система, как известно [22, 24], может быть избрана как система формальных аксиом для классической логики предложений, если в качестве содержательных аксиом вводятся:

1. Принцип вывода: если **p** и $\mathbf{p} \supset \mathbf{q}$ – доказуемые формулы, то **q** – доказуемая формула.
2. Правило соединения: если **p** и **q** – доказуемые формулы, то $\mathbf{p} \wedge \mathbf{q}$ **–** доказуемая формула.
3. Принцип подстановки в обычной форме.

Теперь из матрицы функции $\mathbf{p} \supset^{N} \mathbf{q}$ усматриваем, что в матричном исчислении высказываний имеет силу принцип вывода в форме: если **p** и $\mathbf{p} \supset^{N} \mathbf{q}$ – доказуемые формулы, то **q** – доказуемая формула.

Далее, из матрицы функции $\mathbf{p} \cap \mathbf{q}$ видим, что в матричном исчислении имеет силу и правило: если **p** и **q** – доказуемые формулы, то $\mathbf{p} \cap \mathbf{q}$ **–** доказуемая формула.

Наконец, очевидно, что принцип подстановки тоже остается в силе для матричного исчисления высказываний. Из всего сказанного следует справедливость теоремы.

Изоморфный образ классической логики предложений, существование которого было доказано в приведенной выше теореме Бочвар называет K_1-системой. Автор также указывает на еще один изоморф, содержащийся в построенном им матричном исчислении высказываний. Он получается из K_1-системы путем замены связки $\cap$ на связку $\cap^{N}$, которой соответствует функция внешней логической суммы. Она определяется следующим образом:

$$(\mathbf{p}\cap^{N}\mathbf{q})=_{df} (\vdash\mathbf{p} \cap \mathbf{q})$$

Изоморф, полученный таким образом автор называет K_2-системой.

Остановимся отдельно на одной особенности, проведенного Бочваром доказательства. Автор доказывает, что все тавтологии классического исчисления высказываний остаются таковыми при переводе в K_1-систему. Однако остается открытым вопрос, все ли тавтологии K_1-системы сохраняют доказуемость при переводе на язык классической логики предложений. Ниже этот вопрос будет рассмотрен более подробно.

Дальнейшее развитие интересующая нас тема получила в работе В.К.Финна «Аксиоматизация некоторых трехзначных исчислений высказываний и их алгебр» [15].

В отличие от Бочвара, в качестве исходных функций Финн рассматривает $\sim\mathbf{x}$, $\vdash\mathbf{x}$ и $\mathbf{x} \cap \mathbf{y}$. Множество всех суперпозиций этих функций автор обозначает через $B^{(3)}$. Этому множеству, в частности, принадлежат следующие функции: $(\mathbf{x} \cup \mathbf{y}) =_{df} \sim(\sim\mathbf{x} \cap \sim\mathbf{y})$, $I\mathbf{x} =_{df} \mathbf{x} \cap \sim\mathbf{x}$, $\neg\mathbf{x} =_{df} \vdash\sim\mathbf{x}$, $\downarrow\mathbf{x} =_{df} \sim(\vdash\mathbf{x} \cup \neg\mathbf{x})$, $(\mathbf{x} \supset \mathbf{y}) =_{df} \sim\mathbf{x} \cup \mathbf{y}$, $(\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{y}) =_{df} (\vdash\mathbf{x} \supset \vdash\mathbf{y})$, $(\mathbf{x} \leftrightarrow \mathbf{y}) =_{df} (\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{y}) \cap (\sim\mathbf{y} \rightarrow \sim\mathbf{x})$, $(\mathbf{x} \equiv \mathbf{y}) =_{df} (\mathbf{x} \leftrightarrow \mathbf{y}) \cap (\sim\mathbf{x} \leftrightarrow \sim\mathbf{y})$, $(\mathbf{x} \cup^{N} \mathbf{y}) =_{df} (\vdash\mathbf{x} \cup \vdash\mathbf{y})$, $(\mathbf{x} \cup \mathbf{y}) =_{df} \sim(\sim\mathbf{x} \cap \sim\mathbf{y})$, $(\mathbf{x} \supset \mathbf{y}) =_{df} \sim(\mathbf{x} \cap \sim\mathbf{y})$.

Функции $\sim\mathbf{x}$, $\mathbf{x} \cap \mathbf{y}$, $\mathbf{x} \cup \mathbf{y}$, $\mathbf{x} \supset \mathbf{y}$, соответственно, называются внутренними – отрицанием, конъюнкцией, дизъюнкцией, импликацией. Функции $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{y}$, $\mathbf{x} \leftrightarrow \mathbf{y}$, $\mathbf{x} \equiv \mathbf{y}$, соответственно, – внешними – импликацией, равносильностью и эквивалентностью. Финн отмечает, что $\neg\mathbf{x}$, $\downarrow\mathbf{x}$ и $\vdash\mathbf{x}$ есть, соответственно, J_α-функции ($\alpha = 0$, ½, 1) Б.Россера и А. Тюркетта [31].

Отметим еще одно важное отличие формулировки B_3, предложенной Финном, от оригинальной формулировки Бочвара. Во втором случае алфавит B_3 содержит переменные двух сортов – пропозициональные и сентенциальные. Первые обозначаются как $\mathbf{p}$, $\mathbf{q}$, $\mathbf{r}$, …, $\mathbf{p_n}$, $\mathbf{q_n}$, $\mathbf{r_n}$, $\mathbf{s_n}$, $\mathbf{p_n}$, вторые – как $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$, …, $\mathbf{u_n}$, $\mathbf{v_n}$, $\mathbf{w_n}$. В то время, как пропозициональные переменные могут принимать значения из {0, ½, 1}, значения сентенциальных переменных принадлежат множеству {0, 1}.

Используя подобный нестандартный язык, Финн формулирует еще один изоморф, содержащийся в B_3.

1. $\models_{B_3} (u \supset (v \supset u))$,
2. $\models_{B_3} (u \supset (v \supset w)) \supset ((u \supset v) \supset (u \supset w))$,
3. $\models_{B_3} (\sim u \supset \sim v) \supset (v \supset u)$,

Отдельно отметим, что именно этот случай представляет собой пример первого использования термина «изоморф» в интересующем нас смысле.

Ни один из указанных выше авторов не дает четкого определения изоморфа. Однако ясно, что под изоморфом исчисления классической логики высказываний в обоих случаях понимают исчисление, построенное средствами языка логики Бочвара (в той или иной формулировке). Причем, существует перевод языка логики Бочвара в язык классической логики высказываний, такой, что данное исчисление оказывается в точности исчислением классической логики высказываний.

В дальнейшем мы будем рассматривать логику с функциональной точки зрения. В этом случае, представляется верным называть многозначным *изоморфом классической логики высказываний* такой фрагмент некоторой многозначной логики, что в нем сохраняются все тавтологии и правила вывода классической логики.

Именно в таком смысле пишет об изоморфах, содержащихся в B_3, А.С.Карпенко [7]. Предложенный Бочваром изоморф в подобной интерпретации принимает вид:

$\supset^N$	1	½	0
1	1	0	0
½	1	1	1
0	1	1	1

x	$\sim^N x$
1	0
½	1
0	1

Автор обозначает данный изоморф как B_3^N.

А.С.Карпенко также принадлежит новый изоморф классической логики высказываний, выразимый в B_3. Соответствующие операции получаются из внутренних операций B_3 при помощи оператора **M**, дуального $\vdash$, а сам изоморф обозначается B_3^M. $\mathbf{Mp} =_{df} \sim\vdash\sim\mathbf{p}$. Связки $\supset^M$ и $\sim^M$ определяются, соответственно, как $\mathbf{Mp} \supset \mathbf{Mq}$ и $\sim\mathbf{Mp}$. Это приводит нас к следующим таблицам.

$\supset^M$	1	½	0
1	1	1	0
½	1	1	0
0	1	1	1

x	$\sim^M x$
1	0
½	0
0	1

Строгое доказательство того, что классы тавтологий B_3^N и B_3^M совпадают с классическим было впервые построено в [4].

Интересен тот факт, что, в то время как класс тавтологий B_3^M совпадает с классом тавтологий классической логики, неверно, что из **p** $\supset^{\mathrm{M}}$ **q** и **p** логически следует **q**. Данный пример приводит нас к расширению понятия изоморфа путем отказа от требования сохранения отношения логического следования в изоморфе. В дальнейшем будем называть системы связок, сохраняющие лишь класс тавтологий классической логики, но не классическое отношение логического следования *обобщенными изоморфами*.

Еще одна известная логика, важная для изучения проблемы изоморфов – это трехзначная логика Клини K_3.

Конструируя эту логику, С.Клини, исходил из того факта, что существуют математические утверждения, которые являются истинными или ложными, однако не могут быть доказаны или опровергнуты. Таким образом, в данном случае промежуточное истинностное значение будет интерпретироваться как «неразрешимо».

Н.Решер [30] указывает на тот факт, что связки сильной логики Клини K_3 [6] образуют при выделенных значениях {1, ½} – пользуясь нашей терминологией – обобщенный изоморф классической логики высказываний. Более того, автор указывает целый класс n-значных логик, обладающих интересующими нас свойствами.

Решер строит n-значную логику $S_n^{\supset}$ следующим образом:

$x \vee y = \max(x, y)$;

$x \wedge y = \min(x, y)$;

$\sim x = 1 - x$;

$x \supset y = \sim x \vee y$.

Значения 1 и 0 интерпретируются как «истина» и «ложь» соответственно. Промежуточные значения обозначаются как $\frac{n-2}{n}$, $\frac{n-2}{n}$, …, $\frac{n-(n-1)}{n}$ и интерпретируются как различные степени истинности.

Ясно, что определения базовых связок совпадают с определениями связок классической логики высказываний. Таким образом, $S_n^{\supset}$ есть не что иное, как C_2.

Трехзначная логика Клини оказывается частным (трехзначным случаем) логики $S_n^{\supset}$. Базовые операции принимают следующий вид:

$\wedge$	1	½	0
1	1	½	0
½	½	½	0
0	0	0	0

$\vee$	1	½	0
1	1	1	1
½	1	½	½
0	1	½	0

$\supset$	1	½	0
1	1	1	1
½	½	½	1
0	0	½	1

x	$\sim x$
1	0
½	½
0	1

Решер отмечает, что в $S_n^{\supset}$ при $n \geq 3$ не существует тавтологий в классическом смысле. Классическая тавтология есть логическая формула, принимающая значение «истина» вне зависимости от значений пропозициональных переменных, входящих в ее состав. Ясно, что каждая формула принимает неклассическое истинностное значение, если все пропозициональные переменные, входящие в ее состав принимают неклассические значения. Для решения этой проблемы Решер предлагает альтернативное определение тавтологии:

Тавтология – это логическая формула, не принимающая значения «ложь» ни при одной интерпретации пропозициональных переменных, входящих в ее состав.

Далее, автор указывает то, что в таком случае класс тавтологией любой $S_n^{\supset}$ совпадает с классом тавтологий C_2. Отметим, что мы можем просто выбрать в качестве класса выделенных значений {½, 1} для достижения аналогичного результата при стандартном определении тавтологии. Нетрудно убедиться, что, если некоторая формула принимает значение 0 при некоторой оценке в C_2, она принимает значение 0 при этой же оценке в $S_n^{\supset}$. Теперь нужно показать, что, если формула принимает значение 0 при некоторой оценке в $S_n^{\supset}$, она не является общезначимой в C_2. Решер делает это следующим образом:

Из определений $\vee$, $\supset$, $\sim$ очевидным образом вытекает, что эти функции выдают значение 0, лишь при классических значениях аргументов. Причем, в этом случае они функционируют как соответствующие классические операции. Более того, $x \wedge y = 0$, если и только если (е.т.е.) $x = 0$ или $y = 0$, так что подобный результат будет иметь место и в двузначном случае. Таким образом – заключает Решер – любая формула, построенная с помощью полного списка связок, может принять значение «ложь» в $S_n^{\supset}$, е.т.е. она делает это в двузначном случае.

К сожалению, существует пример, демонстрирующий, что сделанное автором утверждение не соответствует действительности.

Заменим операцию ⊃ на операцию ⊃′, определяемую следующей таблицей.

⊃′	1	½	0
1	1	1	0
½	1	1	1
0	1	1	1

Рассуждение Решера полностью соответствует, приведенной выше связке. Функция ⊃′ выдает значение 0, лишь при классических значениях аргументов, и, в этом случае, работает как классическая импликация. Однако имеет место:

$(x \supset' (y \supset' z)) \supset' ((x \supset' y) \supset' (x \supset' z)) = 0$ при $x = 1$, $y = ½$, $z = 0$.

Альтернативное доказательство изоморфности логики K_3 с двумя выделенными значениями (отметим, что при выделенных значениях 1 и ½, мы можем использовать стандартное определение тавтологии) предлагает Р.Эпштейн [19].

Покажем, что формула **A** не является классической тавтологией, е.т.е найдется такая оценка e в K_3, что $e(\mathbf{A}) = 0$.

Каждая оценка v в C_2 есть оценка в K_3, и если формула принимает значение 0 при некоторой оценке в C_2, то она принимает значение 0 в K_3 при этой же оценке. Теперь пусть найдется оценка e в K_3 такая, что $e(\mathbf{A}) = 0$. Определим оценку e' в C_2 следующим образом: $e'(\mathbf{p}) = 1$, е.т.е. $e(\mathbf{p}) \in \{1, ½\}$ и $e'(\mathbf{p}) = 0$, е.т.е. $e(\mathbf{p}) = 0$. Легко доказать индукцией по построению формулы, что, если $e(\mathbf{B}) = 0$, то $e'(\mathbf{B}) = 0$, и если $e(\mathbf{B}) = 0$, то $e'(\mathbf{B}) = 0$. Таким образом, $e(\mathbf{A}) = 0$ и неверно, что **A** общезначима в C_2. Эпштейн также отмечает, что внутренний фрагмент трехзначной логики Бочвара обладает аналогичными свойствами, однако не производит построения доказательства, полагая данный факт очевидным.

В этой же работе Эпштейн рассматривает паранепротиворечивую логику J_3, построенную Д'Оттавиано и Да Коста [18] . Она служит хорошей иллюстрацией тому, как наличие в логике изоморфа классической логики позволяет построить аксиоматизацию этой логики в виде расширения C_2.

Таблицы истинности для элементарных операций J_3 имеют следующий вид:

x	$\sim x$
1	0
½	½
0	1

x	$\neg x$
1	0
½	0
0	1

$\supset$	1	½	0
1	1	½	0
½	1	½	0
0	1	1	1

$\wedge$	1	½	0
1	1	½	0
½	½	½	0
0	0	0	0

Выделенные значения – 1 и ½.

Автор также использует ряд дополнительных связок:

$©x \equiv_{\mathrm{Def}} \neg(\neg(x \supset (x \wedge \neg x)) \wedge \neg(\sim x \supset (x \wedge \neg x)))$;

$x \leftrightarrow y \equiv_{\mathrm{Def}} (x \supset y) \wedge (x \supset y)$;

$\Diamond x \equiv_{\mathrm{Def}} \neg(x \supset (x \wedge \neg x))$.

Эпштейн показывает, что фрагмент J_3 в языке $\neg$, $\supset$, $\wedge$ изоморфен C_2. Этот факт вытекает из того, что таблицы для $\neg$, $\supset$ и $\wedge$ суть таблицы для классической логики высказываний, если мы определяем 1 и ½ как «истина» и 0 как «ложь».

С данной точки зрения, J_3 получается из C_2 посредством расширения ее операцией ~.

Автор предлагает следующую аксиоматизацию.

К схемам аксиом классической логики, записанным с помощью $\neg$, $\supset$ и $\wedge$, добавляются следующие схемы аксиом.

1. $(\sim \mathbf{A} \wedge ©\mathbf{A}) \leftrightarrow \neg\mathbf{A}$,
2. $\sim\sim\mathbf{A} \leftrightarrow \mathbf{A}$,
3. $©(\neg\mathbf{A})$,
4. $((\mathbf{A} \wedge \mathbf{B}) \sim ©(\mathbf{A} \wedge \mathbf{B})) \leftrightarrow ((\mathbf{A} \wedge ©\mathbf{A}) \wedge (\mathbf{B} \wedge ©\mathbf{B}))$,
5. $(\sim\mathbf{A} \wedge ©\mathbf{A}) \supset ©(\mathbf{A} \supset \mathbf{B})$,
6. $(\mathbf{B} \wedge ©\mathbf{B}) \supset ©(\mathbf{A} \supset \mathbf{B})$.

Правило вывода – *modus ponens*.

Заметим, что J_3 функционально эквивалентна трехзначной логике Лукасевича $Ł_3$. Операции $\Diamond$, $\vee$, $\wedge$, ~ в J_3 и $Ł_3$ совпадают, импликация Лукасевича выражается следующим образом:

$x \rightarrow y = (\Diamond x \vee y) \vee \Diamond(\sim x \wedge y)$.

Долгое время считалось, что трехзначная логика Лукасевича с двумя выделенными значениями также совпадает с классической логикой высказываний по классу тавтологий, однако А.Тюркетт [31] привел следующий контрпример:

$\sim(\mathbf{p} \rightarrow \sim\mathbf{p}) \vee \sim(\sim\mathbf{p} \rightarrow \mathbf{p})$.

В [20] приводится аксиоматизация (29 аксиом) трехзначной логики Бочвара как расширения C_2, но с двумя видами переменных: внутренними и внешними (см. выше). Как раз посредством внешних переменных и дается аксиоматизация C_2.

Задаваясь вопросом о природе многозначности, Г.Малиновский [27] приводит два примера изоморфов классической логики высказываний.

Рассмотрим логическую матрицу $M_3 = <\{0, ½, 1\}, ¬, ∨, ∧, →, \{½, 1\}>$, где операции определяются следующим образом:

∧	1	½	0
1	1	½	0
½	½	½	0
0	0	0	0

∨	1	½	0
1	1	1	1
½	1	½	½
0	1	½	0

→	1	½	0
1	1	½	1
½	½	½	½
0	1	½	1

x	$¬ x$
1	0
½	1
0	1

Малиновский утверждает, что данная матрица определяет как класс тавтологий классической логики, так и классическое отношение логического следования.

Чтобы доказать это, пишет Малиновский, достаточно показать, что, в силу выбора класса выделенных значений, между оценками в M_3 и C_2 существует взаимно-однозначное соответствие такое, что формула принимает выделенное значение при некоторой оценке в M_3, е.т.е она принимает выделенное значение в C_2 при соответствующей оценке.

Второй пример, приведенный Малиновским еще более интересен. Автор рассматривает изоморф классической логики B_3^N, но с двумя выделенными значениями. В то время как данная логика совпадает с C_2 по классу тавтологий, отношение логического следования в ней отлично от классического.

Пусть **p** = ½ и **q** = 0 в данной матрице. Тогда **p** → **q** и **p** принимают выделенное значение, а **q** – нет. Следовательно, неверно, что в этой матрице **q** не следует логически из {**p** → **q**, **p**}. Что, конечно же, не так в классической логике высказываний.

Отметим также работу В.Комендантского [8], явившуюся первым шагом в систематическом изучении интересующей нас проблемы. Посредством компьютерной программы автором был получен полный список C-расширяющих изоморфов с классическим отношением отношения логического следования. Как оказалось, всего существует два таких изоморфа с одним выделенным значением и шестнадцать с двумя выделенными значениями.

В заключение кратко остановимся на важном примере, выходящем за рамки трехзначного случая. Речь пойдет о прямом произведении [35] матрицы для классической логики M_2 на саму себя. В качестве примера рассмотрим $M_4 = M_2 \times M_2$. Именно такая матрица была использована Я.Лукасевичем [26] при построении четырехзначной логики C_4. Однако данный метод позволяет также получить матрицу для классической логики с мощностью $\aleph_0$.

Пусть $M_2 = <\{1, 0\}, \supset_2, \neg_2, \{1\}>$ есть стандартная матрица для классической логики, и $\supset_2, \neg_2$ определяются стандартным образом. Тогда $M_4 = <\{<11>, <10>, <01>, <00>\}, \supset_4, \neg_4, \{<11>\}>$. Табличные определения для $\supset_4$ и $\neg_4$ принимают следующий вид:

$\supset_4$	11	10	01	00
11	11	10	01	00
10	11	11	01	01
01	11	10	11	10
00	11	11	11	11

x	$\neg_4 x$
11	00
10	01
01	10
00	11

В соответствии с теоремой С. Яськовского [23], полученная матрица, как и M_2, является характеристической для классической пропозициональной логики.

ГЛАВА 2. ТРЕХЗНАЧНЫЕ ЛОГИЧЕСКИЕ МАТРИЦЫ С КЛАССИЧЕСКИМ ОТНОШЕНИЕМ ЛОГИЧЕСКОГО СЛЕДОВАНИЯ

В данной главе будет описан класс трехзначных изоморфов, в которых сохраняется классическое отношение логического следования.

Сформулируем ряд базовых понятий и определений, которые останутся неизменными на протяжении всей работы, если не указано иначе.

Алфавит пропозиционального языка $L_{\supset\neg}$ содержит в точности следующие символы:

1. Пропозициональные переменные: $\mathbf{p}$, $\mathbf{q}$, $\mathbf{r}$, $\mathbf{s}$, $\mathbf{p}_1$, $\mathbf{q}_1$, $\mathbf{r}_1$, $\mathbf{s}_1$, …, $\mathbf{p}_n$, $\mathbf{q}_n$, $\mathbf{r}_n$, $\mathbf{s}_n$,
2. Пропозициональные связки: $\supset$, $\neg$,
3. Технические символы:),(.

Определение $L_{\supset\neg}$-формулы:

1. Если **A** есть порпозициональная переменная, то **A** есть $L_{\supset\neg}$-формула,
2. Если **A** и **B** есть $L_{\supset\neg}$-формулы, то $(\mathbf{A} \supset \mathbf{B})$ и $(\neg\mathbf{A})$ есть $L_{\supset\neg}$-формулы,
3. Ничто иное не есть $L_{\supset\neg}$-формула.

Рассмотрим класс логических матриц такой, что для каждой матрицы, входящей в него верно следующее: $M = <U, \supset^*, \neg^* , D>$, где U – непустое множество истинностных значений, $\supset^*$ – бинарная операция на U, $\neg^*$ –унарная операция на U, D – множество значений, выделенных в M, причем $D \subset U$ и $0 \notin D$.

Оценку в матрице M определим как отображение множества $\{\mathbf{p_1}, \mathbf{p_2}, \mathbf{p_3}, \ldots\}$ в U.

Значение $L_{\supset\neg}$-формулы в матрице M при оценке v определяется индукцией по построению $L_{\supset\neg}$-формулы:

1. $|\mathbf{p}|_v^M = v(\mathbf{p})$, если $\mathbf{p}$ есть пропозициональная переменная,

2. Если $\mathbf{B}$ и $\mathbf{C}$ есть $L_{\supset\neg}$-формулы, то $|(\mathbf{B} \supset \mathbf{C})|_v^M = |\mathbf{B}|_v^M \supset^* |\mathbf{C}|_v^M$,

3. Если $\mathbf{B}$ есть $L_{\supset\neg}$-формула, то $|(\neg \mathbf{B})|_v^M = \neg^* |\mathbf{B}|_v^M$.

Если существует оценка v в M_i такая, что $|\mathbf{A}|_v^M \in D$, будем говорить, что $\mathbf{A}$ выполнима в M.

Будем говорить, что формула $\mathbf{A}$ *общезначима* в M, е.т.е при всякой оценке v $\mathbf{A}$ принимает выделенное значение.

Будем говорить, что в M из множества формул $\mathbf{\Gamma}$ *логически следует* формула $\mathbf{B}$ (символически – $\models$), е.т.е не существует такой оценки v, что каждая формула $\mathbf{A}$ из $\mathbf{\Gamma}$ принимает выделенное значение и $\mathbf{B}$ не принимает выделенное значение.

Отношение логического следования в некоторой матрице назовем *классическим*, если и только если в этой матрице заключение логически следует из посылок, если и только если оно логически следует из посылок в матрице для классической логики.

Под многозначным изоморфом классической пропозициональной логики будем понимать такую матрицу $M' = \langle U, \supset', \neg', D \rangle$, что U содержит не менее трех элементов и все формулы, общезначимые в M' общезначимы в M_2.

Изоморф M' называется *нормальным*, если отношение логического следования в M' является классическим.

Изоморф называется *С-расширяющим*, если операции $\supset'$ и $\neg'$ совпадают на множестве $\{1, 0\}$ с классическими операциями для импликации и отрицания.

2.1. Матрицы с одним выделенным значением

Рассмотрим логические матрицы $M_2 = \langle\{1, 0\}, \supset_2, \neg_2, \{1\}\rangle$ и $M_3 = \langle\{1, ½, 0\}, \supset_3, \neg_3, \{1\}\rangle$.

Определим базовые операции логической матрицы $M_2 = \langle\{1, 0\}, \supset, \neg, \{1\}\rangle$ следующим образом:

$\supset_2$	1	0
1	1	0
0	1	1

x	$\neg_2 x$
1	0
0	1

Ясно, что M_2 – характеристическая матрица для классической логики высказываний.

Для формулировки Теоремы 1 о свойствах нормальных трехзначных изоморфов с одним выделенным значением нам потребуется определение *0*-замещения отображения v.

Для всякого отображения v множества всех пропозициональных переменных в {0, ½, 1} называем *0*-замещением отображения v такое отображение w множества всех пропозициональных переменных в {0, 1}, что для всякой пропозициональной переменной **p**

$$w(\mathbf{p}) = \begin{cases} v(\mathbf{p}), \text{ если } v(\mathbf{p}) \in \{0,1\}; \\ 0, \text{ если } v(\mathbf{p}) = ½. \end{cases}$$

Можно доказать, что для всякого отображения множества всех пропозициональных переменных в {0, ½, 1} существует единственное *0*-замещение этого отображения. Обозначим через $\bar{v}$ *0*-замещение отображения v. Определим φ_0 как множество {<0, 0>, <½, 0>, <1, 1>}. Ясно, что φ_0 есть отображение множества {0, ½, 1} на множество {0, 1}.

Сформулируем Теорему 1.

Теорема 1.

Отношение логического следования в M_3 является классическим, если и только если $\varphi_0|\mathbf{A}|_v^{M_3} = |\mathbf{A}|_{\bar{v}}^{M_2}$ для каждой $L_{\supset\neg}$-формулы **A** и оценки v в M_3.

Чтобы доказать Теорему 1, необходимо и достаточно доказать следующие утверждения У1 и У2:

У1. Если отношение логического следования в M_3 является классическим, то для каждой $L_{\supset\neg}$-формулы **A** и оценки v в M_3 $\varphi_0|\mathbf{A}|_v^{M_3} = |\mathbf{A}|_{\bar{v}}^{M_2}$.

У2. Если для каждой $L_{\supset\neg}$-формулы **A** и оценки v в M_3 $\varphi_0|\mathbf{A}|_v^{M_3} = |\mathbf{A}|_{\bar{v}}^{M_2}$, то отношение логического следования в M_3 является классическим.

Докажем утверждение У1 индукцией по длине $L_{\supset\neg}$-формулы **A**. Для доказательства нам потребуются две Леммы.

Лемма 1.

Пусть **A** есть $L_{\supset\neg}$-формула, ξ есть отображение множества всех пропозициональных переменных во множество {0, ½, 1}, а ρ отображение множества всех пропозициональных переменных во множество {0, 1}. Тогда верно следующее:

(a) ξ есть оценка в M_3,

(b) ρ есть оценка в M_2,

(c) $|\mathbf{A}|_{\xi}^{M_3} \in \{0, ½, 1\}$,

(d) $|\mathbf{A}|_{\rho}^{M_2} \in \{0, 1\}$.

Эта лемма легко доказывается индукцией по построению по построению $L_{\supset\neg}$-формулы. Важным следствием из данной Леммы является тот факт, что, если v есть оценка в M_3, то $\bar{v}$ есть оценка в M_2.

Лемма 2.1.

Для каждого множества $L_{\supset\neg}$-формул **Г**, для каждой $L_{\supset\neg}$-формулы **B**, для каждой матрицы M_{k}, принадлежащей описанному выше классу, верно следующее: если верно, что $\mathbf{\Gamma} \models_{M_2} \mathbf{B}$ е.т.е $\mathbf{\Gamma} \models_{M_k} \mathbf{B}$, тогда, если v есть оценка в M_2, v' есть оценка в M_{k} и **A** есть $L_{\supset\neg}$-формула, то (i) $\forall v|\mathbf{A}|_{v}^{M_2} = 1$ е.т.е. $\forall\ v'\ |\mathbf{A}|_{v'}^{M_k} \in D_{\mathrm{k}}$; (ii) $\neg\exists v|\mathbf{A}|_{v}^{M_2} = 1$ е.т.е. $\neg\exists\ v'\ |\mathbf{A}|_{v'}^{M_k} \in D_{\mathrm{k}}$.

Докажем утверждение (i).

(1) неверно, что (i) (допущение).

(2) $\mathbf{\Gamma} \models_{M_2} \mathbf{B}$ е.т.е $\mathbf{\Gamma} \models_{M_k} \mathbf{B}$ (из (1)).

(3) неверно, что $\forall v|\mathbf{A}|_{v}^{M_2} = 1$ е.т.е. $\forall\ v'\ |\mathbf{A}|_{v'}^{M_k} \in D_{\mathrm{k}}$ (из (1)).

(4) $\exists\mathbf{A}(\exists v|\mathbf{A}|_{v}^{M_2} = 0$ и $\forall\ v'\ |\mathbf{A}|_{v'}^{M_k} \in D_{\mathrm{k}})$ или $\exists\mathbf{A}(\forall v|\mathbf{A}|_{v}^{M_2} = 1$ и $\exists\ v'\ |\mathbf{A}|_{v'}^{M_k} \notin D_{\mathrm{k}})$ (из (3), по определению оценки).

(5) $\exists\mathbf{A}(\exists v|\mathbf{A}|_{v}^{M_2} = 0$ и $\forall\ v'\ |\mathbf{A}|_{v'}^{M_k} \in D_{\mathrm{k}})$ (допущение).

(6) пусть $\exists v|\mathbf{A}^*|_{v}^{M_2} = 0$ и $\forall\ v'\ |\mathbf{A}^*|_{v'}^{M_k} \in D_{\mathrm{k}}$.

(7) $\exists v|\mathbf{A}^*|_{v}^{M_2} = 0$ (из (6)).

(8) $\forall\, v'\, |\mathbf{A}^*|^{M_k}_{v'} \in D_{\text{k}}$ (из (6)).

(9) $\neg\exists\, v'\, |\mathbf{A}^*|^{M_k}_{v'} \notin D_{\text{k}}$ (из (8)).

(10) $\models_{M_k} \mathbf{A}^*$ (из (9) по определению отношения логического следования).

(11) неверно, что $\models_{M_2} \mathbf{A}^*$ (из (7) по определению отношения логического следования).

(12) неверно, что (2) (из (10), (11)).

(13) неверно, что (5) (из (2), (12)).

(14) $\exists\mathbf{A}(\forall v|\mathbf{A}|^{M_2}_{v} = 1$ и $\exists\, v'\, |\mathbf{A}|^{M_k}_{v'} \notin D_{\text{k}})$ (из (13), (4)).

(15) пусть $\forall v|\mathbf{A}^*|^{M_2}_{v} = 1$ и $\exists\, v'\, |\mathbf{A}^*|^{M_k}_{v'} \notin D_{\text{k}}$.

(16) $\forall v|\mathbf{A}^*|^{M_2}_{v} = 1$ (из (15)).

(17) $\neg\exists|\mathbf{A}^*|^{M_2}_{v} \neq 1$ (из (16)).

(18) $\models_{M_2} \mathbf{A}^*$ (из (17) по определению отношения логического следования).

(19) $\exists\, v'\, |\mathbf{A}^*|^{M_k}_{v'} \notin D_{\text{k}}$ (из (15)).

(20) неверно, что $\models_{M_k} \mathbf{A}^*$ (из (19), по определению отношения логического следования).

(21) неверно, что (2) (из (20), (18)).

(22) неверно, что (1) (из (21), (2)).

Докажем утверждение (ii).

(1) неверно, что (ii) (допущение).

(2) $\mathbf{\Gamma} \models_{M_2} \mathbf{B}$ е.т.е $\mathbf{\Gamma} \models_{M_k} \mathbf{B}$ (из (1)).

(3) неверно, что $\neg\exists v|\mathbf{A}|^{M_2}_{v} = 1$ е.т.е. $\neg\exists\, v'\, |\mathbf{A}|^{M_k}_{v'} \in D_{\text{k}}$ (из (1)).

(4) $\exists\mathbf{A}(\exists v|\mathbf{A}|^{M_2}_{v} = 1$ и $\neg\exists\, v'\, |\mathbf{A}|^{M_k}_{v'} \in D_{\text{k}})$ или $\exists\mathbf{A}(\neg\exists v|\mathbf{A}|^{M_2}_{v} = 1$ и $\exists\, v'\, |\mathbf{A}|^{M_k}_{v'} \in D_{\text{k}})$ (из (3)).

(5) $\exists\mathbf{A}(\exists v|\mathbf{A}|^{M_2}_{v} = 1$ и $\neg\exists\, v'\, |\mathbf{A}|^{M_k}_{v'} \in D_{\text{k}})$ (допущение).

(6) пусть $\exists v|\mathbf{A}^*|^{M_2}_{v} = 1$ и $\neg\exists\, v'\, |\mathbf{A}^*|^{M_k}_{v'} \in D_{\text{k}}$.

(7) $\neg\exists\, v'\, |\mathbf{A}^*|^{M_k}_{v'} \in D_{\mathrm{k}}$ (из (5)).

(8) α – пропозициональная переменная языка $L_{\supset\neg}$, не входящая в $\mathbf{A}^*$.

(9) $\mathbf{A}^* \models_{M_k} \alpha$ (из (8), (7), по определению отношения логического следования).

(10) $\exists v|\mathbf{A}^*|^{M_2}_{v} = 1$ (из (6)).

(11) пусть $|\mathbf{A}^*|^{M_2}_{v^*} = 1$.

(12) пусть v^{**} оценка в M_2 такая, что $|\alpha|^{M_2}_{v^{**}} = 0$ и, если $\mathbf{p}_{\mathrm{i}}$ входит в $\mathbf{A}^*$, то $|\mathbf{p}_{\mathrm{i}}|^{M_2}_{v^{**}} = |\mathbf{p}_{\mathrm{i}}|^{M_2}_{v^*}$.

(13) $|\mathbf{A}|^{M_2}_{v^{**}} = 1$ (из (12), (11), по определению значения формулы).

(14) неверно, что $\mathbf{A}^* \models_{M_2} \alpha$ (из (12), (13), по определению отношения логического следования).

(15) неверно, что (2) (из (14), (9)).

(16) неверно, что (5) (из (15), (2)).

(17) $\exists\mathbf{A}(\neg\exists v|\mathbf{A}|^{M_2}_{v} = 1$ и $\exists\, v'\, |\mathbf{A}|^{M_k}_{v'} \in D_{\mathrm{k}})$ (из (16), (4)).

(18) пусть $\neg\exists v|\mathbf{A}^*|^{M_2}_{v} = 1$ и $\exists\, v'\, |\mathbf{A}^*|^{M_k}_{v'} \in D_{\mathrm{k}}$.

(19) $\neg\exists v|\mathbf{A}^*|^{M_2}_{v} = 1$ (из (18)).

(20) $\mathbf{A}^* \models_{M_2} \alpha$ (из (19), (8), по определению отношения логического следования).

(21) $\exists\, v'\, |\mathbf{A}^*|^{M_k}_{v'} \in D_{\mathrm{k}}$ (из (18)).

(22) пусть $|\mathbf{A}^*|^{M_k}_{v''} \in D_{\mathrm{k}}$.

(23) пусть v''' оценка в M_3 такая, что $|\alpha|^{M_k}_{v'''} = 0$ и, если $\mathbf{p}_{\mathrm{i}}$ входит в $\mathbf{A}^*$, то $|\mathbf{p}_{\mathrm{i}}|^{M_k}_{v'''} = |\mathbf{p}_{\mathrm{i}}|^{M_k}_{v''}$.

(24) $|\mathbf{A}^*|^{M_k}_{v'''} = 1$ (из (23), (22) по определению значения формулы).

(25) неверно, что $\mathbf{A}^* \models_{M_k} \alpha$ (из (24), (23), по определению отношения логического следования).

(26) неверно, что (2) (из (20), (25)).

(27) неверно, что (1) (из (26), (2)).

Лемма 2.1 доказана.

Переходим непосредственно к доказательству теоремы.

Пусть У1 верно для формул, которые содержат менее, чем n вхождений связок. Тогда достаточно доказать, что У1 верно, если $L_{\supset\neg}$-формула **A** содержит в точности n вхождений связок и графически совпадает с формулой $\neg\mathbf{C}$ либо с формулой $\mathbf{D} \supset \mathbf{E}$.

Случай 1. Пусть $L_{\supset\neg}$-формула **A** содержит в точности n вхождений связок и графически совпадает с формулой $\neg$ **C**.

(1) неверно, что У1 (допущение).

(2) $\mathbf{\Gamma} \models_{M_2} \mathbf{B}$ е.т.е. $\mathbf{\Gamma} \models_{M_3} \mathbf{B}$ (из (1)).

(3) неверно, что $\forall(\neg\mathbf{C})\forall v$: если $\neg\mathbf{C}$ есть $L_{\supset\neg}$-формула и v – оценка в M_3, то $\varphi_0|\neg\mathbf{C}|^{M_3}_{v} = |\neg\mathbf{C}|^{M_2}_{\bar{v}}$ (из (1)).

(4) $\exists\neg\mathbf{C}\exists v$: $\neg\mathbf{C}$ есть $L_{\supset\neg}$-формула, v – оценка в M_3 и $\varphi_0|\neg\mathbf{C}|^{M_3}_{v} \neq |\neg\mathbf{C}|^{M_2}_{\bar{v}}$ (из (3)).

(5) $\exists\neg\mathbf{C}\exists v$: $\neg\mathbf{C}$ есть $L_{\supset\neg}$-формула, v – оценка в M_3 и ($\varphi_0|\neg\mathbf{C}|^{M_3}_{v} = 1$ и $|\neg\mathbf{C}|^{M_2}_{\bar{v}} = 0$) или ($\varphi_0|\neg\mathbf{C}|^{M_3}_{v} = 0$ и $|\neg\mathbf{C}|^{M_2}_{\bar{v}} = 1$) (из (4), того факта, что v^* и $\bar{v}^*$ суть оценки в соответствующих матрицах и определения φ_0).

(6) $\exists\neg\mathbf{C}\exists v$: $\neg\mathbf{C}$ есть $L_{\supset\neg}$-формула, v – оценка в M_3 и ($\varphi_0|\neg\mathbf{C}|^{M_3}_{v} = 1$ и $|\neg\mathbf{C}|^{M_2}_{\bar{v}} = 0$) (допущение).

(7) пусть $\neg\mathbf{C}^*$ и v^* есть такие, соответственно, $L_{\supset\neg}$-формула и оценка в M_3, что $\varphi_0|\neg\mathbf{C}^*|^{M_3}_{v^*} = 1$ и $|\neg\mathbf{C}^*|^{M_2}_{\bar{v}^*} = 0$ (из (6), исключение кванторов).

(8) $\varphi_0|\neg\mathbf{C}^*|^{M_3}_{v^*} = 1$ и $|\neg\mathbf{C}^*|^{M_2}_{\bar{v}^*} = 0$ (из (7)).

(9) $\varphi_0|\neg\mathbf{C}^*|^{M_3}_{v^*} = 1$ (из (8)).

(10) $|\neg\mathbf{C}^*|^{M_3}_{v^*} = 1$ (из (9) по определению φ_0).

(11) $|\neg\mathbf{C}^*|^{M_2}_{\bar{v}^*} = 0$ (из (8)).

(12) $\neg^2|\mathbf{C}^*|^{M_2}_{\bar{v}^*} = 0$ (по определению значения $L_{\supset\neg}$-формулы).

(13) $|\mathbf{C}^*|^{M_2}_{\bar{v}^*} = 1$ (по определению $\neg_2$).

(14) У1 верно для **C***. (индуктивное допущение).

(15) $\mathbf{C}^*$ есть $L_{\supset\neg}$-формула (по определению $L_{\supset\neg}$-формулы).

(16) $\varphi_0|\mathbf{C}^*|^{M_3}_{v^*} = |\mathbf{C}^*|^{M_2}_{\bar{v}^*}$ (из (15), (14), (2)).

(17) $\varphi_0|\mathbf{C}^*|^{M_3}_{v^*} = 1$ (из (13) и (16)).

(18) $|\mathbf{C}^*|^{M_3}_{v^*} = 1$ (из (17) по определению φ_0).

(19) $\forall\mathbf{A}$: если $\mathbf{A}$ есть $L_{\supset\neg}$-формула, то $\mathbf{C}^*, \neg\mathbf{C}^* \models_{M_2} \mathbf{A}$ (по определению $\neg_2$, а также по определению отношения логического следования).

(20) пусть $\mathbf{A}$ есть пропозициональная переменная α, не имеющая вхождений в $\mathbf{C}^*$.

(21) $\mathbf{C}^*, \neg\mathbf{C}^* \models_{M_2} \alpha$ (из (19), (20) по определению $L_{\supset\neg}$-формулы).

(22) $\mathbf{C}^*, \neg\mathbf{C}^* \models_{M_3} \alpha$ (из (2)).

(23) пусть v^{**} оценка в M_3, такая что, если $\mathbf{p}_i$ входит в $\mathbf{C}^*$, то $v^{**}(\mathbf{p}_i) = v^*(\mathbf{p}_i)$, и $v^{**}(\alpha) = 0$.

(24) $|\mathbf{C}^*|^{M_3}_{v^{**}} = 1$, $|\neg\mathbf{C}^*|^{M_3}_{v^{**}} = 1$, $|\alpha|^{M_3}_{v^{**}} = 0$ (из (10), (18) и (23)).

(25) неверно, что $\mathbf{C}^*, \neg\mathbf{C}^* \models_{M_3} \alpha$ (из (24), по определению отношения логического следования).

(26) неверно, что (5) (из (22) и (25)).

(27) $\exists\neg\mathbf{C}\exists v$: $\neg\mathbf{C}$ есть $L_{\supset\neg}$-формула, v – оценка в M_3 и ($\varphi_0|\neg\mathbf{C}|^{M_3}_{v} = 0$ и $|\neg\mathbf{C}|^{M_2}_{\bar{v}} = 1$) (из (26), (5)).

(28) пусть $\neg\mathbf{C}^*$ и v^* есть такие, соответственно, $L_{\supset\neg}$-формула и оценка в M_3, что $\varphi_0|\neg\mathbf{C}^*|^{M_3}_{v^*} = 1$ и $|\neg\mathbf{C}^*|^{M_2}_{\bar{v}^*} = 0$ (из (26), исключение кванторов).

(29) $\varphi_0|\neg\mathbf{C}^*|^{M_3}_{v^*} = 0$ и $|\neg\mathbf{C}^*|^{M_2}_{\bar{v}^*} = 1$ (из (27)).

(30) $\varphi_0|\neg\mathbf{C}^*|^{M_3}_{v^*} = 0$ (из (29)).

(31) $|\neg\mathbf{C}^*|^{M_3}_{v^*} \in \{½, 0\}$ (из (30), по определению φ_0).

(32) $|\neg\mathbf{C}^*|^{M_3}_{v^*} = \neg_3|\mathbf{C}^*|^{M_3}_{v^*}$ (по определению значения $L_{\supset\neg}$-формулы).

(33) $|\neg\mathbf{C}^*|^{M_2}_{\bar{v}^*} = 1$ (из 29).

(34) $|\neg\mathbf{C}^*|^{M_2}_{\bar{v}^*} = \neg_2|\mathbf{C}^*|^{M_2}_{\bar{v}^*}$ (по определению значения $L_{\supset\neg}$-формулы).

(35) $|\mathbf{C}^*|^{M_2}_{\bar{v}^*} = 0$ (из (33), (34), по определению $\neg_2$).

(36) $\varphi_0|\mathbf{C}^*|^{M_3}_{v^*} = |\mathbf{C}^*|^{M_2}_{\bar{v}^*}$ (индуктивное допущение).

(37) $\varphi_0|\mathbf{C}^*|^{M_3}_{v^*} = 0$ (из (35) и (36)).

(38) $|\mathbf{C}^*|^{M_3}_{v^*} \in \{½, 0\}$ (из (37), по определению φ_0).

(39) пусть $|\mathbf{C}^*|^{M_3}_{v^*} = x$ и $|\neg\mathbf{C}^*|^{M_3}_{v^*} = y$. Верно следующее: $x, y \in \{½, 0\}$ и $\neg_3\, x = y$ (из (31), (32), (38) и того факта, что $\neg_3$ есть унарная операция, заданная на $\{1, ½, 0\}$).

(40) $\forall z$: если $z \in \{½, 0\}$, то $\neg_3 z \in \{½, 0\}$ или $\exists z$: $z \in \{½, 0\}$ и $\neg_3 z = 1$ (из (39) и того факта, что $\neg_3$ есть унарная операция, заданная на $\{1, ½, 0\}$).

(41) $\forall z$: если $z \in \{½, 0\}$, то $\neg_3 z \in \{½, 0\}$ (допущение).

(42) пусть формула **F** не выполнима в M_2

(43) формула **F** не выполнима в M_3 (из (2), по Лемме 2.1).

(44) формула $\neg$**F** общезначима в M_2 (из (40), в силу определений операции $\neg_2$, выполнимой формулы и общезначимой формулы).

(45) формула $\neg$**F** общезначима в M_3 (из (2), по Лемме 2.1).

(46) $\forall v$: если v – оценка в M_3, то $|\mathbf{F}|^{M_3}_{v} \in \{½, 0\}$ (из (41) по определению выполнимой формулы).

(47) $\forall v$: если v – оценка в M_3, то $|(\neg\mathbf{F})|^{M_3}_{v} \in \{½, 0\}$ (из (41), (46), по определению значения $L_{\supset\neg}$-формулы).

(48) неверно, что (41) (из (45), (47), по определению общезначимой формулы).

(49) $\exists z$: $z \in \{½, 0\}$ и $\neg_3 z = 1$ (из (48), (40)).

(50) в силу того, что $\neg_3$ есть унарная операция, заданная на $\{1, ½, 0\}$, и пунктов (49), (40) настоящего доказательства, операция $\neg_3$ задается одной из следующих таблиц:

	(a)	(b)	(c)	(d)	(e)	(f)	(g)	(h)
1	0	0	0	0	½	½	½	½
½	½	0	1	1	½	0	1	1
0	1	1	½	0	1	1	½	0

Однако, в случаях (b), (c), (f), (g), неверно, что $\neg\neg\mathbf{p} \models_{M_3} \mathbf{p}$. В случаях (d), (e) неверно, что $\mathbf{p} \models_{M_3} \neg\neg\mathbf{p}$. Рассмотрим случай (h). Пусть $v(\mathbf{p}) = 0$. Тогда $|\neg\mathbf{p}|_v^{M_3} = 0$. Чтобы имело место $\models_{M_3} (\mathbf{p} \supset \mathbf{p})$, необходимо, чтобы $x \supset_3 x = 1$. Следовательно, $|\neg\mathbf{p} \supset \mathbf{p}\,|_v^{M_3} = 1$. В силу определения φ_0, $\varphi_0|\neg\mathbf{p} \supset \mathbf{p}\,|_v^{M_3} = 1$. Однако $\bar{v}(0) = 0$. Отсюда получаем: $|\neg\mathbf{p} \supset \mathbf{p}\,|_{\bar{v}}^{M_2} = 0$. Противоречие с пунктом (26). Таким образом, остается единственный вариант отрицания – (a).

(51) рассмотрим формулу $(\mathbf{p} \supset \neg\mathbf{p}) \supset \neg(\neg\mathbf{p} \supset \mathbf{p})$. $v(\mathbf{p}) = ½$. Тогда $|\neg\mathbf{p}|_v^{M_3} = ½$. Так как $x \supset_3 x = 1$, $|\mathbf{p} \supset \neg\mathbf{p}|_v^{M_3} = 1$ и $|\neg(\neg\mathbf{p} \supset \mathbf{p})|_v^{M_3} = 0$. Если $1 \supset_3 0 = 1$, неверно, что $\mathbf{p}, \mathbf{p} \supset \mathbf{q} \models_{M_3} \mathbf{q}$, что противоречит пункту (2). Таким образом, $|(\mathbf{p} \supset \neg\mathbf{p}) \supset \neg(\neg\mathbf{p} \supset \mathbf{p})|_v^{M_3} \neq 1$. Следовательно, неверно, что $\models_{M_3} (\mathbf{p} \supset \neg\mathbf{p}) \supset \neg(\neg\mathbf{p} \supset \mathbf{p})$. Вновь получаем противоречие с пунктом (2).

(52) не существует такой унарной операции $\neg_3$ на $\{1, ½, 0\}$, что $x, y \in \{½, 0\}$ и $\neg_3\, x = y$ (из (51), (50)).

(53) неверно, что (1) (из (52), (41)).

Случай 2. Пусть $L_{\supset\neg}$-формула $\mathbf{A}$ содержит в точности n вхождений связок и графически совпадает с формулой $\mathbf{D} \supset \mathbf{E}$. Докажем, что У1 выполняется для $\mathbf{A}$.

(1) неверно, что У1 (допущение).

(2) $\mathbf{\Gamma} \models_{M_2} \mathbf{B}$ е.т.е. $\mathbf{\Gamma} \models_{M_3} \mathbf{B}$ (из (1)).

(3) неверно, что $\forall(\mathbf{D} \supset \mathbf{E})\forall v$: если $(\mathbf{D} \supset \mathbf{E})$ есть $L_{\supset\neg}$-формула и v – оценка в M_3, то $\varphi_0|(\mathbf{D} \supset \mathbf{E})|_v^{M_3} = |(\mathbf{D} \supset \mathbf{E})|_{\bar{v}}^{M_2}$ (из (1)).

(4) $\exists(\mathbf{D} \supset \mathbf{E})\exists v$: $(\mathbf{D} \supset \mathbf{E})$ есть $L_{\supset\neg}$-формула, v – оценка в M_3 и $\varphi_0|(\mathbf{D} \supset \mathbf{E})|^{M_3}_{v} \neq |(\mathbf{D} \supset \mathbf{E})|^{M_2}_{\bar{v}}$ (из (3)).

(5) пусть $(\mathbf{D}^* \supset \mathbf{E}^*)$ и v^* есть такие, соответственно, $L_{\supset\neg}$-формула и оценка в M_3, что $\varphi_0|(\mathbf{D}^* \supset \mathbf{E}^*)|^{M_3}_{v^*} \neq |(\mathbf{D}^* \supset \mathbf{E}^*)|^{M_2}_{\bar{v}^*}$ (из (4), исключение кванторов).

(6) $(\varphi_0|(\mathbf{D}^* \supset \mathbf{E}^*)|^{M_3}_{v^*} = 1$ и $|(\mathbf{D}^* \supset \mathbf{E}^*)|^{M_2}_{\bar{v}^*} = 0)$ или $(\varphi_0|(\mathbf{D}^* \supset \mathbf{E}^*)|^{M_3}_{v^*} = 0$ и $|(\mathbf{D}^* \supset \mathbf{E}^*)|^{M_2}_{\bar{v}^*} = 1)$ (из (5) и того факта, что v^* и $\bar{v}^*$ суть оценки в соответствующих матрицах).

(7) $\varphi_0|(\mathbf{D}^* \supset \mathbf{E}^*)|^{M_3}_{v^*} = 1$ и $|(\mathbf{D}^* \supset \mathbf{E}^*)|^{M_2}_{\bar{v}^*} = 0$ (допущение).

(8) $|(\mathbf{D}^* \supset \mathbf{E}^*)|^{M_2}_{\bar{v}^*} = 0$ (из (7)).

(9) $|(\mathbf{D}^* \supset \mathbf{E}^*)|^{M_2}_{\bar{v}^*} = |\mathbf{D}^*|^{M_2}_{\bar{v}^*} \supset_2 |\mathbf{E}^*|^{M_2}_{\bar{v}^*}$ (по определению значения $L_{\supset\neg}$-формулы).

(10) $|\mathbf{D}^*|^{M_2}_{\bar{v}^*} = 1$ и $|\mathbf{E}^*|^{M_2}_{\bar{v}^*} = 0$ (из (8), (9), по определению $\supset_2$).

(11) $\varphi_0|\mathbf{D}^*|^{M_3}_{v^*} = |\mathbf{D}^*|^{M_2}_{\bar{v}^*}$ и $\varphi_0|\mathbf{E}^*|^{M_3}_{v^*} = |\mathbf{E}^*|^{M_2}_{\bar{v}^*}$ (индуктивное допущение).

(12) $\varphi_0|\mathbf{D}^*|^{M_3}_{v^*} = 1$ и $\varphi_0|\mathbf{E}^*|^{M_3}_{v^*} = 0$ (из (10), (11)).

(13) $|\mathbf{D}^*|^{M_3}_{v^*} = 1$ и $|\mathbf{E}^*|^{M_3}_{v^*} \in \{½, 0\}$ (из (12), по определению φ_0).

(14) $\varphi_0|(\mathbf{D}^* \supset \mathbf{E}^*)|^{M_3}_{v^*} = 1$ (из (7)).

(15) $|(\mathbf{D}^* \supset \mathbf{E}^*)|^{M_3}_{v^*} = 1$ (из (14), по определению φ_0).

(16) $\mathbf{D}^*, \mathbf{D}^* \supset \mathbf{E}^* \models_{M_2} \mathbf{E}^*$

(17) $\mathbf{D}^*, \mathbf{D}^* \supset \mathbf{E}^* \models_{M_3} \mathbf{E}^*$ (из (16) и (2)).

(18) при оценке v^* $\mathbf{D}^*$ и $\mathbf{D}^* \supset \mathbf{E}^*$ принимают выделенное значение, а $\mathbf{E}^*$ – нет. Следовательно, неверно, что (17) (из (13), (15) и определения отношения логического следования).

(19) неверно, что (7). (из (17) и (18)).

(20) $\varphi_0|(\mathbf{D}^* \supset \mathbf{E}^*)|^{M_3}_{v^*} = 0$ и $|(\mathbf{D}^* \supset \mathbf{E}^*)|^{M_2}_{\bar{v}^*} = 1$ (из (6), (19)).

(21) $|(\mathbf{D}^* \supset \mathbf{E}^*)|^{M_2}_{\bar{v}^*} = 1$ (из (20)).

(22) $|\mathbf{D}^*|^{M_2}_{\bar{v}^*} \supset_2 |\mathbf{E}^*|^{M_2}_{\bar{v}^*} = 1$ (из (21), по определению значения $L_{\supset\neg}$-формулы).

(23) $|\mathbf{D}^*|^{M_2}_{\bar{v}^*} = 0$ или $|\mathbf{E}^*|^{M_2}_{\bar{v}^*} = 1$ (из (22), по определению $\supset_2$).

(24) пусть $|\mathbf{E}^*|^{M_2}_{\bar{v}^*} = 1$ (допущение).

(25) $\varphi_0|\mathbf{E}^*|^{M_3}_{v^*} = |\mathbf{E}^*|^{M_2}_{\bar{v}^*}$ (индуктивное допущение).

(26) $\varphi_0|\mathbf{E}^*|^{M_3}_{v^*} = 1$ (из (24), (25)).

(27) $|\mathbf{E}^*|^{M_3}_{v^*} = 1$ (из (26), по определению φ_0).

(28) $\varphi_0|(\mathbf{D}^* \supset \mathbf{E}^*)|^{M_3}_{v^*} = 0$ (из (20)).

(29) $|(\mathbf{D}^* \supset \mathbf{E}^*)|^{M_3}_{v^*} \in \{½, 0\}$ (из (28), по определению φ_0).

(30) $|\mathbf{D}^*|^{M_3}_{v^*} \supset^3 |\mathbf{E}^*|^{M_3}_{v^*} \in \{½, 0\}$ (из (30), по определению значения $L_{\supset\neg}$-формулы).

(31) $\exists z(z \in \{1, ½, 0\}$ и $z \supset_3 1 \in \{½, 0\})$ (из (27), (30)).

(32) пусть $\models_{M_2} \mathbf{G}$.

(33) пусть α есть пропозициональная переменная языка $L_{\supset\neg}$.

(34) $\models_{M_2} \alpha \supset \mathbf{G}$ (из (32)).

(35) $\models_{M_3} \alpha \supset \mathbf{G}$ (из (2)).

(36) пусть v^{**} оценка в M_3, такая что $v^{**}(\alpha) = z$. Тогда $|\alpha \supset \mathbf{G}|^{M_3}_{v^{**}} \in \{½, 0\}$ (из (31)).

(37) неверно, что (35) (из (36) по определению общезначимой формулы).

(38) неверно, что (24) (из (37) и (35)).

(39) $|\mathbf{D}^*|^{M_2}_{\bar{v}^*} = 0$ (из (23), (38)).

(40) $\varphi_0|\mathbf{D}^*|^{M_3}_{v^*} = 0$ (индуктивное допущение).

(41) $|\mathbf{D}^*|^{M_3}_{v^*} \in \{½, 0\}$ (из (40)).

(42) $\exists z_1 \exists z_2(z_1, z_2 \in \{½, 0\}$ и $z_1 \supset^3 z_2 \in \{½, 0\})$ (из (27), (30)).

(43) $\models_{M_2} \neg\alpha \supset (\alpha \supset \beta)$, где α и β – пропозициональные переменные языка $L_{\supset\neg}$ (в силу определения M_2).

(44) $\models_{M_3} \neg\alpha \supset (\alpha \supset \beta)$ (из (43), (2)).

(45) пусть v^{**} оценка в M_3, такая что $v^{**}(\alpha) = z_1$, $v^{**}(\beta) = z_2$.

(46) $|\alpha \supset \beta|^{M_3}_{v^{**}} \in \{½, 0\}$ (из (45), (42)).

(47) $|\alpha|^{M_3}_{v^{**}} \in \{½, 0\}$ (из (45), (42) и определения *0*-замещения).

(48) $\neg_3|\alpha|^{M_3}_{v^{**}} = 1$ (из (47), в силу Случая 1 настоящего доказательства).

(49) $|\neg\alpha|^{M_3}_{v^{**}} = 1$ (из (48), по определению значения $L_{\supset\neg}$-формулы).

(50) $|\alpha \supset \beta|^{M_2}_{\bar{v}^{**}} = 0$ (из (49), (45), (42), в силу определений $\supset_2$ и *0*-замещения).

(51) $|\neg\alpha|^{M_2}_{\bar{v}^{**}} = 1$ (из (49), (45), (42), в силу определений $\neg_2$ и *0*-замещения).

(52) $|(\neg\alpha) \supset (\alpha \supset \beta)|^{M_2}_{\bar{v}^{**}} = 0$ (из (50), (51) , по определению $\supset_2$ и по определению значения $L_{\supset\neg}$-формулы).

(53) $\varphi_0|(\neg\alpha) \supset (\alpha \supset \beta)|^{M_3}_{v^{**}} = 0$ (из (52), (19)).

(54) $|(\neg\alpha) \supset (\alpha \supset \beta)|^{M_3}_{v^{**}} \in \{½, 0\}$ (из (53), по определению *0*-замещения).

(55) неверно, что (44) (из (51) по определению общезначимой формулы).

(56) неверно, что (1) (из (55), (44)).

У1 доказано.

Докажем У2.

(1) неверно, что У2 (допущение).

(2) $\forall\mathbf{A}\forall v$: если $\mathbf{A}$ есть $L_{\supset\neg}$-формула и v – оценка в M_3, то $\varphi_0|\mathbf{A}|^{M_3}_{v} = |\mathbf{A}|^{M_2}_{\overset{=}{v}}$ (из (1)).

(3) неверно, что $\mathbf{\Gamma} \models_{M_2} \mathbf{B}$ е.т.е. $\mathbf{\Gamma} \models_{M_3} \mathbf{B}$ (из (1)).

(4) $\exists\mathbf{\Gamma}\exists\mathbf{B}$: $\mathbf{\Gamma} \models_{M_2} \mathbf{B}$ и неверно, что $\mathbf{\Gamma} \models_{M_3} \mathbf{B}$ или $\exists\mathbf{\Gamma}\exists\mathbf{B}$: $\mathbf{\Gamma} \models_{M_3} \mathbf{B}$ и неверно, что $\mathbf{\Gamma} \models_{M_2} \mathbf{B}$ (из (3)).

(5) $\exists\mathbf{\Gamma}\exists\mathbf{B}$: $\mathbf{\Gamma} \models_{M_2} \mathbf{B}$ и неверно, что $\mathbf{\Gamma} \models_{M_3} \mathbf{B}$ (допущение).

(6) для каждой оценки в M_2, для каждых $\mathbf{\Gamma}$ и $\mathbf{B}$ верно, что, если каждая формула из $\mathbf{\Gamma}$ принимает выделенное значение, то $\mathbf{B}$ принимает выделенное значение при этой оценке (из (2)).

(7) найдется такая оценка в M_3, множество посылок $\mathbf{\Gamma}$ и заключение $\mathbf{B}$, что все формулы из $\mathbf{\Gamma}$ примут выделенное значение и $\mathbf{B}$ примет невыделенное значение (из (2)).

(8) пусть v^* – оценка в M_3 и $\forall\mathbf{A}$: если $\mathbf{A} \in \mathbf{\Gamma}^*$, то $|\mathbf{A}|^{M_3}_{v^*} = 1$ и $|\mathbf{B}^*|^{M_3}_{v^*} \in \{½, 0\}$ (из (7), исключение кванторов).

(9) $\forall\mathbf{A}$: если $\mathbf{A} \in \mathbf{\Gamma}^*$, то $|\mathbf{A}|^{M_3}_{v^*} = 1$ (из (8)).

(10) $\forall\mathbf{A}$: если $\mathbf{A} \in \mathbf{\Gamma}^*$, то $\varphi_0|\mathbf{A}|^{M_3}_{v^*} = 1$ (из (9), по определению φ_0).

(11) $\forall\mathbf{A}$: если $\mathbf{A} \in \mathbf{\Gamma}^*$, то $|\mathbf{A}|^{M_2}_{\bar{v}^*} = 1$ (из (10), (2)).

(12) если $\forall\mathbf{A}$: если $\mathbf{A} \in \mathbf{\Gamma}^*$, то $|\mathbf{A}|^{M_2}_{\bar{v}^*} = 1$, то $|\mathbf{B}^*|^{M_2}_{\bar{v}^*} = 1$ (из (3), исключение квантора).

(13) $|\mathbf{B}^*|^{M_2}_{\bar{v}^*} = 1$ (из (12), (11)).

(14) $|\mathbf{B}^*|^{M_3}_{v^*} \in \{½, 0\}$ (из (8)).

(15) $\varphi_0|\mathbf{B}^*|^{M_3}_{v^*} = 0$ (из (14), по определению φ_0).

(16) $|\mathbf{B}^*|^{M_2}_{\bar{v}^*} = 0$ (из (15), (2)).

(17) неверно, что (5) (из (16), (13)).

(18) $\exists \mathbf{\Gamma} \exists \mathbf{B}$: $\mathbf{\Gamma} \models_{M_3} \mathbf{B}$ и неверно, что $\mathbf{\Gamma} \models_{M_2} \mathbf{B}$ (из (17), (3)).

(19) для каждой оценки в M_3, для каждых **Г** и **B** верно, что, если каждая формула из **Г** принимает выделенное значение, то **B** принимает выделенное значение при этой оценке (из (18)).

(20) найдется такая оценка в M_2, множество посылок **Г** и заключение **B**, что все формулы из **Г** примут выделенное значение и **B** примет невыделенное значение (из (18)).

(21) пусть v^* – оценка в M_2 и $\forall \mathbf{A}$: если $\mathbf{A} \in \mathbf{\Gamma}^*$, то $|\mathbf{A}|^{M_2}_{v^*} = 1$ и $|\mathbf{B}^*|^{M_2}_{v^*} = 0$ (из (20), исключение кванторов).

(22) $\forall \mathbf{A}$: если $\mathbf{A} \in \mathbf{\Gamma}^*$, то $|\mathbf{A}|^{M_2}_{v^*} = 1$ (из (21)).

(23) $\forall \mathbf{A}$: если $|\mathbf{A}|^{M_2}_{v^*} = 1$, то $|\mathbf{A}|^{M_2}_{\bar{v}^*} = 1$ (из (12), по определению φ_0).

(24) $\forall \mathbf{A}$: если $\mathbf{A} \in \mathbf{\Gamma}^*$, то $\varphi_0|\mathbf{A}|^{M_3}_{v^*} = 1$ (из (22), (23), (2)).

(25) $\forall \mathbf{A}$: если $\mathbf{A} \in \mathbf{\Gamma}^*$, то $|\mathbf{A}|^{M_3}_{v^*} = 1$ (из (24), по определению φ_0).

(26) $|\mathbf{B}^*|^{M_3}_{v^*} = 1$ (из (25), (19)).

(27) $\varphi_0|\mathbf{B}^*|^{M_3}_{v^*} = 1$ (из (26), по определению φ_0).

(28) $|\mathbf{B}^*|^{M_2}_{\bar{v}^*} = 1$ (из (27), (2)).

(29) $|\mathbf{B}^*|^{M_2}_{v^*} = 0$ (из (21)).

(30) неверно, что (1) (из (26), (25)).

У2 доказано. Теорема доказана.

Благодаря доказанной выше теореме, мы можем сформулировать определение матрицы M_3, отвечающей следующим условиям: $L_{\supset\neg}$-формула **A** общезначима в M_3 е.т.е. **A** общезначима в M_2 и $\mathbf{\Gamma} \models_{M_2} \mathbf{B}$, е.т.е. $\mathbf{\Gamma} \models_{M_3} \mathbf{B}$.

Лемма 2.2.

Рассмотрим логическую матрицу $M_3 = \langle\{1, \frac{1}{2}, 0\}, \supset^3, \neg^3, \{1\}\rangle$. $\forall\mathbf{A}\forall v$: если $\mathbf{A}$ есть $L_{\supset\neg}$-формула и v – оценка в M_3, то $\varphi_0|\mathbf{A}|^{M_3}_{v} = |\mathbf{A}|^{M_2}_{\bar{v}*}$, тогда и только тогда, когда $\supset_3$ и $\neg_3$ отвечают следующим условиям:

$$x \supset_3 y \neq 1 \text{ е.т.е } x = 1 \text{ и } y \neq 1;$$
$$\neg_3\, x = 1 \text{ е.т.е } x \neq 1.$$

Пусть $\supset_3$ и $\neg_3$ отвечают условиям Леммы. Докажем индукцией по построению формулы, что $\forall\mathbf{A}\forall v$: если $\mathbf{A}$ есть $L_{\supset\neg}$-формула и v – оценка в M_3, то $\varphi_0|\mathbf{A}|^{M_3}_{v} = |\mathbf{A}|^{M_2}_{\bar{v}*}$.

Пусть $\varphi_0|\mathbf{A}|^{M_3}_{v} = |\mathbf{A}|^{M_2}_{\bar{v}*}$ имеет место для формул, которые содержат менее, чем n вхождений связок. Тогда достаточно доказать, что утверждение верно, если $L_{\supset\neg}$-формула $\mathbf{A}$ содержит в точности n вхождений связок и графически совпадает с формулой $\neg\mathbf{C}$ либо с формулой $\mathbf{D} \supset \mathbf{E}$.

Случай 1. Пусть $L_{\supset\neg}$-формула $\mathbf{A}$ содержит в точности n вхождений связок и графически совпадает с формулой $\neg\mathbf{C}$.

(1) $\varphi_0|\neg\mathbf{C}|^{M_3}_{v} \neq |\neg\mathbf{C}|^{M_2}_{\bar{v}*}$ (допущение).

(2) ($\varphi_0|\neg\mathbf{C}|^{M_3}_{v} = 0$ и $|\neg\mathbf{C}|^{M_2}_{\bar{v}*} = 1$) или ($\varphi_0|\neg\mathbf{C}|^{M_3}_{v} = 1$ и $|\neg\mathbf{C}|^{M_2}_{\bar{v}*} = 0$) (из (1), по определению φ_0 и определению оценки в M_2).

(3) $\varphi_0|\neg\mathbf{C}|^{M_3}_{v} = 0$ и $|\neg\mathbf{C}|^{M_2}_{\bar{v}*} = 1$ (допущение).

(4) $|\neg\mathbf{C}|^{M_2}_{\bar{v}*} = \neg_2|\mathbf{C}|^{M_2}_{\bar{v}*}$ (по определению значения $L_{\supset\neg}$-формулы).

(5) $\neg_2|\mathbf{C}|^{M_2}_{\bar{v}*} = 1$ (из (4), (3)).

(6) $|\mathbf{C}|^{M_2}_{\bar{v}*} = 0$ (из (5), по определению $\neg_2$).

(7) $\varphi_0|\mathbf{C}|^{M_3}_{v} = |\mathbf{C}|^{M_2}_{\bar{v}*}$ (индуктивное допущение).

(8) $\varphi_0|\mathbf{C}|^{M_3}_{v} = 0$ (из (7), (6)).

(9) $|\mathbf{C}|^{M_3}_{v} \in \{\frac{1}{2}, 0\}$ (из (8), по определению φ_0).

(10) $\neg_3|\mathbf{C}|^{M_3}_{v} = 1$ (из (9), по определению $\neg_3$).

(11) $\neg_3|\mathbf{C}|^{M_3}_{v} = |\neg\mathbf{C}|^{M_3}_{v}$ (из (10), по определению значения $L_{\supset\neg}$-формулы).

(12) $|\neg\mathbf{C}|_v^{M_3} = 1$ (из (11), (10)).

(13) $\varphi_0|\neg\mathbf{C}|_v^{M_3} = 1$ (из (12), по определению φ_0).

(14) $\varphi_0|\neg\mathbf{C}|_v^{M_3} = 0$ (из (3)).

(15) неверно, что (3) (из (14), (13)).

(16) $\varphi_0|\neg\mathbf{C}|_v^{M_3} = 1$ и $|\neg\mathbf{C}|_{\bar{v}*}^{M_2} = 0$ (из (15), (2)).

(17) $\neg_2|\mathbf{C}|_{\bar{v}*}^{M_2} = 0$ (из (16), (4)).

(18) $|\mathbf{C}|_{\bar{v}*}^{M_2} = 1$ (из (17)).

(19) $\varphi_0|\mathbf{C}|_v^{M_3} = 1$ (из (18), (7)).

(20) $|\mathbf{C}|_v^{M_3} = 1$ (из (19), по определению φ_0).

(21) $\neg_3|\mathbf{C}|_v^{M_3} \in \{½, 0\}$ (из (20), по определению $\neg_3$).

(22) $|\neg\mathbf{C}|_v^{M_3} \in \{½, 0\}$ (из (21), (11)).

(23) $\varphi_0|\neg\mathbf{C}|_v^{M_3} = 0$ (из (22), по определению φ_0).

(24) $\varphi_0|\neg\mathbf{C}|_v^{M_3} = 1$ (из (16)).

(25) неверно, что (1).

Случай 2. Пусть $L_{\supset\neg}$-формула **A** содержит в точности n вхождений связок и графически совпадает с формулой $\mathbf{D} \supset \mathbf{E}$. Докажем, что утверждение (i) выполняется для **A**.

(1) $\varphi_0|\mathbf{D} \supset \mathbf{E}|_v^{M_3} \neq |\mathbf{D} \supset \mathbf{E}|_{\bar{v}*}^{M_2}$ (допущение).

(2) ($\varphi_0|\mathbf{D} \supset \mathbf{E}|_v^{M_3} = 0$ и $|\mathbf{D} \supset \mathbf{E}|_{\bar{v}*}^{M_2} = 1$) или ($\varphi_0|\mathbf{D} \supset \mathbf{E}|_v^{M_3} = 1$ и $|\mathbf{D} \supset \mathbf{E}|_{\bar{v}*}^{M_2} = 0$) (из (1), по определению φ_0 и определению оценки в M_2).

(3) $\varphi_0|\mathbf{D} \supset \mathbf{E}|_v^{M_3} = 0$ и $|\mathbf{D} \supset \mathbf{E}|_{\bar{v}*}^{M_2} = 1$ (допущение).

(4) $\varphi_0|\mathbf{D} \supset \mathbf{E}|_v^{M_3} = 0$ (из (3)).

(5) $|\mathbf{D} \supset \mathbf{E}|_v^{M_3} \in \{½, 0\}$ (из (4), по определению φ_0).

(6) $|\mathbf{D} \supset \mathbf{E}|_v^{M_3} = |\mathbf{D}|_v^{M_3} \supset_3 |\mathbf{E}|_v^{M_3}$ (по определению значения $L_{\supset\neg}$-формулы).

(7) $|\mathbf{D}|_v^{M_3} \supset_3 |\mathbf{E}|_v^{M_3} \in \{½, 0\}$ (из (6), (5)).

(8) $|\mathbf{D}|_v^{M_3} = 1$ и $|\mathbf{E}|_v^{M_3} \in \{½, 0\}$ (из (7)).

(9) $\varphi_0|\mathbf{D}|_v^{M_3} = 1$ (из (8), по определению φ_0).

(10) $|\mathbf{D}|_{\bar{v}*}^{M_2} = 1$ (из (9), в силу индуктивного допущения).

(11) $\varphi_0|\mathbf{E}|_v^{M_3} = 0$ (из (8), по определению φ_0).

(12) $|\mathbf{E}|_{\bar{v}*}^{M_2} = 0$ (из (11), в силу индуктивного допущения).

(13) $|\mathbf{D}|_{\bar{v}*}^{M_2} \supset_2 |\mathbf{E}|_{\bar{v}*}^{M_2} = 0$ (из (12), (10), по определению $\neg_2$).

(14) $|\mathbf{D} \supset \mathbf{E}|_{\bar{v}*}^{M_2} = 0$ (из (13), по определению значения $L_{\supset\neg}$-формулы).

(15) $|\mathbf{D} \supset \mathbf{E}|_{\bar{v}*}^{M_2} = 1$ (из (3)).

(16) неверно, что (3) (из (15), (14)).

(17) $\varphi_0|\mathbf{D} \supset \mathbf{E}|_v^{M_3} = 1$ и $|\mathbf{D} \supset \mathbf{E}|_{\bar{v}*}^{M_2} = 0$ (из (16), (2)).

(18) $|\mathbf{D} \supset \mathbf{E}|_{\bar{v}*}^{M_2} = 0$ (из (17)).

(19) $|\mathbf{D}|_{\bar{v}*}^{M_2} \supset_2 |\mathbf{E}|_{\bar{v}*}^{M_2} = 0$ (из (18)).

(20) $|\mathbf{D}|_{\bar{v}*}^{M_2} = 1$ и $|\mathbf{E}|_{\bar{v}*}^{M_2} = 0$ (из (19), по определению $\neg_2$).

(21) $\varphi_0|\mathbf{D}|_v^{M_3} = 1$ (из (20), в силу индуктивного допущения).

(22) $|\mathbf{D}|_v^{M_3} = 1$ (из (21), по определению φ_0).

(23) $\varphi_0|\mathbf{E}|_v^{M_3} = 0$ (из (21), в силу индуктивного допущения).

(24) $|\mathbf{E}|_v^{M_3} \in \{½, 0\}$ (из (23), по определению φ_0).

(25) $|\mathbf{D}|_v^{M_3} \supset_3 |\mathbf{E}|_v^{M_3} \in \{½, 0\}$ (из (24), (22), по определению $\supset_3$).

(26) $|\mathbf{D} \supset \mathbf{E}|_v^{M_3} \in \{½, 0\}$ (из (25), (6)).

(27) $\varphi_0|\mathbf{D} \supset \mathbf{E}|_v^{M_3} = 0$ (из (26), по определению φ_0).

(28) $\varphi_0|\mathbf{D} \supset \mathbf{E}|_v^{M_3} = 1$ (из (17)).

(29) неверно, что (1) (из (27), (28)).

Таким образом, $\forall\mathbf{A}\forall v$: если $\mathbf{A}$ есть $L_{\supset\neg}$-формула и v – оценка в M_3, то $\varphi_0|\mathbf{A}|^{M_3}_{v} = |\mathbf{A}|^{M_2}_{\bar{v}^*}$. Доказательство того факта, что если $\varphi_0|\mathbf{A}|^{M_3}_{v} = |\mathbf{A}|^{M_2}_{\bar{v}^*}$, то $\supset_3$ и $\neg_3$ отвечают условиям Леммы, проводится элементарным разбором случаев.

2.2. Матрицы с двумя выделенными значениями

Рассмотрим логическую матрицу с двумя выделанными значениями $M_3^2 = \langle\{1, ½, 0\}, \supset_3, \neg_3, \{1, ½\}\rangle$.

Для формулировки Теоремы 2 нам потребуется определить *1*-замещение отображения v.

Для всякого отображения v множества всех пропозициональных переменных в $\{0, ½, 1\}$ называем *1*-замещением отображения v такое отображение w множества всех пропозициональных переменных в $\{0, 1\}$, что для всякой пропозициональной переменной $\mathbf{p}$

$$w(\mathbf{p}) = \begin{cases} v(\mathbf{p}), \text{ если } v(\mathbf{p}) \in \{0,1\}; \\ 1, \text{ если } v(\mathbf{p}) = ½. \end{cases}$$

Можно доказать, что для всякого отображения множества всех пропозициональных переменных в $\{0, ½, 1\}$ существует единственное *1*-замещение этого отображения. Обозначим через v *1*-замещение отображения v. Определяем φ_1 как множество $\{\langle 0, 0\rangle, \langle ½, 1\rangle, \langle 1, 1\rangle\}$. Ясно, что φ_1 есть отображение множества $\{0, ½, 1\}$ на множество $\{0, 1\}$.

Теорема 2.

Отношение логического следования в M_3^2 является классическим, если и только если $\varphi_1|\mathbf{A}|^{M_3^2}_{v} = |\mathbf{A}|^{M_2}_{\bar{\bar{v}}}$ для каждой $L_{\supset\neg}$-формулы $\mathbf{A}$ и оценки v в M_3^2.

Чтобы доказать Теорему 2, необходимо и достаточно доказать следующие утверждения У1 и У2:

У1. Если отношение логического следования в M_3^2 является классическим, то $\varphi_1|\mathbf{A}|_v^{M_3^2} = |\mathbf{A}|_{\bar{\bar{v}}}^{M_2}$ для каждой $L_{\supset\neg}$-формулы **A** и оценки v в M_3^2 .

У2. Если $\varphi_1|\mathbf{A}|_v^{M_3^2} = |\mathbf{A}|_{\bar{\bar{v}}}^{M_2}$ для каждой $L_{\supset\neg}$-формулы **A** и оценки v в M_3^2 , то отношение логического следования в M_3^2 является классическим.

Докажем утверждение У1 индукцией по длине $L_{\supset\neg}$-формулы **A**.

Пусть У1 верно для формул, которые содержат менее, чем n вхождений связок. Тогда достаточно доказать, что У1 верно, если $L_{\supset\neg}$-формула **A** содержит в точности n вхождений связок и графически совпадает с формулой $\neg\mathbf{C}$ либо с формулой $\mathbf{D} \supset \mathbf{E}$.

Случай 1. Пусть $L_{\supset\neg}$-формула **A** содержит в точности n вхождений связок и графически совпадает с формулой $\neg$ **C**.

(1) неверно, что У1 (допущение).

(2) $\mathbf{\Gamma} \models_{M_2} \mathbf{B}$ е.т.е. $\mathbf{\Gamma} \models_{M_3^2} \mathbf{B}$ (из (1)).

(3) неверно, что $\forall(\neg\mathbf{C})\forall v$: если $\neg\mathbf{C}$ есть $L_{\supset\neg}$-формула и v – оценка в M_3, то $\varphi_1|\neg\mathbf{C}|_v^{M_3^2} = |\neg\mathbf{C}|_{\bar{\bar{v}}}^{M_2}$ (из (1)).

(4) $\exists(\neg\mathbf{C})\exists v$: $\neg\mathbf{C}$ есть $L_{\supset\neg}$-формула, v – оценка в M_3 и $\varphi_1|\neg\mathbf{C}|_v^{M_3^2} \neq |\neg\mathbf{C}|_{\bar{\bar{v}}}^{M_2}$ (из (3)).

(5) пусть $\neg\mathbf{C}^*$ и v^* есть такие, соответственно, $L_{\supset\neg}$-формула и оценка в M_3, что $\varphi_1|\neg\mathbf{C}^*|_{v^*}^{M_3^2} \neq |\neg\mathbf{C}^*|_{\bar{\bar{v}}^*}^{M_2}$.

(6) ($\varphi_1|\neg\mathbf{C}^*|_{v^*}^{M_3^2} = 1$ и $|\neg\mathbf{C}^*|_{\bar{\bar{v}}^*}^{M_2} = 0$) или ($\varphi_1|\neg\mathbf{C}^*|_{v^*}^{M_3^2} = 0$ и $|\neg\mathbf{C}^*|_{\bar{\bar{v}}^*}^{M_2} = 1$) (из (5) и того факта, что v^* и v^* суть оценки в соответствующих матрицах).

(7) $\varphi_1|\neg\mathbf{C}^*|_{v^*}^{M_3^2} = 1$ и $|\neg\mathbf{C}^*|_{\bar{\bar{v}}^*}^{M_2} = 0$ (допущение).

(8) $\varphi_1|\neg\mathbf{C}^*|_{v^*}^{M_3^2} = 1$ (из (7)).

(9) $|\neg\mathbf{C}^*|_{v^*}^{M_3^2} \in \{1, ½\}$ (из (8) по определению φ_1).

(10) $|\neg\mathbf{C}^*|_{\bar{\bar{v}}^*}^{M_2} = 0$ (из (7)).

(11) $\neg_2|\mathbf{C}^*|_{\bar{\bar{v}}^*}^{M_2} = 0$ (по определению значения $L_{\supset\neg}$-формулы).

(12) $|\mathbf{C}^*|^{M_2}_{v^*} = 1$ (по определению $\neg_2$).

(13) У1 верно для $\mathbf{C}^*$ (индуктивное допущение).

(14) $\mathbf{C}^*$ есть $L_{\supset\neg}$-формула (по определению $L_{\supset\neg}$-формулы).

(15) $\varphi_1|\mathbf{C}^*|^{M_3^2}_{v^*} = |\mathbf{C}^*|^{M_2}_{v^*}$ (из (13), (2) и (14), по индуктивному допущению).

(16) $\varphi_1|\mathbf{C}^*|^{M_3^2}_{v^*} = 1$ (из (12) и (15)).

(17) $|\mathbf{C}^*|^{M_3^2}_{v^*} \in \{1, ½\}$ (из (16) по определению φ_0).

(18) $\forall\mathbf{A}$: если $\mathbf{A}$ есть $L_{\supset\neg}$-формула, то $\mathbf{C}^*, \neg\mathbf{C}^* \models_{M_2} \mathbf{A}$ (по определению $\neg_2$, а также по определению отношения логического следования).

(19) пусть $\mathbf{A}$ есть пропозициональная переменная α, не имеющая вхождений в $\mathbf{C}^*$.

(20) $\mathbf{C}^*, \neg\mathbf{C}^* \models_{M_2} \alpha$ (из (18), (19) по определению $L_{\supset\neg}$-формулы).

(21) $\mathbf{C}^*, \neg\mathbf{C}^* \models_{M_3^2} \alpha$ (из (2)).

(22) пусть v^{**} оценка в M_3^2, такая что, если $\mathbf{p}_i$ входит в $\mathbf{C}^*$, то $v^{**}(\mathbf{p}_i) = v^*(\mathbf{p}_i)$, и $v^{**}(\alpha) = 0$.

(23) $|\mathbf{C}^*|^{M_3^2}_{v^{**}} \in \{1, ½\}$, $|\neg\mathbf{C}^*|^{M_3^2}_{v^{**}} \in \{1, ½\}$, $|\alpha|^{M_3^2}_{v^{**}} = 0$ (из (9), (17) и (22)).

(24) неверно, что $\mathbf{C}^*, \neg\mathbf{C}^* \models_{M_3} \alpha$ (из (23), по определению отношения логического следования).

(25) неверно, что (7) (из (21) и (24)).

(26) $\varphi_1|\neg\mathbf{C}^*|^{M_3^2}_{v^*} = 0$ и $|\neg\mathbf{C}^*|^{M_2}_{v^*} = 1$ (из (6)).

(27) $\varphi_1|\neg\mathbf{C}^*|^{M_3^2}_{v^*} = 0$ (из (26)).

(28) $|\neg\mathbf{C}^*|^{M_3^2}_{v^*} = 0$ (из (27), по определению φ_0).

(29) $|\neg\mathbf{C}^*|^{M_3^2}_{v^*} = \neg_3|\mathbf{C}^*|^{M_3^2}_{v^*}$ (по определению значения $L_{\supset\neg}$-формулы).

(30) $|\neg\mathbf{C}^*|^{M_2}_{v^*} = 1$ (из 26).

(31) $|\neg\mathbf{C}^*|^{M_2}_{\overline{v^*}} = \neg^2|\mathbf{C}^*|^{M_2}_{\overline{v^*}}$ (по определению значения $L_{\supset\neg}$-формулы).

(32) $|\mathbf{C}^*|^{M_2}_{\overline{v^*}} = 0$ (из (30), (31), по определению $\neg_2$).

(33) $\varphi_1|\mathbf{C}^*|^{M_3^2}_{v^*} = |\mathbf{C}^*|^{M_2}_{\overline{v^*}}$ (индуктивное допущение).

(34) $\varphi_1|\mathbf{C}^*|^{M_3^2}_{v^*} = 0$ (из (32) и (33)).

(35) $|\mathbf{C}^*|^{M_3^2}_{v^*} = 0$ (из (34), по определению φ_1).

(36) если $x = 0$, то $\neg_3 x = 0$ (из (28), (29), (35) и того факта, что $\neg_3$ есть унарная операция, заданная на $\{1, ½, 0\}$).

(37) пусть формула **F** не выполнима в M_2

(38) формула **F** не выполнима в M_3^2 (из (2), по Лемме 2.1).

(39) формула $\neg$**F** общезначима в M_2 (из (37), в силу определений операции $\neg_2$, выполнимой формулы и общезначимой формулы).

(40) формула $\neg$**F** общезначима в M_3^2 (из (2), по Лемме 2.1).

(41) $\forall v$: если v – оценка в M_3^2, то $|\mathbf{F}|^{M_3^2}_{v} = 0$ (из (38) по определению выполнимой формулы).

(42) $\forall v$: если v – оценка в M_3^2, то $|(\neg\mathbf{F})|^{M_3^2}_{v} = 0$ (из (36), (41), по определению значения $L_{\supset\neg}$-формулы).

(43) неверно, что (6) (из (40), (42), по определению общезначимой формулы).

(44) неверно, что (1) (из (43)).

Случай 2. Пусть $L_{\supset\neg}$-формула **A** содержит в точности n вхождений связок и графически совпадает с формулой $\mathbf{D} \supset \mathbf{E}$. Докажем, что У1 выполняется для **A**.

(1) неверно, что У1 (допущение).

(2) $\mathbf{\Gamma} \models_{M_2} \mathbf{B}$ е.т.е. $\mathbf{\Gamma} \models_{M_3^2} \mathbf{B}$ (из (1)).

(3) неверно, что $\forall(\mathbf{D} \supset \mathbf{E})\forall v$: если $(\mathbf{D} \supset \mathbf{E})$ есть $L_{\supset\neg}$-формула и v – оценка в M_3^2, то $\varphi_1|(\mathbf{D} \supset \mathbf{E})|^{M_3^2}_{v} = |(\mathbf{D} \supset \mathbf{E})|^{M_2}_{\overline{v^*}}$ (из (1)).

(4) $\exists(\mathbf{D} \supset \mathbf{E})\exists v$: $(\mathbf{D} \supset \mathbf{E})$ есть $L_{\supset\neg}$-формула, v – оценка в M_3^2 и $\varphi_1|(\mathbf{D} \supset \mathbf{E})|_v^{M_3^2} \neq |(\mathbf{D} \supset \mathbf{E})|_{\overline{\overline{v}}}^{M_2}$ (из (3)).

(5) пусть $(\mathbf{D}^* \supset \mathbf{E}^*)$ и v^* есть такие, соответственно, $L_{\supset\neg}$-формула и оценка в M_3, что $\varphi_1|(\mathbf{D}^* \supset \mathbf{E}^*)|_{v^*}^{M_3^2} \neq |(\mathbf{D}^* \supset \mathbf{E}^*)|_{\overline{\overline{v^*}}}^{M_2}$.

(6) $(\varphi_1|(\mathbf{D}^* \supset \mathbf{E}^*)|_{v^*}^{M_3^2} = 1$ и $|(\mathbf{D}^* \supset \mathbf{E}^*)|_{\overline{\overline{v^*}}}^{M_2} = 0)$ или $(\varphi_1|(\mathbf{D}^* \supset \mathbf{E}^*)|_{v^*}^{M_3^2} = 0$ и $|(\mathbf{D}^* \supset \mathbf{E}^*)|_{\overline{\overline{v^*}}}^{M_2} = 1)$ (из (5) и того факта, что v^* и $\overline{\overline{v^*}}$ суть оценки в соответствующих матрицах).

(7) $\varphi_1|(\mathbf{D}^* \supset \mathbf{E}^*)|_{v^*}^{M_3^2} = 1$ и $|(\mathbf{D}^* \supset \mathbf{E}^*)|_{\overline{\overline{v^*}}}^{M_2} = 0$ (допущение).

(8) $|(\mathbf{D}^* \supset \mathbf{E}^*)|_{\overline{\overline{v^*}}}^{M_2} = 0$ (из (7)).

(9) $|(\mathbf{D}^* \supset \mathbf{E}^*)|_{\overline{\overline{v^*}}}^{M_2} = |\mathbf{D}^*|_{\overline{\overline{v^*}}}^{M_2} \supset_2 |\mathbf{E}^*|_{\overline{\overline{v^*}}}^{M_2}$ (по определению значения $L_{\supset\neg}$-формулы).

(10) $|\mathbf{D}^*|_{\overline{\overline{v^*}}}^{M_2} = 1$ и $|\mathbf{E}^*|_{\overline{\overline{v^*}}}^{M_2} = 0$ (из (8), (9), по определению $\supset_2$).

(11) $\varphi_1|\mathbf{D}^*|_{v^*}^{M_3^2} = |\mathbf{D}^*|_{\overline{\overline{v^*}}}^{M_2}$ и $\varphi_1|\mathbf{E}^*|_{v^*}^{M_3^2} = |\mathbf{E}^*|_{\overline{\overline{v^*}}}^{M_2}$ (индуктивное допущение).

(12) $\varphi_1|\mathbf{D}^*|_{v^*}^{M_3^2} = 1$ и $\varphi_1|\mathbf{E}^*|_{v^*}^{M_3^2} = 0$ (из (10), (11)).

(13) $|\mathbf{D}^*|_{v^*}^{M_3^2} \in \{1, ½\}$ и $|\mathbf{E}^*|_{v^*}^{M_3^2} = 0$ (из (12), по определению φ_1).

(14) $\varphi_1|(\mathbf{D}^* \supset \mathbf{E}^*)|_{v^*}^{M_3^2} = 1$ (из (7)).

(15) $|(\mathbf{D}^* \supset \mathbf{E}^*)|_{v^*}^{M_3^2} \in \{1, ½\}$ (из (14), по определению φ_1).

(16) $\mathbf{D}^*, \mathbf{D}^* \supset \mathbf{E}^* \models_{M_2} \mathbf{E}^*$

(17) $\mathbf{D}^*, \mathbf{D}^* \supset \mathbf{E}^* \models_{M_3^2} \mathbf{E}^*$ (из (16) и (2)).

(18) при оценке v^* $\mathbf{D}^*$ и $\mathbf{D}^* \supset \mathbf{E}^*$ принимают выделенное значение, а $\mathbf{E}^*$ – нет. Следовательно, неверно, что (17) (из (13), (15) и определения отношения логического следования).

(19) неверно, что (7) (из (17) и (18)).

(20) $\varphi_1|(\mathbf{D}^* \supset \mathbf{E}^*)|_{v^*}^{M_3^2} = 0$ и $|(\mathbf{D}^* \supset \mathbf{E}^*)|_{\overline{\overline{v^*}}}^{M_2} = 1$ (из (6), (19)).

(21) $|(\mathbf{D^*} \supset \mathbf{E^*})|^{M_2}_{v^*} = 1$ (из (20)).

(22) $|\mathbf{D^*}|^{M_2}_{v^*} \supset^2 |\mathbf{E^*}|^{M_2}_{v^*} = 1$ (из (21), по определению значения $L_{\supset\neg}$-формулы).

(23) $|\mathbf{D^*}|^{M_2}_{v^*} = 0$ или $|\mathbf{E^*}|^{M_2}_{v^*} = 1$ (из (22), по определению $\supset_2$).

(24) пусть $|\mathbf{D^*}|^{M_2}_{v^*} = 0$ (допущение).

(25) $\varphi_1|\mathbf{D^*}|^{M_3^2}_{v^*} = |\mathbf{D^*}|^{M_2}_{v^*}$ (индуктивное допущение).

(26) $\varphi_1|\mathbf{D^*}|^{M_3^2}_{v^*} = 0$ (из (24), (25)).

(27) $|\mathbf{D^*}|^{M_3^2}_{v^*} = 0$ (из (26), по определению φ_1).

(28) $\varphi_1|(\mathbf{D^*} \supset \mathbf{E^*})|^{M_3^2}_{v^*} = 0$ (из (20)).

(29) $|(\mathbf{D^*} \supset \mathbf{E^*})|^{M_3^2}_{v^*} = 0$ (из (28), по определению φ_1).

(30) $|\mathbf{D^*}|^{M_3^2}_{v^*} \supset^3 |\mathbf{E^*}|^{M_3^2}_{v^*} = 0$ (из (30), по определению значения $L_{\supset\neg}$-формулы).

(31) $\exists z(z \in \{1, ½, 0\}$ и $0 \supset_3 z = 0)$ (из (27), (30)).

(32) пусть **F** не выполнима в M_2 и α есть пропозициональная переменная языка $L_{\supset\neg}$.

(33) **F** не выполнима в M_3^2 (из (32), по Лемме 2.1).

(34) $\models_{M_2} \mathbf{F} \supset \alpha$ (из (32), по определению $\supset_2$).

(35) $\models_{M_3^2} \mathbf{F} \supset \alpha$ (из (2), (34)).

(36) пусть v^{**} оценка в M_3^2, такая что $v^{**}(\alpha) = z$. Тогда $|\mathbf{F} \supset \alpha\,|^{M_3^2}_{v^{**}} = 0$ (из (31), (33)).

(37) неверно, что (35) (из (36)).

(38) неверно, что (24) (из (37) и (35)).

(39) $|\mathbf{E^*}|^{M_2}_{v^*} = 1$ (из (23), (38)).

(40) $\varphi_1|\mathbf{E^*}|^{M_3^2}_{v^*} = 1$ (индуктивное допущение).

(41) $|\mathbf{E^*}|^{M_3^2}_{v^*} \in \{1, ½\}$.

(42) $\exists z_1 \exists z_2(z_1, z_2 \in \{1, ½\}$ и $z_1 \supset^3 z_2 = 0)$ (из (27), (30)).

(43) $\models_{M_2} \neg(\alpha \supset \beta) \supset \neg\beta$, где α и β – пропозициональные переменные языка $L_{\supset\neg}$ (в силу определения M_2).

(44) $\models_{M_3^2} \neg(\alpha \supset \beta) \supset \neg\beta$ (из (43), (2)).

(45) пусть v^{**} оценка в M_3^2, такая что $v^{**}(\alpha) = z_1$, $v^{**}(\beta) = z_2$.

(46) $|\alpha \supset \beta|^{M_3^2}_{v^{**}} = 0$ (из (45), (42)).

(47) $\neg_3|\alpha \supset \beta|^{M_3^2}_{v^{**}} \in \{1, ½\}$ (из (46), в силу Базиса и Случая 1 настоящего доказательства).

(48) $|\neg(\alpha \supset \beta)|^{M_3^2}_{v^{**}} \in \{1, ½\}$ (по определению значения $L_{\supset\neg}$-формулы).

(49) $|\beta|^{M_3^2}_{v^{**}} \in \{1, ½\}$ (из (45), (42)).

(50) $\neg_3|\beta|^{M_3^2}_{v^{**}} = 0$ (из (49), в силу Базиса и Случая 1 настоящего доказательства).

(51) $|\neg\beta|^{M_3^2}_{v^{**}} = 0$ (по определению значения $L_{\supset\neg}$-формулы).

(52) $|\neg(\alpha \supset \beta)|^{M_2}_{\overline{\overline{v^{**}}}} = 1$ (из (42), в силу определений $\neg_2$, $\supset^2$, значения $L_{\supset\neg}$-формулы, *1*-замещения).

(53) $|\neg\beta|^{M_2}_{\overline{\overline{v^{**}}}} = 0$ (из (42), в силу определений $\neg_2$, значения $L_{\supset\neg}$-формулы, *1*-замещения).

(54) $|\neg(\alpha \supset \beta) \supset \neg\beta|^{M_2}_{\overline{\overline{v^{**}}}} = 0$ (из (52), (53), по определению $\supset^2$ и по определению значения $L_{\supset\neg}$-формулы).

(55) $\varphi_1|\neg(\alpha \supset \beta) \supset \neg\beta|^{M_3^2}_{v^{**}} = 0$ (из (54), (19)).

(56) $|\neg(\alpha \supset \beta) \supset \neg\beta|^{M_3^2}_{v^{**}} = 0$ (из (55), по определению φ_1).

(57) неверно, что (44) (из (56) по определению общезначимой формулы).

(58) неверно, что (1) (из (57), (44)).

У1 доказано.

Докажем У2.

(1) неверно, что У2 (допущение).

(2) $\forall\mathbf{A}\forall v$: если $\mathbf{A}$ есть $L_{\supset\neg}$-формула и v – оценка в M_3, то $\varphi_1|\mathbf{A}|_v^{M_3^2} = |\mathbf{A}|_{\underset{=}{v}}^{M_2}$ (из (1)).

(3) неверно, что $\mathbf{\Gamma} \models_{M_2} \mathbf{B}$ е.т.е. $\mathbf{\Gamma} \models_{M_3^2} \mathbf{B}$ (из (1)).

(4) $\exists\mathbf{\Gamma}\exists\mathbf{B}$: $\mathbf{\Gamma} \models_{M_2} \mathbf{B}$ и неверно, что $\mathbf{\Gamma} \models_{M_3^2} \mathbf{B}$ или $\exists\mathbf{\Gamma}\exists\mathbf{B}$: $\mathbf{\Gamma} \models_{M_3^2} \mathbf{B}$ и неверно, что $\mathbf{\Gamma} \models_{M_2} \mathbf{B}$ (из (3)).

(5) $\exists\mathbf{\Gamma}\exists\mathbf{B}$: $\mathbf{\Gamma} \models_{M_2} \mathbf{B}$ и неверно, что $\mathbf{\Gamma} \models_{M_3^2} \mathbf{B}$ (допущение).

(6) для каждой оценки в M_2, для каждых $\mathbf{\Gamma}$ и $\mathbf{B}$ верно, что, если каждая формула из $\mathbf{\Gamma}$ принимает выделенное значение, то $\mathbf{B}$ принимает выделенное значение при этой оценке (из (2)).

(7) найдется такая оценка в M_3^2, множество посылок $\mathbf{\Gamma}$ и заключение $\mathbf{B}$, что все формулы из $\mathbf{\Gamma}$ примут выделенное значение и $\mathbf{B}$ примет невыделенное значение (из (2)).

(8) пусть v^* – оценка в M_3^2 и $\forall\mathbf{A}$: если $\mathbf{A} \in \mathbf{\Gamma}^*$, то $|\mathbf{A}|_{v^*}^{M_3^2} \in \{1, ½\}$ и $|\mathbf{B}^*|_{v^*}^{M_3^2} = 0$ (из (7), исключение кванторов).

(9) $\forall\mathbf{A}$: если $\mathbf{A} \in \mathbf{\Gamma}^*$, то $|\mathbf{A}|_{v^*}^{M_3^2} \in \{1, ½\}$ (из (8)).

(10) $\forall\mathbf{A}$: если $\mathbf{A} \in \mathbf{\Gamma}^*$, то $\varphi_1|\mathbf{A}|_{v^*}^{M_3^2} = 1$ (из (9), по определению φ_1).

(11) $\forall\mathbf{A}$: если $\mathbf{A} \in \mathbf{\Gamma}^*$, то $|\mathbf{A}|_{\underset{=}{v^*}}^{M_2} = 1$ (из (10), (2)).

(12) если $\forall\mathbf{A}$: если $\mathbf{A} \in \mathbf{\Gamma}^*$, то $|\mathbf{A}|_{\underset{=}{v^*}}^{M_2} = 1$, то $|\mathbf{B}|_{\underset{=}{v^*}}^{M_2} = 1$ (из (6), исключение квантора).

(13) $|\mathbf{B}|_{\underset{=}{v^*}}^{M_2} = 1$ (из (12), (11)).

(14) $|\mathbf{B}^*|_{v^*}^{M_3^2} = 0$ (из (8)).

(15) $\varphi_1|\mathbf{B}^*|_{v^*}^{M_3^2} = 0$ (из (14), по определению φ_1).

(16) $|\mathbf{B}^*|_{\underset{=}{v^*}}^{M_2} = 0$ (из (15), (2)).

(17) неверно, что (5) (из (16), (13)).

(18) $\exists\mathbf{\Gamma}\exists\mathbf{B}$: $\mathbf{\Gamma} \models_{M_3^2} \mathbf{B}$ и неверно, что $\mathbf{\Gamma} \models_{M_2} \mathbf{B}$ (из (17), (4)).

(19) для каждой оценки в M_3^2, для каждых **Г** и **B** верно, что, если каждая формула из **Г** принимает выделенное значение, то **B** принимает выделенное значение при этой оценке (из (18)).

(20) найдется такая оценка в M_2, множество посылок **Г** и заключение **B**, что все формулы из **Г** примут выделенное значение и **B** примет невыделенное значение (из (18)).

(21) пусть v^* – оценка в M_2 и $\forall\mathbf{A}$: если $\mathbf{A} \in \mathbf{\Gamma}^*$, то $|\mathbf{A}|^{M_2}_{v^*} = 1$ и $|\mathbf{B}^*|^{M_2}_{v^*} = 0$ (из (20), исключение кванторов).

(22) $\forall\mathbf{A}$: если $\mathbf{A} \in \mathbf{\Gamma}^*$, то $|\mathbf{A}|^{M_2}_{v^*} = 1$ (из (21)).

(23) $\forall\mathbf{A}$: если $|\mathbf{A}|^{M_2}_{v^*} = 1$, то $|\mathbf{A}|^{M_2}_{=v^*} = 1$ (из (22), по определению φ_1).

(24) $\forall\mathbf{A}$: если $\mathbf{A} \in \mathbf{\Gamma}^*$, то $\varphi_1|\mathbf{A}|^{M_3^2}_{v^*} = 1$ (из (22), (23), (2)).

(25) $\forall\mathbf{A}$: если $\mathbf{A} \in \mathbf{\Gamma}^*$, то $|\mathbf{A}|^{M_3^2}_{v^*} \in \{1, ½\}$ (из (24), по определению φ_1).

(26) $|\mathbf{B}^*|^{M_3^2}_{v^*} \in \{1, ½\}$ (из (25), (19)).

(27) $\varphi_1|\mathbf{B}^*|^{M_3^2}_{v^*} = 1$ (из (26), по определению φ_1).

(28) $|\mathbf{B}^*|^{M_2}_{=v^*} = 1$ (из (27), (2)).

(29) $|\mathbf{B}^*|^{M_2}_{v^*} = 1$ (из (28), в силу того, что v^* – оценка в M_2).

(30) $|\mathbf{B}^*|^{M_2}_{v^*} = 0$ (из (21)).

(31) неверно, что (1) (из (29), (30)).

У2 доказано. Теорема 2 доказана.

Лемма 2.3.

Рассмотрим логическую матрицу M_3^2 = <{1, ½, 0}, $\supset_3$, $\neg_3$, {1, ½}>. $\forall\mathbf{A}\forall v$: если **A** есть $L_{\supset\neg}$-формула и v – оценка в M_3^2, то $\varphi_1|\mathbf{A}|_v^{M_3^2} = |\mathbf{A}|_{\bar{v}}^{M_2}$ тогда и только тогда, когда операции $\supset_3$ и $\neg_3$ отвечают следующим условиям:

$$x \supset_3 y = 0 \text{ е.т.е } x \neq 0 \text{ и } y = 0;$$
$$\neg_3\, x = 0 \text{ е.т.е } x \neq 0.$$

Можно доказать, что (i) $\mathbf{\Gamma} \models_{M_2} \mathbf{B}$ е.т.е. $\mathbf{\Gamma} \models_{M_3^2} \mathbf{B}$ и что (ii) $\forall\mathbf{A}$, если **A** есть $L_{\supset\neg}$-формула, то **A** общезначима в M_3^2 е.т.е. **A** общезначима в M_2.

Пусть $\supset_3$ и $\neg_3$ отвечают условиям Леммы. Докажем индукцией по длине формулы **A**., что $\forall\mathbf{A}\forall v$: если **A** есть $L_{\supset\neg}$-формула и v – оценка в M_3^2, то $\varphi_1|\mathbf{A}|_v^{M_3^2} = |\mathbf{A}|_{\bar{v}}^{M_2}$.

Пусть $\varphi_1|\mathbf{A}|_v^{M_3^2} = |\mathbf{A}|_{\bar{v}}^{M_2}$ имеет место для формул, которые содержат менее, чем n вхождений связок. Тогда достаточно доказать, что утверждение верно, если $L_{\supset\neg}$-формула **A** содержит в точности n вхождений связок и графически совпадает с формулой $\neg$**C** либо с формулой $\mathbf{D} \supset \mathbf{E}$.

Случай 1. Пусть $L_{\supset\neg}$-формула **A** содержит в точности n вхождений связок и графически совпадает с формулой $\neg$**C**.

(1) $\varphi_1|\neg\mathbf{C}|_v^{M_3^2} \neq |\neg\mathbf{C}|_{\bar{v}}^{M_2}$ (допущение).

(2) ($\varphi_1|\neg\mathbf{C}|_v^{M_3^2} = 0$ и $|\neg\mathbf{C}|_{\bar{v}}^{M_2} = 1$) или ($\varphi_1|\neg\mathbf{C}|_v^{M_3^2} = 1$ и $|\neg\mathbf{C}|_{\bar{v}}^{M_2} = 0$) (из (1), по определению φ_1 и определению оценки в M_2).

(3) $\varphi_1|\neg\mathbf{C}|_v^{M_3^2} = 0$ и $|\neg\mathbf{C}|_{\bar{v}}^{M_2} = 1$ (допущение).

(4) $|\neg\mathbf{C}|_{\bar{v}}^{M_2} = \neg_2|\mathbf{C}|_{\bar{v}}^{M_2}$ (по определению значения $L_{\supset\neg}$-формулы).

(5) $\neg_2|\mathbf{C}|_{\bar{v}}^{M_2} = 1$ (из (4), (3)).

(6) $|\mathbf{C}|_{\bar{v}}^{M_2} = 0$ (из (5), по определению $\neg_2$).

(7) $\varphi_1|\mathbf{C}|_v^{M_3^2} = |\mathbf{C}|_{\bar{v}}^{M_2}$ (индуктивное допущение).

(8) $\varphi_1|\mathbf{C}|_v^{M_3^2} = 0$ (из (7), (6)).

(9) $|\mathbf{C}|_v^{M_3^2} = 0$ (из (8), по определению φ_1).

(10) $\neg_3|\mathbf{C}|_v^{M_3^2} \in \{1, ½\}$ (из (9), по определению $\neg_3$).

(11) $\neg_3|\mathbf{C}|_v^{M_3^2} = |\neg\mathbf{C}|_v^{M_3^2}$ (из (10), по определению значения $L_{\supset\neg}$-формулы).

(12) $|\neg\mathbf{C}|_v^{M_3^2} \in \{1, ½\}$ (из (11), (10)).

(13) $\varphi_1|\neg\mathbf{C}|_v^{M_3^2} = 1$ (из (12), по определению φ_1).

(14) $\varphi_1|\neg\mathbf{C}|_v^{M_3^2} = 0$ (из (3)).

(15) неверно, что (3) (из (14), (13)).

(16) $\varphi_1|\neg\mathbf{C}|_v^{M_3^2} = 1$ и $|\neg\mathbf{C}|_{\overset{=}{v}}^{M_2} = 0$ (из (15), (2)).

(17) $\neg_2|\mathbf{C}|_{\overset{=}{v}}^{M_2} = 0$ (из (16), (4)).

(18) $|\mathbf{C}|_{\overset{=}{v}}^{M_2} = 1$ (из (17)).

(19) $\varphi_1|\mathbf{C}|_v^{M_3^2} = 1$ (из (18), (7)).

(20) $|\mathbf{C}|_v^{M_3^2} \in \{1, ½\}$ (из (19), по определению φ_1).

(21) $\neg_3|\mathbf{C}|_v^{M_3^2} = 0$ (из (20), по определению $\neg_3$).

(22) $|\neg\mathbf{C}|_v^{M_3^2} = 0$ (из (21), (11)).

(23) $\varphi_1|\neg\mathbf{C}|_v^{M_3^2} = 0$ (из (22), по определению φ_1).

(24) $\varphi_1|\neg\mathbf{C}|_v^{M_3^2} = 1$ (из (16)).

(25) неверно, что (1).

Случай 2. Пусть $L_{\supset\neg}$-формула **A** содержит в точности n вхождений связок и графически совпадает с формулой $\mathbf{D} \supset \mathbf{E}$. Докажем, что утверждение (i) выполняется для **A**.

(1) $\varphi_1|\mathbf{D} \supset \mathbf{E}|_v^{M_3^2} \neq |\mathbf{D} \supset \mathbf{E}|_{\overset{=}{v}}^{M_2}$ (допущение).

(2) ($\varphi_1|\mathbf{D} \supset \mathbf{E}|_v^{M_3^2} = 0$ и $|\mathbf{D} \supset \mathbf{E}|_{\overset{=}{v}}^{M_2} = 1$) или ($\varphi_1|\mathbf{D} \supset \mathbf{E}|_v^{M_3^2} = 1$ и $|\mathbf{D} \supset \mathbf{E}|_{\overset{=}{v}}^{M_2} = 0$) (из (1), по определению φ_1 и определению оценки в M_2).

(3) $\varphi_1|\mathbf{D} \supset \mathbf{E}|^{M_3^2}_v = 0$ и $|\mathbf{D} \supset \mathbf{E}|^{M_2}_{v} = 1$ (допущение).

(4) $\varphi_1|\mathbf{D} \supset \mathbf{E}|^{M_3^2}_v = 0$ (из (3)).

(5) $|\mathbf{D} \supset \mathbf{E}|^{M_3^2}_v = 0$ (из (4), по определению φ_1).

(6) $|\mathbf{D} \supset \mathbf{E}|^{M_3^2}_v = |\mathbf{D}|^{M_3^2}_v \supset^3 |\mathbf{E}|^{M_3^2}_v$ (по определению значения $L_{\supset\neg}$-формулы).

(7) $|\mathbf{D}|^{M_3^2}_v \supset^3 |\mathbf{E}|^{M_3^2}_v = 0$ (из (6), (5)).

(8) $|\mathbf{D}|^{M_3^2}_v \in \{1, ½\}$ и $|\mathbf{E}|^{M_3^2}_v = 0$ (из (7)).

(9) $\varphi_1|\mathbf{D}|^{M_3^2}_v = 1$ (из (8), по определению φ_1).

(10) $|\mathbf{D}|^{M_2}_{v} = 1$ (из (9), в силу индуктивного допущения).

(11) $\varphi_1|\mathbf{E}|^{M_3^2}_v = 0$ (из (8), по определению φ_1).

(12) $|\mathbf{E}|^{M_2}_{v} = 0$ (из (11), в силу индуктивного допущения).

(13) $|\mathbf{D}|^{M_2}_{v} \supset_2 |\mathbf{E}|^{M_2}_{v} = 0$ (из (12), (10), по определению $\neg_2$).

(14) $|\mathbf{D} \supset \mathbf{E}|^{M_2}_{v} = 0$ (из (13), по определению значения $L_{\supset\neg}$-формулы).

(15) $|\mathbf{D} \supset \mathbf{E}|^{M_2}_{v} = 1$ (из (3)).

(16) неверно, что (3) (из (15), (14)).

(17) $\varphi_1|\mathbf{D} \supset \mathbf{E}|^{M_3^2}_v = 1$ и $|\mathbf{D} \supset \mathbf{E}|^{M_2}_{v} = 0$ (из (16), (2)).

(18) $|\mathbf{D} \supset \mathbf{E}|^{M_2}_{v} = 0$ (из (17)).

(19) $|\mathbf{D}|^{M_2}_{v} \supset_2 |\mathbf{E}|^{M_2}_{v} = 0$ (из (18)).

(20) $|\mathbf{D}|^{M_2}_{v} = 1$ и $|\mathbf{E}|^{M_2}_{v} = 0$ (из (19), по определению $\neg_2$).

(21) $\varphi_1|\mathbf{D}|^{M_3^2}_v = 1$ (из (20), в силу индуктивного допущения).

(22) $|\mathbf{D}|^{M_3^2}_v \in \{1, ½\}$ (из (21), по определению φ_1).

(23) $\varphi_1|\mathbf{E}|^{M_3^2}_v = 0$ (из (21), в силу индуктивного допущения).

(24) $|\mathbf{E}|^{M_3^2}_v = 0$ (из (23), по определению φ_1).

(25) $|\mathbf{D}|^{M_3^2}_v \supset_3 |\mathbf{E}|^{M_3^2}_v = 0$ (из (24), (22), по определению $\supset_3$).

(26) $|\mathbf{D} \supset \mathbf{E}|^{M_3^2}_{v} = 0$ (из (25), (6)).

(27) $\varphi_1|\mathbf{D} \supset \mathbf{E}|^{M_3^2}_{v} = 0$ (из (26), по определению φ_1).

(28) $\varphi_1|\mathbf{D} \supset \mathbf{E}|^{M_3^2}_{v} = 1$ (из (17)).

(29) неверно, что (1) (из (27), (28)).

Таким образом, если $\supset_3$ и $\neg_3$ отвечают условям Леммы, $\forall\mathbf{A}\forall v$: если $\mathbf{A}$ есть $L_{\supset\neg}$-формула и v – оценка в M_3^2, то $\varphi_1|\mathbf{A}|^{M_3^2}_{v} = |\mathbf{A}|^{M_{=}^{2}}_{v}$. В обратную сторону Лемма доказывается элементарным разбором случаев.

2.3. О некоторых функциональных свойствах матриц с классическим отношением логического следования

Обобщив результаты Теорем 1 и 2, а также Лемм 2.2. и 2.3. из предыдущих разделов, мы можем сформулировать следующее утверждение о трехзначных матрицах для классической логики высказываний.

Утверждение 1.

Пусть M_3^j ($j \in \{1, 2\}$) – импликативно-негативная трехэлементная матрица, где j – число элементов класса выделенных значений D. Отношение логического следования в M_3^j является классическим, если и только если её базовые операции отвечают следующим условиям:

$$x \supset_3 y \notin D \text{ е.т.е } x \in D \text{ и } y \notin D;$$
$$\neg_3\, x \notin D \text{ е.т.е } x \in D.$$

Благодаря Утверждению 1 мы можем вывести формулу для подсчета количества трехэлементных логических матриц с k выделенных значений, в которых классы формул, находящихся в отношении логического следования и классы общезначимых в данной матрице формул совпадают с классическими.

Подсчитаем число возможных табличных определений $\supset_3$, отвечающих условию Теоремы 3.

Пусть v – оценка в M_3^j. Всего существует 9 оценок $\hat{v}_i$, отличающихся от v лишь значениями x и y. Так как $x \supset_3 y \notin D$ е.т.е $x \notin D$ и $y \in D$, число оценок $\hat{v}_i$, при которых $x \supset_3 y \notin D$, определяется следующей формулой: $k \times (3 - k)$. В силу Теоремы 3, это число всегда равно 2. Остается 7 оценок $\hat{v}$. При каждой из них $x \supset_3 y \in D$.

Подсчитаем число возможных определений бинарных операций, заданных на {1, ½, 0} таких, что формула (**p** ⊃ **q**) не принимает выделенного значения лишь при двух $\hat{v}$. Это число равняется $(3 - k)^2$.

Теперь подсчитаем число возможных определений бинарных операций, заданных на {1, ½, 0} таких, что формула (**p** ⊃ **q**) принимает выделенное значение при семи различных $\hat{v}$. Это число равняется k^7.

Таким образом, общее число определений бинарных операций, заданных на {1, ½, 0}, удовлетворяющих условию Теоремы 3, составляет $k^7 \times (3 - k)^2$.

Проведем аналогичное построение для подсчета числа соответствующих табличных определений $\neg_3$. $\neg_3 x \notin D$ при k оценках $\hat{v}$. Существует $(3 - k)^k$ соответствующих табличных определений. $\neg_3 x \in D$ при $(3 - k)$ оценках $\hat{v}$. Существует $k^{(3-k)}$ соответствующих табличных определений. Всего существует $(3 - k)^k \times k^{(3-k)}$ табличных определений унарных операций, заданных на {1, ½, 0}, удовлетворяющих условию Теоремы 3. В силу Теоремы 3, это число всегда равно 2.

Теперь мы можем найти число возможных комбинаций табличных определений для бинарной и унарной операции, заданных на {1, ½, 0} и удовлетворяющих условию Теоремы 3. Это число равно $2 \times (k^7 \times (3 - k)^2)$.

В соответствии с полученной формулой, число трехэлементных матриц с одной бинарной и одной унарной базовой операцией таких, в которых классы формул, находящихся в отношении логического следования и классы общезначимых в данной матрице формул совпадают с классическими, составляет 8 и 256 для, соответственно, одного и двух выделенных значений. Из них 2 *C*-расширяющих для одного выделенного значения и 16 – для двух.

Наборы базовых операций для матриц с одним выделенным значением принимают следующий вид:

$\supset^{\alpha}$	1	½	0
1	1	0	0
½	1	1	1
0	1	1	1

	$\neg^{\varepsilon}$
1	0
½	1
0	1

$\supset^{\beta}$	1	½	0
1	1	½	0
½	1	1	1
0	1	1	1

	$\neg^{\varepsilon}$
1	0
½	1
0	1

$\supset^{\gamma}$	1	½	0
1	1	0	½
½	1	1	1
0	1	1	1

	$\neg^{\varepsilon}$
1	0
½	1
0	1

$\supset^{\delta}$	1	½	0
1	1	½	½
½	1	1	1
0	1	1	1

	$\neg^{\varepsilon}$
1	0
½	1
0	1

$\supset^{\alpha}$	1	½	0
1	1	0	0
½	1	1	1
0	1	1	1

	$\neg^{\varphi}$
1	½
½	1
0	1

$\supset^{\beta}$	1	½	0
1	1	½	0
½	1	1	1
0	1	1	1

	$\neg^{\varphi}$
1	½
½	1
0	1

$\supset^{\gamma}$	1	½	0
1	1	0	½
½	1	1	1
0	1	1	1

	$\neg^{\varphi}$
1	½
½	1
0	1

$\supset^{\delta}$	1	½	0
1	1	½	½
½	1	1	1
0	1	1	1

	$\neg^{\varphi}$
1	½
½	1
0	1

Обозначим соответствующие матрицы как $M^{\alpha,\varepsilon}$, $M^{\beta,\varepsilon}$, $M^{\gamma,\varepsilon}$, $M^{\delta,\varepsilon}$, $M^{\alpha,\varphi}$, $M^{\beta,\varphi}$, $M^{\gamma,\varphi}$, $M^{\delta,\varphi}$. Некоторые из перечисленных связок достаточно известны. Так, первый набор связок – это внешние импликаци и отрицание трехзначной логики Бочвара $\mathbf{B_3}$ [4]. Связка $\supset^{\beta}$ была независимо описана в целом ряде работ [17, 28, 33].

Как известно (см., например [9]), классические импликация и отрицание образуют функционально полную систему связок, то есть с их помощью может быть выражена любая функция, заданная на {1; 0}. Интересно, что в случае с приведенными выше наборами связок ситуация совершенно иная.

Утверждение 2.

Используя базовые операции $M^{\alpha,\varepsilon}$ и $M^{\delta,\varphi}$, нельзя выразить никакие иные из описанных нами связок.

Доказательство. Ясно, что любая функция, выразимая в данных матрицах, имеет область значения {1; 0} или {1; ½} соответственно. Однако это неверно для остальных матриц.

Утверждение 3.

В $M^{\beta,\varepsilon}$ выразимы связки $M^{\alpha,\varepsilon}$, и не выразимы базовые связки остальных матриц.

Доказательство. Импликация из $M^{\alpha,\varepsilon}$ выражается следующим образом: $x \supset^{\alpha} y = \neg^{\varepsilon}\neg^{\varepsilon}(x \supset^{\beta} y)$. В то же время, все функции $M^{\beta,\varepsilon}$ имеют область значений {1; 0} при ограничении занчений переменных тем же множеством. Однако это неверно для остальных матриц.

Утверждение 4.

В $M^{\beta,\varphi}$ выразимы связки $M^{\delta,\varphi}$, и не выразимы базовые связки остальных матриц.

Импликация из $M^{\delta,\varphi}$ выражается аналогично предыдущему случаю:

$$x \supset^{\delta} y = \neg^{\varphi}\neg^{\varphi} (x \supset^{\beta} y).$$

Теперь покажем, что через базовые операции $M^{\beta,\varphi}$ нельзя выразить унарный оператор f^1, такой, что $f^1(1) = 0$.

Индуктивное допущение. Пусть f^1 нельзя выразить в $M^{\beta,\varphi}$, используя менее k вхождений $\supset^{\beta}$ и $\neg^{\varphi}$.

Теперь допустим, что f^1 можно выразить посредством суперпозиции g операций $\supset^{\beta}$ и $\neg^{\varphi}$, содержащей в точности k вхождений данных операций.

Случай 1. $g(x) = \neg^{\varphi}h(x)$. Тогда $\neg^{\varphi}h(1) = 0$. Однако это невозможно в силу определения $\neg^{\varphi}$.

Случай 2. $g(x) = h'(x) \supset^{\beta} h''(x)$.

(1) $h'(1) \supset^{\beta} h''(1) = 0$ (по условию).

(2) $h'(1) = 1$ и $h''(1) = 0$ (по определению $\supset^{\beta}$).

(3) $h''(1) = 0$. Число вхождений $\supset^{\beta}$ и $\neg^{\varphi}$ в h'' меньше k. Противоречие с индуктивным допущением.

Индукция закончена. Оператор f^1 не выразим в $M^{\beta,\varphi}$. Однако этот оператор выразим в остальных матрицах: $x \supset^{\alpha} \neg^{\varphi} x$ для $M^{\alpha,\varphi}$, $x \supset^{\gamma} \neg^{\varphi} x$ для $M^{\gamma,\varphi}$, $\neg^{\varepsilon} x$ для остальных матриц.

Утверждение 5.

$M^{\delta,\varepsilon}$ функционально эквивалентна $M^{\alpha,\varphi}$. В этих матрицах выразимы базовые операции $M^{\alpha,\varepsilon}$ и $M^{\delta,\varphi}$, но не выразимы базовые операции, $M^{\beta,\varepsilon}$, $M^{\gamma,\varepsilon}$, $M^{\beta,\varphi}$, $M^{\gamma,\varphi}$.

Доказательство. Функциональная эквивалентность $M^{\delta,\varepsilon}$ и $M^{\alpha,\varphi}$, а также выразимость базовых операций $M^{\alpha,\varepsilon}$ и $M^{\delta,\varphi}$:

$$\begin{aligned}
&x \supset^{\alpha} y = \neg^{\varepsilon}\neg^{\varepsilon} (x \supset^{\delta} y);\\
&\neg^{\varphi} x = x \supset^{\delta} \neg^{\varepsilon} x;\\
&x \supset^{\delta} y = \neg^{\varphi}\neg^{\varphi} (x \supset^{\alpha} y);\\
&\neg^{\varepsilon} x = x \supset^{\alpha} \neg^{\varphi} x.
\end{aligned}$$

Теперь покажем, что через базовые операции $M^{\delta,\varepsilon}$ нельзя выразить унарный оператор f^1, такой, что $f^1(½) \neq f^1(0)$, содержащий не меньше одного вхождения базовой операции.

Индуктивное допущение. Пусть f^1 нельзя выразить в $M^{\delta,\varepsilon}$, используя менее k ($k \geq 1$) вхождений $\supset^{\delta}$ и $\neg^{\varepsilon}$.

Допустим, что f^1 можно выразить посредством суперпозиции g операций $\supset^{\delta}$ и $\neg^{\varepsilon}$, содержащей в точности k вхождений данных операций.

Случай 1. Пусть $g(x) = \neg^{\varepsilon} h(x)$

(1) $\neg^{\varepsilon} h(½) \neq \neg^{\varepsilon} h(0)$ (по условию).

(2) $h(x)$ содержит l ($0 < l < k$) вхождений базовых операций или $h(x)$ есть x (по условию).

(3) пусть $h(x)$ есть x (допущение).

(4) $\neg^{\varepsilon} ½ \neq \neg^{\varepsilon} 0$ (из 1, 3).

(5) $\neg^{\varepsilon} ½ = \neg^{\varepsilon} 0$ (по определению $\neg^{\varepsilon}$).

(6) $h(x)$ содержит l вхождений базовых операций (из 2–5).

(7) $h(½) = h(0)$ (из 6 по индуктивному допущению).

(8) $\neg^{\varepsilon} h(½) = \neg^{\varepsilon} h(0)$ (из 7 по определению $\neg^{\varepsilon}$).

(9) неверно, что $g(x) = \neg^{\varepsilon} h(x)$ (из 1, 8).

Случай 2. Пусть $g(x) = h'(x) \supset^{\delta} h''(x)$.

(1) $h'(½) \supset^{\delta} h''(½) \neq h'(0) \supset^{\delta} h''(0)$ (по условию).

(2) $h'(x)$ содержит l $(0 < l < k)$ вхождений базовых операций или $h'(x)$ есть x (по условию).

(3) $h''(x)$ содержит m $(0 < m < k)$ вхождений базовых операций или $h''(x)$ есть x (по условию).

(4) пусть $h'(x)$ есть x и $\mathrm{h}''(x)$ есть x (допущение).

(5) $½ \supset^{\delta} ½ \neq 0 \supset^{\delta} 0$ (из 1, 4).

(6) $½ \supset^{\delta} ½ = 0 \supset^{\delta} 0$ (по определению $\supset^{\delta}$).

(7) неверно, что $h'(x)$ есть x и $h''(x)$ есть x (из 5, 6).

(8) пусть $h'(x)$ содержит l вхождений и $h''(x)$ содержит m вхождений базовых операций.

(9) $h'(½) = h'(0)$ (из 8 по индуктивному допущению).

(10) $h''(½) = h''(0)$ (из 8 по индуктивному допущению).

(11) $h'(½) \supset^{\delta} h''(½) = h'(0) \supset^{\delta} h''(0)$ (по определению $\supset^{\delta}$).

(12) неверно, что $h'(x)$ содержит l вхождений и $h''(x)$ содержит m вхождений базовых операций (из 1, 11).

(13) пусть $h'(x)$ содержит l вхождений базовых операций и $h''(x)$ есть x (допущение).

(14) $h'(½) \supset^{\delta} (½) \neq h'(0) \supset^{\delta} (0)$ (из 1, 13).

(15) $h'(½) \supset^{\delta} (½) = ½$ и $h'(0) \supset^{\delta} (0) = 1$, или $h'(½) \supset^{\delta} (½) = 1$ и $h'(0) \supset^{\delta} (0) = ½$ (из 14 по определению $\supset^{\delta}$).

(16) пусть $h'(½) \supset^{\delta} (½) = ½$ и $h'(0) \supset^{\delta} (0) = 1$ (допущение).

(17) $h'(½) = 1$ (из 16 по определению $\supset^{\delta}$).

(18) $h'(0) \neq 1$ (из 16 по определению $\supset^{\delta}$).

(19) $h'(½) \neq h'(0)$ (из 17, 18).

(20) неверно, что $h'(½) \supset^{\delta} (½) = ½$ и $h'(0) \supset^{\delta} (0) = 1$ (из 19 и индуктивного допущения).

(21) $h'(½) \supset^{\delta} (½) = 1$ и $h'(0) \supset^{\delta} (0) = ½$ (из 15, 20).

(22) $h'(½) \neq 1$ (из 21 по определению $\supset^\delta$).

(23) $h'(0) = 1$ (из 21 по определению $\supset^\delta$).

(24) $h'(½) \neq h'(0)$ (из 22, 23).

(25) неверно, что $h'(x)$ содержит l вхождений базовых операций и $h''(x)$ есть x (из 24 и индуктивного допущения).

(26) пусть $h'(x)$ есть x и $h''(x)$ содержит m вхождений базовых операций (допущение).

(27) $½ \supset^\delta h''(½) = ½$ и $0 \supset^\delta h''(0) = 1$, или $½ \supset^\delta h''(½) = 1$ и $0 \supset^\delta h''(0) = ½$ (из 26 по определению $\supset^\delta$). Однако это невозможно в силу определения $\supset^\delta$.

(28) неверно, что $h'(x)$ есть x и $\mathrm{h}''(x)$ содержит m вхождений базовых операций (из 27).

(29) неверно, что $g(x) = h'(x) \supset^\delta h''(x)$ (из 2, 3, 4, 12, 25, 28).

Таким образом, через базовые операции $M^{\delta,\varepsilon}$ нельзя выразить унарный оператор f^1, такой, что $f^1(½) \neq f^1(0)$, содержащий не меньше одного вхождения базовой операции.

Однако такой оператор выразим в $M^{\beta,\varepsilon}$, $M^{\gamma,\varepsilon}$, $M^{\beta,\varphi}$, $M^{\gamma,\varphi}$: $(x \supset^\beta x) \supset^\beta x$, $(x \supset^\gamma x) \supset^\gamma x$.

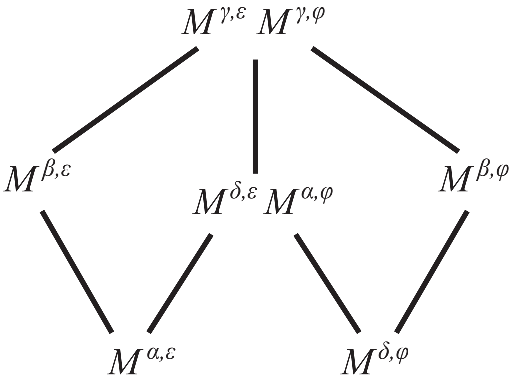
Утверждение 6.

$M^{\gamma,\varepsilon}$ функционально эквивалентна $M^{\gamma,\varphi}$. В этих матрицах также выразимы базовые связки всех остальных матриц.

Чтобы доказать данное утверждение достаточно следующих тождеств:

$$\neg^\varphi x = x \supset^\gamma \neg^\varepsilon x;$$
$$\neg^\varepsilon x = \mathrm{x} \supset^\gamma \neg^\varphi x;$$
$$x \supset^\beta y = x \supset^\gamma (\neg^\varphi y \supset^\gamma y)\ ;$$
$$x \supset^\delta y = \neg^\varphi \neg^\varphi (x \supset^\gamma \mathrm{y}).$$

Обобщая доказанные утверждения, можно заключить, что между матрицами $M^{\alpha,\varepsilon}$, $M^{\beta,\varepsilon}$, $M^{\gamma,\varepsilon}$, $M^{\delta,\varepsilon}$, $M^{\alpha,\varphi}$, $M^{\beta,\varphi}$, $M^{\gamma,\varphi}$, $M^{\delta,\varphi}$ имеет место порядок по отношению выразимости базовых связок. Причём, $M^{\gamma,\varepsilon}$ и функционально эквивалентная ей $M^{\gamma,\varphi}$ выступают в роли максимума, $M^{\alpha,}$ и $M^{\delta,\varphi}$ есть несравнимые минимумы, а $M^{\beta,\varepsilon}$, $M^{\beta,\varphi}$ и $M^{\delta,\varepsilon}$, функционально эквивалентная $M^{\alpha,\varphi}$ представляют собой три несравнимых промежуточных элемента. Все это можно представить в виде следующей шестиэлементной решетки:



Интересно, что даже максимальный элемент не является функционально полным. Ведь в противном случае, в $M^{\gamma,\varepsilon}$ был бы выразим следующий унарный оператор:

	f^1
1	1
½	0
0	1

Однако, это означало бы, что класс тавтологий в $M^{\gamma,\varepsilon}$ не является классическим, что противоречит Утверждению 1.

Итак, мы показали, что различные трехэлементные матрицы с классическим отношением логического следования не только различаются по силе с функциональной точки зрения, но и образуют достаточно интересную структуру. Также интересно, что базовые операции для $\mathbf{C}_2$ образуют функционально полную систему, однако для трехзначного случая это совсем не так.

В стандартной двузначной матрице классическая конъюнкция и дизъюнкция обладают свойствами решеточных операторов. То есть, они удовлетворяют следующим тождествам:

Идемпотентность: $x \vee x = x, x \wedge x = x$;

Коммутативность: $x \vee y = y \vee x, x \wedge y = y \wedge x$;

Ассоциативность: $x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z, x \wedge (y \wedge z) = (x \wedge y) \wedge z$;

Поглощение: $x \vee (x \wedge y) = x, x \wedge (x \vee y) = x$.

Так ли это для рассмотренных выше матриц? Выразим дизъюнкцию через импликацию и отрицание стандартным образом:

$$x \vee y = \neg x \supset y.$$

В зависимости от выбранных $\neg$ и $\supset$ может получиться одна из следующих связок.

$\vee^1$	1	½	0
1	1	1	1
½	1	0	0
0	1	0	0

$\vee^2$	1	½	0
1	1	1	1
½	1	½	0
0	1	½	0

$\vee^3$	1	½	0
1	1	1	1
½	1	0	½
0	1	0	½

$\vee^4$	1	½	0
1	1	1	1
½	1	½	½
0	1	½	½

Операции $\vee^1$ сответствует $M^{\alpha,\varepsilon}$ и $M^{\alpha,\varphi}$. Операции $\vee^2$ сответствует $M^{\beta,\varepsilon}$ и $M^{\beta,\varphi}$. Операции $\vee^3$ сответствует $M^{\gamma,\varepsilon}$ и $M^{\gamma,\varphi}$. Операции $\vee^4$ сответствует $M^{\delta,\varepsilon}$ и $M^{\delta,\varphi}$. Теперь определим конъюнкцию через импликацию и отрицание:

$$\mathrm{x} \wedge \mathrm{y} = \neg(\mathrm{x} \supset \neg \mathrm{y}).$$

В зависимости от выбранных $\neg$ и $\supset$ возможны два варианта.

$\wedge^1$	1	½	0
1	1	0	0
½	0	0	0
0	0	0	0

$\wedge^2$	1	½	0
1	1	½	½
½	½	½	½
0	½	½	½

Операция $\wedge^1$ соответствует $M^{\alpha,\varepsilon}$, $M^{\beta,\varepsilon}$, $M^{\gamma,\varepsilon}$, $M^{\delta,\varepsilon}$. Операция $\wedge^2$ соответствует $M^{\alpha,\varphi}$, $M^{\beta,\varphi}$, $M^{\gamma,\varphi}$, $M^{\delta,\varphi}$.

	$M^{\alpha,\varepsilon}$	$M^{\beta,\varepsilon}$	$M^{\gamma,\varepsilon}$	$M^{\delta,\varepsilon}$	$M^{\alpha,\varphi}$	$M^{\beta,\varphi}$	$M^{\gamma,\varphi}$	$M^{\delta,\varphi}$
$x \vee x = x$	-	+	-	-	-	+	-	-
$x \wedge x = x$	-	-	-	-	-	-	-	-
$x \vee y = y \vee x$	+	-	-	+	+	-	-	+
$x \wedge y = y \wedge x$	+	+	+	+	+	+	+	+
$x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z$	+	+	-	+	+	+	-	+
$x \wedge (y \wedge z) = (x \wedge y) \wedge z$	+	+	+	+	+	+	+	+
$x \vee (x \wedge y) = x$	-	-	-	-	-	-	-	-
$x \wedge (x \vee y) = x$	-	-	-	-	-	-	-	-

Таким образом, ни в одной из рассматриваемых матриц дизъюнкция и конъюнкция не обладают свойствами решеточных операторов.

ГЛАВА 3. ТРЕХЗНАЧНЫЕ ЛОГИЧЕСКИЕ МАТРИЦЫ С КЛАССИЧЕСКИМ КЛАССОМ ТАВТОЛОГИЙ И НЕКЛАССИЧЕСКИМ ОТНОШЕНИЕМ ЛОГИЧЕСКОГО СЛЕДОВАНИЯ

Наряду с трехэлементными логическими матрицами, в которых оказываются тавтологиями все классические законы и имеет место классическое отношение логического следования, существуют и матрицы, в которых сохраняются лишь классические тавтологии, а отношение логического следования отлично от классического.

Нашей целью является попытка по возможности систематического изучения класса подобных трехэлементных логических матриц.

3.1. Матрицы с одним выделенным значением

Была построена программа, посредством которой все возможные логические матрицы $M^* <\{0, ½, 1\}, \neg^*, \supset^*, \{1\}>$ проверялись на соответствие следующим двум условиям.

1. Тавтологии классической логики $\mathbf{p} \supset (\mathbf{q} \supset \mathbf{p})$, $(\mathbf{p} \supset (\mathbf{q} \supset \mathbf{r})) \supset ((\mathbf{p} \supset \mathbf{q}) \supset (\mathbf{p} \supset \mathbf{r}))$, $(\neg\mathbf{p} \supset \neg\mathbf{q}) \supset (\mathbf{q} \supset \mathbf{p})$, $\neg\neg(\mathbf{p} \supset \mathbf{p})$, $\neg(\mathbf{p} \supset \mathbf{p}) \supset \mathbf{p}$ должны быть общезначимы в M^*.

2. Формулы $(\mathbf{p} \supset \mathbf{q}) \supset (\mathbf{q} \supset \mathbf{p})$ и $(\mathbf{p} \supset \mathbf{p}) \supset \neg(\mathbf{p} \supset \mathbf{p})$, не являющиеся классическими тавтологиями, не должны быть общезначимы в M^*.

В результате были отброшены все матрицы, за исключением двух. Их базовые операции выглядят следующим образом:

$\supset^{\alpha,1}$	1	½	0
1	1	1	0
½	1	1	0
0	1	1	1

	$\neg^{\alpha,1}$
1	0
½	0
0	1

$\supset^{\beta,1}$	1	½	0
1	1	½	1
½	1	1	1
0	1	½	1

	$\neg^{\beta,1}$
1	½
½	1
0	½

Докажем, что если формула общезначима в M_2, она общезначима и в каждой из этих матриц, которые мы далее будем обозначать, соответственно, как $M_3^{\alpha,1}$ и $M_3^{\beta,1}$.

Теорема 4.

Существуют такие $L_{\supset\neg}$-формула **A** и оценка в M_2 v, что $|\mathbf{A}|_v^{M_2} = 0$, если и только если существует оценка в $M_3^{\alpha,1}$ v', при которой $|\mathbf{A}|_{v'}^{M_3^{\alpha,1}} = 0$.

Чтобы доказать Теорему 4, достаточно доказать следующие утверждения:

У1. $\forall v \forall \mathbf{A}$: если v – оценка в $M_3^{\alpha,1}$ и **A** – $L_{\supset\neg}$-формула, то если $|\mathbf{A}|_v^{M_3^{\alpha,1}} = 0$, то $|\mathbf{A}|_{\overset{=}{v}}^{M_2} = 0$.

У2. $\forall v \forall \mathbf{A}$: если v – оценка в M_2 и **A** – $L_{\supset\neg}$-формула, то если $|\mathbf{A}|_v^{M_2} = 0$, то $|\mathbf{A}|_v^{M_3^{\alpha,1}} = 0$.

Докажем У1 индукцией по длине $L_{\supset\neg}$-формулы.

Пусть У1 верно для формул, которые содержат менее, чем n вхождений связок. Тогда достаточно доказать, что У1 верно, если $L_{\supset\neg}$-формула **A** содержит в точности n вхождений связок и графически совпадает с формулой $\neg$**C** либо с формулой **D** $\supset$ **E**.

Случай 1. Пусть $L_{\supset\neg}$-формула **A** содержит в точности n вхождений связок и графически совпадает с формулой $\neg$**C**.

(1) неверно, что У1 (допущение).

(2) $\exists v \exists(\neg\mathbf{C})$: v – оценка в $M_3^{\alpha,1}$ и $\neg$**C** – $L_{\supset\neg}$-формула такие, что $|\neg\mathbf{C}|_v^{M_3^{\alpha,1}} = 0$ и $|\neg\mathbf{C}|_{\overset{=}{v}}^{M_2} \neq 0$ (из (1)).

(3) пусть $|\neg\mathbf{C}^*|^{M_3^{\alpha,1}}_{v^*} = 0$ и $|\neg\mathbf{C}^*|^{M_2}_{\overline{\overline{v}}^*} \neq 0$ (из (2), исключение кванторов).

(4) $|\neg\mathbf{C}^*|^{M_3^{\alpha,1}}_{v^*} = 0$ (из (3)).

(5) $|\mathbf{C}^*|^{M_3^{\alpha,1}}_{v^*} \in \{1, ½\}$ (из (4), в силу определений $\neg^{\alpha,1}$ и значения $L_{\supset\neg}$-формулы).

(6) $\mathbf{C}^*$ есть пропозициональная переменная α, или $\neg\mathbf{D}$, или $\mathbf{E} \supset \mathbf{F}$, где $\mathbf{D}$, $\mathbf{E}$, $\mathbf{F}$ – $L_{\supset\neg}$-формулы (В силу того, что $\mathbf{C}^*$ есть $L_{\supset\neg}$-формула).

(7) $\mathbf{C}^*$ есть пропозициональная переменная α (допущение).

(8) $v(\alpha) \in \{1, ½\}$ (из (7), (5)).

(9) $\overline{\overline{v}}(\alpha) = 1$ (из (8), по определению $\overline{\overline{v}}$).

(10) $|\mathbf{C}^*|^{M_2}_{\overline{\overline{v}}^*} = 1$ (из (9), (7)).

(11) $|\neg\mathbf{C}^*|^{M_2}_{\overline{\overline{v}}^*} = 0$ (из (10), в силу определений $\neg_2$ и значения $L_{\supset\neg}$-формулы).

(12) $|\neg\mathbf{C}^*|^{M_2}_{\overline{\overline{v}}^*} \neq 0$ (из (3)).

(13) неверно, что (6) (из (12), (3)).

(14) $\mathbf{C}^*$ есть $\neg\mathbf{D}$ или $\mathbf{E} \supset \mathbf{F}$, где $\mathbf{D}$, $\mathbf{E}$, $\mathbf{F}$ – $L_{\supset\neg}$-формулы (из (13), (6)).

(15) $\mathbf{C}^*$ есть $L_{\supset\neg}$-формула $\neg\mathbf{D}$ (допущение).

(16) $|\neg\mathbf{D}|^{M_3^{\alpha,1}}_{v^*} = 1$ (из (15), (5)).

(17) $|\mathbf{D}|^{M_3^{\alpha,1}}_{v^*} = 0$ (из (5), в силу определений $\neg^{\alpha,1}$ и значения $L_{\supset\neg}$-формулы).

(18) $|\mathbf{D}|^{M_2}_{\overline{\overline{v}}^*} = 0$ (из (17), по индуктивному допущению).

(19) $|\neg\mathbf{D}|^{M_2}_{\overline{\overline{v}}^*} = 1$ (из (18), в силу определений $\neg_2$ и значения $L_{\supset\neg}$-формулы).

(20) $|\mathbf{C}^*|^{M_2}_{\overline{\overline{v}}^*} = 1$ (из (19), (15)).

(21) $|\neg\mathbf{C^*}|\overset{M_2}{\underset{v^*}{=}} = 0$ (из (20), в силу определений $\neg_2$ и значения $L_{\supset\neg}$-формулы).

(22) неверно, что (15) (из (21), (12)).

(23) **C*** есть $L_{\supset\neg}$-формула $\mathbf{E} \supset \mathbf{F}$ (из (22), (14)).

(24) $|\mathbf{E} \supset \mathbf{F}|^{M_3^{\alpha,1}}_{v^*} = 1$ (из (23), (5)).

(25) $|\mathbf{E}|^{M_3^{\alpha,1}}_{v^*} = 0$ или $|\mathbf{F}|^{M_3^{\alpha,1}}_{v^*} \in \{1, ½\}$ (из (24), в силу определений $\supset^{\alpha,1}$ и значения $L_{\supset\neg}$-формулы).

(26) $|\mathbf{E}|^{M_3^{\alpha,1}}_{v^*} = 0$ (допущение).

(27) $|\mathbf{E}|\overset{M_2}{\underset{v^*}{=}} = 0$ (из (26), по индуктивному допущению).

(28) $|\mathbf{E} \supset \mathbf{F}|\overset{M_2}{\underset{v^*}{=}} = 1$ (из (27), в силу определений $\supset_2$ и значения $L_{\supset\neg}$-формулы).

(29) $|\mathbf{C^*}|\overset{M_2}{\underset{v^*}{=}} = 1$ (из (28), (23)).

(30) $|\neg\mathbf{C^*}|\overset{M_2}{\underset{v^*}{=}} = 0$ (из (29), в силу определений $\neg_2$ и значения $L_{\supset\neg}$-формулы).

(31) неверно, что (26) (из (30), (12)).

(32) $|\mathbf{F}|^{M_3^{\alpha,1}}_{v^*} \in \{1, ½\}$ (из (31), (25)).

(33) $|\neg\mathbf{F}|^{M_3^{\alpha,1}}_{v^*} = 0$ (из (32), в силу определений $\neg^{\alpha,1}$ и значения $L_{\supset\neg}$-формулы).

(34) формула $\neg$**F** содержит $n - 1$ связок, следовательно, к ней применимо индуктивное допущение.

(35) $|\neg\mathbf{F}|\overset{M_2}{\underset{v^*}{=}} = 0$ (из (33), по индуктивному допущению).

(36) $|\mathbf{F}|\overset{M_2}{\underset{v^*}{=}} = 1$ (из (35), в силу определений $\neg_2$ и значения $L_{\supset\neg}$-формулы).

(37) $|\mathbf{E} \supset \mathbf{F}|\overset{M_2}{\underset{v^*}{=}} = 1$ (из (36), в силу определений $\supset_2$ и значения $L_{\supset\neg}$-формулы).

(38) $|\mathbf{C^*}|\overset{M_2}{\underset{v^*}{=}} = 1$ (из (37), (23)).

(39) $|\neg \mathbf{C}^*|^{M_2}_{\overset{=}{v^*}} = 0$ (из (38), в силу определений $\neg_2$ и значения $L_{\supset\neg}$-формулы).

(40) неверно, что (23) (из (39), (12)).

(41) неверно, что (6) (из (40), (22), (7)).

(42) неверно, что (1) (из (6), (41)).

Случай 2. Пусть $L_{\supset\neg}$-формула **A** содержит в точности n вхождений связок и графически совпадает с формулой $\mathbf{D} \supset \mathbf{E}$. Докажем, что У1 выполняется для **A**.

(1) неверно, что У1 (допущение).

(2) $\exists v \exists (\mathbf{D} \supset \mathbf{E})$: v – оценка в $M_3^{\alpha,1}$ и $\mathbf{D} \supset \mathbf{E}$ – $L_{\supset\neg}$-формула такие, что $|\neg \mathbf{D} \supset \mathbf{E}\,|^{M_3^{\alpha,1}}_{v} = 0$ и $|\mathbf{D} \supset \mathbf{E}\,|^{M_2}_{\overset{=}{v}} \neq 0$ (из (1)).

(3) пусть $|\mathbf{D}^* \supset \mathbf{E}^*|^{M_3^{\alpha,1}}_{v^*} = 0$ и $|\mathbf{D}^* \supset \mathbf{E}^*|^{M_2}_{\overset{=}{v^*}} \neq 0$ (из (2), исключение кванторов).

(4) $|\mathbf{D}^* \supset \mathbf{E}^*|^{M_3^{\alpha,1}}_{v^*} = 0$ (из (3)).

(5) $|\mathbf{D}^* \supset \mathbf{E}^*|^{M_2}_{\overset{=}{v^*}} \neq 0$ (из (3)).

(6) $|\mathbf{D}^*|^{M_3^{\alpha,1}}_{v^*} \supset^{*,1} |\mathbf{E}^*|^{M_3^{\alpha,1}}_{v^*} = 0$ (из (4), в силу определения значения $L_{\supset\neg}$-формулы).

(7) $|\mathbf{D}^*|^{M_3^{\alpha,1}}_{v^*} \in \{1, ½\}$ и $|\mathbf{E}^*|^{M_3^{\alpha,1}}_{v^*} = 0$ (из (6) , в силу определения $\supset^{\alpha,1}$).

(8) $|\mathbf{D}^*|^{M_2}_{\overset{=}{v^*}} \supset_2 |\mathbf{E}^*|^{M_2}_{\overset{=}{v^*}} \neq 0$ (из (5), в силу определения значения $L_{\supset\neg}$-формулы).

(9) $|\mathbf{D}^*|^{M_2}_{\overset{=}{v^*}} = 0$ или $|\mathbf{E}^*|^{M_2}_{\overset{=}{v^*}} = 1$ (из (8), в силу определения $\supset_2$).

(10) $|\mathbf{E}^*|^{M_3^{\alpha,1}}_{v^*} = 0$ (из (7)).

(11) $|\mathbf{E}^*|^{M_2}_{\overset{=}{v^*}} = 0$ (из (10), в силу индуктивного допущения).

(12) $|\mathbf{D}^*|^{M_2}_{\overset{=}{v^*}} = 0$ (из (11), (9)).

(13) $|\mathbf{D}^*|^{M_3^{\alpha,1}}_{v^*} \in \{1, ½\}$ (из (7)).

(14) **D*** есть пропозициональная переменная α, или ¬**F**, или **G** ⊃ **H**, где **F**, **G**, **H** – $L_{\supset\neg}$-формулы (в силу того, что **D*** есть $L_{\supset\neg}$-формула).

(15) **D*** есть пропозициональная переменная α (допущение).

(16) $v^*(\alpha) \in \{1, ½\}$ (из (15), (13)).

(17) $\overline{\overline{v^*}}(\alpha) = 1$ (из (16), по определению $\overset{=}{v}$).

(18) $|\mathbf{D^*}|^{M_2}_{\overline{\overline{v^*}}} = 1$ (из (17) и (15)).

(19) неверно, что (15) (из (18), (12)).

(20) **D*** есть ¬**F**, или **G** ⊃ **H**, где **F**, **G**, **H** – $L_{\supset\neg}$-формулы (из (19), (14)).

(21) **D*** есть формула ¬**F** (допущение).

(22) $|\neg\mathbf{F}|^{M_3^{\alpha,1}}_{v^*} \in \{1, ½\}$ (из (21), (13)).

(23) $\neg^{\alpha,1}|\mathbf{F}|^{M_3^{\alpha,1}}_{v^*} \in \{1, ½\}$ (из (22), в силу определения значения $L_{\supset\neg}$-формулы).

(24) $|\mathbf{F}|^{M_3^{\alpha,1}}_{v^*} = 0$ (из (23), в силу определения $\neg^{\alpha,1}$).

(25) $|\mathbf{F}|^{M_2}_{\overline{\overline{v^*}}} = 0$ (из (24), по индуктивному допущению).

(26) $|\neg\mathbf{F}|^{M_2}_{\overline{\overline{v^*}}} = 1$ (из (25), в силу определений $\neg_2$ и значения $L_{\supset\neg}$-формулы).

(27) $|\mathbf{D^*}|^{M_2}_{\overline{\overline{v^*}}} = 1$ (из (26), (21)).

(28) неверно, что (21) (из (27), (12)).

(29) **D*** есть формула **G** ⊃ **H** (из (28), (20)).

(30) $|\mathbf{G} \supset \mathbf{H}|^{M_3^{\alpha,1}}_{v^*} \in \{1, ½\}$ (из (29), (13)).

(31) $|\mathbf{G}|^{M_3^{\alpha,1}}_{v^*} \supset^{\alpha,1} |\mathbf{H}|^{M_3^{\alpha,1}}_{v^*} \in \{1, ½\}$ (из из (30), в силу определения значения $L_{\supset\neg}$-формулы).

(32) $|\mathbf{G}|^{M_3^{\alpha,1}}_{v^*} = 0$ или $|\mathbf{H}|^{M_3^{\alpha,1}}_{v^*} \in \{1, ½\}$ (из из (31), в силу определения $\supset^{\alpha,1}$).

(33) $|\mathbf{G}|^{M_3^{\alpha,1}}_{v^*} = 0$ (допущение).

(34) $|\mathbf{G}|^{M_2}_{v^*} = 0$ (из (33), в силу индуктивного допущения).

(35) $|\mathbf{G} \supset \mathbf{H}|^{M_2}_{v^*} = 1$ (из (34), в силу определений $\supset_2$ и значения $L_{\supset\neg}$-формулы).

(36) $|\mathbf{D}^*|^{M_2}_{v^*} = 1$ (из (36), (29)).

(37) неверно, что (33) (из (36), (12)).

(38) $|\mathbf{H}|^{M_3^{\alpha,1}}_{v^*} \in \{1, ½\}$ (из (37), (32)).

(39) $|\neg\mathbf{H}|^{M_3^{\alpha,1}}_{v^*} = 0$ (из (38), в силу определений $\neg^{\alpha,1}$ и значения $L_{\supset\neg}$-формулы).

(40) формула $\neg\mathbf{H}$ содержит не более $n - 1$ связок, следовательно, к ней применимо индуктивное допущение.

(41) $|\neg\mathbf{H}|^{M_2}_{v^*} = 0$ (из (40), (39)).

(42) $|\mathbf{H}|^{M_2}_{v^*} = 1$ (из (41), в силу определений $\neg_2$ и значения $L_{\supset\neg}$-формулы).

(43) $|\mathbf{G} \supset \mathbf{H}|^{M_2}_{v^*} = 1$ (из (42), в силу определений $\supset_2$ и значения $L_{\supset\neg}$-формулы).

(44) $|\mathbf{D}^*|^{M_2}_{v^*} = 1$ (из (43), (29)).

(45) неверно, что (29) (из (44), (12)).

(46) неверно, что (14) (из (45), (28), (19)).

(47) неверно, что (1) (из (46), (14)).

Утверждение У1 доказано.

Докажем У2. Для этого необходимо и достаточно доказать следующую лемму.

Лемма 3.
$\forall v$: Если v – оценка в M_2, то v – оценка в $M_3^{\alpha,1}$ и $\forall \mathbf{A}$: $|\mathbf{A}|^{M_3^{\alpha,1}}_{v} = |\mathbf{A}|^{M_2}_{v}$.

Доказательство.

Пусть Лемма 3 неверна. Тогда $\exists v$: v – оценка в M_2 и имеет место следующее: v – не оценка в $M_3^{\alpha,1}$ или $\exists \mathbf{A}$: $|\mathbf{A}|_v^{M_3^{\alpha,1}} = |\mathbf{A}|_v^{M_2}$.

$\forall v$: Если v – оценка в M_2, то v – оценка в $M_3^{\alpha,1}$ в силу определения оценки в $M_3^{\alpha,1}$. Таким образом, в силу допущения, $\exists v$: v – оценка в M_2 и v – оценка в $M_3^{\alpha,1}$ и $\exists \mathbf{A}$: $|\mathbf{A}|_v^{M_3^{\alpha,1}} = |\mathbf{A}|_v^{M_2}$. Докажем, что это не так индукцией по длине $L_{\supset\neg}$-формулы.

Пусть утверждение верно для формул, которые содержат менее, чем n вхождений связок. Тогда достаточно доказать, что утверждение верно, если $L_{\supset\neg}$-формула $\mathbf{A}$ содержит в точности n вхождений связок и графически совпадает с формулой $\neg\mathbf{C}$ либо с формулой $\mathbf{D} \supset \mathbf{E}$.

Случай 1. Пусть $L_{\supset\neg}$-формула $\mathbf{A}$ содержит в точности n вхождений связок и графически совпадает с формулой $\neg\mathbf{C}$.

(1) $\exists v$: v – оценка в M_2 и v – оценка в $M_3^{\alpha,1}$ и $\exists(\neg\mathbf{C})$: $|\neg\mathbf{C}|_v^{M_3^{\alpha,1}} \neq |\neg\mathbf{C}|_v^{M_2}$ (допущение).

(2) пусть $|\neg\mathbf{C}^*|_{v^*}^{M_3^{\alpha,1}} \neq |\neg\mathbf{C}^*|_{v^*}^{M_2}$ (из (1), исключение кванторов).

(3) $|\neg\mathbf{C}^*|_{v^*}^{M_2} = 1$ или $|\neg\mathbf{C}^*|_{v^*}^{M_2} = 0$ (из того факта, что v^* есть оценка в M_2).

(4) $|\neg\mathbf{C}^*|_{v^*}^{M_2} = 1$ (допущение).

(5) $\neg_2|\mathbf{C}^*|_{v^*}^{M_2} = 1$ (из (4), по определению значения $L_{\supset\neg}$-формулы).

(6) $|\mathbf{C}^*|_{v^*}^{M_2} = 0$ (из (5), по определению $\neg_2$).

(7) $|\mathbf{C}^*|_{v^*}^{M_3^{\alpha,1}} = |\mathbf{C}^*|_{v^*}^{M_2}$ (по индуктивному допущению).

(8) $|\mathbf{C}^*|_{v^*}^{M_3^{\alpha,1}} = 0$ (из (7), (6)).

(9) $\neg^{\alpha,1}|\mathbf{C}^*|_{v^*}^{M_3^{\alpha,1}} = 1$ (из (8), по определению $\neg^{\alpha,1}$).

(10) $|\neg\mathbf{C}^*|_{v^*}^{M_3^{\alpha,1}} = 1$ (из (9), по определению значения $L_{\supset\neg}$-формулы).

(11) $|\neg\mathbf{C}^*|_{v^*}^{M_3^{\alpha,1}} = |\neg\mathbf{C}^*|_{v^*}^{M_2}$ (из (10), (4)).

(12) неверно, что (4) (из (11), (2)).

(13) $|\neg\mathbf{C}^*|_{v^*}^{M_2} = 0$ (из (12), (3)).

(14) $\neg_2|\mathbf{C}^*|_{v^*}^{M_2} = 0$ (из (13), по определению значения $L_{\supset\neg}$-формулы).

(15) $|\mathbf{C}^*|_{v^*}^{M_2} = 1$ (из (14), по определению $\neg_2$).

(16) $|\mathbf{C}^*|_{v^*}^{M_3^{\alpha,1}} = |\mathbf{C}^*|_{v^*}^{M_2}$ (по индуктивному допущению).

(17) $|\mathbf{C}^*|_{v^*}^{M_3^{\alpha,1}} = 1$ (из (16), (17)).

(18) $\neg^{\alpha,1}|\mathbf{C}^*|_{v^*}^{M_3^{\alpha,1}} = 0$ (из (17), по определению $\neg^{\alpha,1}$).

(19) $|\neg\mathbf{C}^*|_{v^*}^{M_3^{\alpha,1}} = 0$ (из (18), по определению значения $L_{\supset\neg}$-формулы).

(20) $|\neg\mathbf{C}^*|_{v^*}^{M_3^{\alpha,1}} = |\neg\mathbf{C}^*|_{v^*}^{M_2}$ (из (19), (13)).

(21) неверно, что (1) (из (20), (2)).

Случай 2. Пусть $L_{\supset\neg}$-формула **A** содержит в точности n вхождений связок и графически совпадает с формулой $\mathbf{D} \supset \mathbf{E}$. Докажем, что У1 выполняется для **A**.

(1) $\exists v$: v – оценка в M_2 и v – оценка в $M_3^{\alpha,1}$ и $\exists(\mathbf{D} \supset \mathbf{E})$: $|\mathbf{D} \supset \mathbf{E}|_v^{M_3^{\alpha,1}} \neq |\mathbf{D} \supset \mathbf{E}|_v^{M_2}$ (допущение).

(2) Пусть $|\mathbf{D}^* \supset \mathbf{E}^*|_{v^*}^{M_3^{\alpha,1}} \neq |\mathbf{D}^* \supset \mathbf{E}^*|_{v^*}^{M_2}$ (из (1), исключение кванторов).

(3) $|\mathbf{D}^* \supset \mathbf{E}^*|_{v^*}^{M_2} = 1$ или $|\mathbf{D}^* \supset \mathbf{E}^*|_{v^*}^{M_2} = 0$ (из того факта, что v^* есть оценка в M_2).

(4) $|\mathbf{D}^* \supset \mathbf{E}^*|_{v^*}^{M_2} = 1$ (допущение).

(5) $|\mathbf{D}^*|_{v^*}^{M_2} \supset_2 |\mathbf{E}^*|_{v^*}^{M_2} = 1$ (из (5), по определению значения $L_{\supset\neg}$-формулы).

(6) $|\mathbf{D}^*|_{v^*}^{M_2} = 0$ или $|\mathbf{E}^*|_{v^*}^{M_2} = 1$ (из (4), по определению $\supset_2$).

(7) $|\mathbf{D}^*|^{M_2}_{v^*} = 0$ (допущение).

(8) $|\mathbf{D}^*|^{M_2}_{v^*} = |\mathbf{D}^*|^{M_3^{\alpha,1}}_{v^*}$ (по индуктивному допущению).

(9) $|\mathbf{D}^*|^{M_3^{\alpha,1}}_{v^*} = 0$ (из (8), (7)).

(10) $|\mathbf{D}^*|^{M_3^{\alpha,1}}_{v^*} \supset^{\alpha,1} |\mathbf{E}^*|^{M_3^{\alpha,1}}_{v^*} = 1$ (из (9), по определению $\supset^{\alpha,1}$).

(11) $|\mathbf{D}^* \supset \mathbf{E}^*|^{M_3^{\alpha,1}}_{v^*} = 1$ (из (10), по определению значения $L_{\supset\neg}$-формулы).

(12) $|\mathbf{D}^* \supset \mathbf{E}^*|^{M_3^{\alpha,1}}_{v^*} = |\mathbf{D}^* \supset \mathbf{E}^*|^{M_2}_{v^*}$ (из (11), (4)).

(13) неверно, что (7) (из (12), (2)).

(14) $|\mathbf{E}^*|^{M_2}_{v^*} = 1$ (из (13), (6)).

(15) $|\mathbf{D}^*|^{M_3^{\alpha,1}}_{v^*} \supset^{\alpha,1} |\mathbf{E}^*|^{M_3^{\alpha,1}}_{v^*} = 1$ (из (14), по определению $\supset^{\alpha,1}$).

(16) $|\mathbf{D}^* \supset \mathbf{E}^*|^{M_3^{\alpha,1}}_{v^*} = 1$ (из (15), по определению значения $L_{\supset\neg}$-формулы).

(17) $|\mathbf{D}^* \supset \mathbf{E}^*|^{M_3^{\alpha,1}}_{v^*} = |\mathbf{D}^* \supset \mathbf{E}^*|^{M_2}_{v^*}$ (из (11), (4)).

(18) неверно, что (4) (из (17), (2)).

(19) $|\mathbf{D}^* \supset \mathbf{E}^*|^{M_2}_{v^*} = 0$ (из (18), (3)).

(20) $|\mathbf{D}^*|^{M_2}_{v^*} \supset_2 |\mathbf{E}^*|^{M_2}_{v^*} = 0$ (из (19), по определению значения $L_{\supset\neg}$-формулы).

(21) $|\mathbf{D}^*|^{M_2}_{v^*} = 1$ и $|\mathbf{E}^*|^{M_2}_{v^*} = 0$ (из (20), по определению $\supset_2$).

(22) $|\mathbf{D}^*|^{M_2}_{v^*} = 1$ (из (21)).

(23) $|\mathbf{D}^*|^{M_3^{\alpha,1}}_{v^*} = 1$ (из (22), по индуктивному допущению).

(24) $|\mathbf{E}^*|^{M_2}_{v^*} = 0$ (из (22)).

(25) $|\mathbf{E}^*|^{M_3^{\alpha,1}}_{v^*} = 0$ (из (24), по индуктивному допущению).

(26) $|\mathbf{D}^*|^{M_3^{\alpha,1}}_{v^*} \supset^{\alpha,1} |\mathbf{E}^*|^{M_3^{\alpha,1}}_{v^*} = 0$ (из (23), (25), по определению $\supset^{\alpha,1}$).

(27) $|\mathbf{D}^* \supset \mathbf{E}^*|^{M_3^{\alpha,1}}_{v^*} = 0$ (из (15), по определению значения $L_{\supset\neg}$-формулы).

(28) $|\mathbf{D}^* \supset \mathbf{E}^*|^{M_3^{\alpha,1}}_{v^*} = |\mathbf{D}^* \supset \mathbf{E}^*|^{M_2}_{v^*}$ (из (27), (19)).

(29) неверно, что (1) (из (28), (2)).

Лемма 3 доказана. У1 непосредственно следует из Леммы 3. Теорема 4 доказана.

Теперь рассмотрим вторую матрицу. Можно доказать следующую теорему.

Теорема 5.

Существуют такие $L_{\supset\neg}$-формула **A** и оценка в M_2 v, что $|\mathbf{A}|^{M_2}_{v} = 0$, если, и только если, существует оценка в $M_3^{\beta,1}$ v', при которой $|\mathbf{A}|^{M_3^{\beta,1}}_{v'} = ½$.

Для построения доказательства нам потребуется ряд определений.

Пусть φ^{β} есть множество {<1, 1>, <½, 0>, <0, ½>}. Ясно, что φ^{β} есть отображение множества {0, ½, 1} на множество {0, ½, 1}.

Для всякого отображения v множества всех пропозициональных переменных в {0, ½, 1} называем β-замещением отображения v такое отображение w множества всех пропозициональных переменных в {0, 1}, что для всякой пропозициональной переменной **p**

$$w(\mathbf{p}) = \begin{cases} 1, \text{ если } v(\mathbf{p}) = 1, \\ 0, \text{ если } v(\mathbf{p}) = ½, \\ ½, \text{ если } v(\mathbf{p}) = 0. \end{cases}$$

Можно доказать, что для всякого отображения множества всех пропозициональных переменных в {0, ½, 1} существует единственное β-замещение этого отображения. Обозначим через v^{β} β-замещение отображения v.

Теперь нам потребуется следующая лемма.

Лемма 4.

Для каждой $L_{\supset\neg}$-формулы **A** и оценки v в $M_3^{\alpha,1}$ верно: v^{β} есть оценка в $M_3^{\beta,1}$ и $|\mathbf{A}|^{M_3^{\alpha,1}}_{v} = \varphi^{\beta}|\mathbf{A}|^{M_3^{\beta,1}}_{v^{\beta}}$.

Если v – оценка в $M_3^{\alpha,1}$, то v есть отображение на $\{1, ½, 0\}$. Но тогда и v^{β} есть отображение на $\{1, ½, 0\}$. Следовательно, в силу определения оценки, v^{β} есть оценка в $M_3^{\beta,1}$.

Проведем дальнейшее доказательство индукцией по построению формулы.

Пусть утверждение верно для формул, которые содержат менее, чем n вхождений связок. Тогда достаточно доказать, что утверждение верно, если $L_{\supset\neg}$-формула $\mathbf{A}$ содержит в точности n вхождений связок и графически совпадает с формулой $\neg\mathbf{C}$ либо с формулой $\mathbf{D} \supset \mathbf{E}$.

Случай 1. Пусть $L_{\supset\neg}$-формула $\mathbf{A}$ содержит в точности n вхождений связок и графически совпадает с формулой $\neg\mathbf{C}$.

(1) неверно, что $\forall v \forall(\neg\mathbf{C})$: если v – оценка в $M_3^{\alpha,1}$ и $(\neg\mathbf{C})$ – $L_{\supset\neg}$-формула, то $|\neg\mathbf{C}|_{v}^{M_3^{\alpha,1}} = \varphi^{\beta}|\neg\mathbf{C}|_{v^{\beta}}^{M_3^{\beta,1}}$ (допущение).

(2) $\exists v \exists(\neg\mathbf{C})$: v – оценка в $M_3^{\alpha,1}$ и $(\neg\mathbf{C})$ – $L_{\supset\neg}$-формула и $|\neg\mathbf{C}|_{v}^{M_3^{\alpha,1}} = = \varphi^{\beta}|\neg\mathbf{C}|_{v^{\beta}}^{M_3^{\beta,1}}$ (из (1)).

(3) пусть $|\neg\mathbf{C}^*|_{v^*}^{M_3^{\alpha,1}} \neq \varphi^{\beta}|\neg\mathbf{C}^*|_{v^{\beta}*}^{M_3^{\beta,1}}$ (из (2), исключение кванторов).

(4) $|\neg\mathbf{C}^*|_{v^*}^{M_3^{\alpha,1}} = 1$ или $|\neg\mathbf{C}^*|_{v^*}^{M_3^{\alpha,1}} = 0$ (по определению $\neg_2$).

(5) $|\neg\mathbf{C}^*|_{v^*}^{M_3^{\alpha,1}} = 1$ (допущение).

(6) $\neg_2|\mathbf{C}^*|_{v^*}^{M_3^{\alpha,1}} = 1$ (из (5), по определению значения $L_{\supset\neg}$-формулы).

(7) $|\mathbf{C}^*|_{v^*}^{M_3^{\alpha,1}} = 0$ (из (6), по определению $\neg_2$).

(8) $\varphi^{\beta}|\mathbf{C}|_{v^{\beta}}^{M_3^{\beta,1}} = 0$ (из (7), по индуктивному допущению).

(9) $|\mathbf{C}|_{v^{\beta}}^{M_3^{\beta,1}} = ½$ (из (8), по определению φ^{β}).

(10) $\neg^{\beta,1}|\mathbf{C}|_{v^{\beta}}^{M_3^{\beta,1}} = 1$ (из (9), по определению $\neg^{\beta,1}$).

(11) $|\neg\mathbf{C}|_{v^{\beta}}^{M_3^{\beta,1}} = 1$ (из (10), по определению значения $L_{\supset\neg}$-формулы).

(12) $\varphi^{\beta}|\mathbf{C}|^{M_3^{\beta,1}}_{v^{\beta}} = 1$ (из (11), по определению φ^{β}).

(13) $|\neg\mathbf{C}^*|^{M_3^{\alpha,1}}_{v^*} = \varphi^{\beta}|\neg\mathbf{C}|^{M_3^{\beta,1}}_{v^{\beta}}$ (из (12), (5)).

(14) неверно, что (5) (из (13), (3)).

(15) $|\neg\mathbf{C}^*|^{M_3^{\alpha,1}}_{v^*} = 0$ (из (14), (4)).

(16) $\neg^2|\mathbf{C}^*|^{M_3^{\alpha,1}}_{v^*} = 0$ (из (15), по определению значения $L_{\supset\neg}$-формулы).

(17) $|\mathbf{C}^*|^{M_3^{\alpha,1}}_{v^*} = 1$ или $|\mathbf{C}^*|^{M_3^{\alpha,1}}_{v^*} = ½$ (из (16), по определению $\neg_2$).

(18) $|\mathbf{C}^*|^{M_3^{\alpha,1}}_{v^*} = 1$ (допущение).

(19) $\varphi^{\beta}|\mathbf{C}|^{M_3^{\beta,1}}_{v^{\beta}} = 1$ (из (18), по индуктивному допущению).

(20) $|\mathbf{C}|^{M_3^{\beta,1}}_{v^{\beta}} = 1$ (из (19), по определению φ^{β}).

(21) $\neg^{\beta,1}|\mathbf{C}|^{M_3^{\beta,1}}_{v^{\beta}} = ½$ (из (20), по определению $\neg^{\beta,1}$).

(22) $|\neg\mathbf{C}|^{M_3^{\beta,1}}_{v^{\beta}} = ½$ (из (21), по определению значения $L_{\supset\neg}$-формулы).

(23) $\varphi^{\beta}|\neg\mathbf{C}|^{M_3^{\beta,1}}_{v^{\beta}} = 0$ (из (22), по определению φ^{β}).

(24) $|\neg\mathbf{C}^*|^{M_3^{\alpha,1}}_{v^*} = \varphi^{\beta}|\neg\mathbf{C}|^{M_3^{\beta,1}}_{v^{\beta}}$ (из (23), (15)).

(25) неверно, что (18) (из (24), (3)).

(26) $|\mathbf{C}^*|^{M_3^{\alpha,1}}_{v^*} = ½$ (из (25), (17)).

(27) $\varphi^{\beta}|\mathbf{C}|^{M_3^{\beta,1}}_{v^{\beta}} = ½$ (из (26), по индуктивному допущению).

(28) $|\mathbf{C}|^{M_3^{\beta,1}}_{v^{\beta}} = 0$ (из (27), по определению φ^{β}).

(29) $\neg^{\beta,1}|\mathbf{C}|^{M_3^{\beta,1}}_{v^{\beta}} = ½$ (из (28), по определению $\neg^{\beta,1}$).

(30) $|\neg\mathbf{C}|^{M_3^{\beta,1}}_{v^{\beta}} = ½$ (из (29), по определению значения $L_{\supset\neg}$-формулы).

(31) $\varphi^{\beta}|\neg\mathbf{C}|^{M_3^{\beta,1}}_{v^{\beta}} = 0$ (из (30), по определению φ^{β}).

(32) $|\neg\mathbf{C}^*|^{M_3^{\alpha,1}}_{v^*} = \varphi^{\beta}|\neg\mathbf{C}|^{M_3^{\beta,1}}_{v^{\beta}}$ (из (23), (15)).

(33) неверно, что (1) (из (32), (3)).

Случай 2. Пусть $L_{\supset\neg}$-формула **A** содержит в точности n вхождений связок и графически совпадает с формулой $\mathbf{D} \supset \mathbf{E}$. Докажем, что У1 выполняется для **A**.

(1) неверно, что $\forall v\forall(\mathbf{D} \supset \mathbf{E})$: если v – оценка в $M_3^{\alpha,1}$ и $(\mathbf{D} \supset \mathbf{E})$ – $L_{\supset\neg}$-формула, то $|\mathbf{D} \supset \mathbf{E}|_{v}^{M_3^{\alpha,1}} = \varphi^\beta|\mathbf{D} \supset \mathbf{E}|_{v^\beta}^{M_3^{\beta,1}}$ (допущение).

(2) $\exists v\exists(\mathbf{D} \supset \mathbf{E})$: v – оценка в $M_3^{\alpha,1}$ и $(\mathbf{D} \supset \mathbf{E})$ – $L_{\supset\neg}$-формула и $|\mathbf{D} \supset \mathbf{E}|_{v}^{M_3^{\alpha,1}} = \varphi^\beta|\mathbf{D} \supset \mathbf{E}|_{v^\beta}^{M_3^{\beta,1}}$ (из (1)).

(3) пусть $|\mathbf{D}^* \supset \mathbf{E}^*|_{v^*}^{M_3^{\alpha,1}} \neq \varphi^\beta|\mathbf{D}^* \supset \mathbf{E}^*|_{v^\beta}^{M_3^{\beta,1}}$ (из (2), исключение кванторов).

(4) $|\mathbf{D}^* \supset \mathbf{E}^*|_{v^*}^{M_3^{\alpha,1}} = 0$ (допущение).

(5) $|\mathbf{D}^*|_{v^*}^{M_3^{\alpha,1}} \supset_2 |\mathbf{E}^*|_{v^*}^{M_3^{\alpha,1}} = 0$ (из (4), по определению значения $L_{\supset\neg}$-формулы).

(6) $|\mathbf{D}^*|_{v^*}^{M_3^{\alpha,1}} \in \{1, ½\}$ и $|\mathbf{E}^*|_{v^*}^{M_3^{\alpha,1}} = 0$ (из (5), по определению $\supset_2$).

(7) $|\mathbf{D}^*|_{v^*}^{M_3^{\alpha,1}} \in \{1, ½\}$ (из (6)).

(8) $|\mathbf{D}^*|_{v^*}^{M_3^{\alpha,1}} = \varphi^\beta|\mathbf{D}^*|_{v^\beta}^{M_3^{\beta,1}}$ (по индуктивному допущению).

(9) $\varphi^\beta|\mathbf{D}^*|_{v^\beta}^{M_3^{\beta,1}} \in \{1, ½\}$ (из (8), (7)).

(10) $|\mathbf{D}^*|_{v^\beta}^{M_3^{\beta,1}} \in \{1, 0\}$ (из (9), по определению φ^β).

(11) $|\mathbf{E}^*|_{v^*}^{M_3^{\alpha,1}} = 0$ (из (6)).

(12) $|\mathbf{E}^*|_{v^*}^{M_3^{\alpha,1}} = \varphi^\beta|\mathbf{E}^*|_{v^\beta}^{M_3^{\beta,1}}$ (по индуктивному допущению).

(13) $\varphi^\beta|\mathbf{E}^*|_{v^\beta}^{M_3^{\beta,1}} = 0$ (из (11), (12)).

(14) $|\mathbf{E}^*|_{v^\beta}^{M_3^{\beta,1}} = ½$ (из (13), по определению φ^β).

(15) $|\mathbf{D}^*|_{v^\beta}^{M_3^{\beta,1}} \supset^{\beta,1} |\mathbf{E}^*|_{v^\beta}^{M_3^{\beta,1}} = ½$ (из (14), (10), по определению $\supset^{\beta,1}$).

(16) $|\mathbf{D}^* \supset \mathbf{E}^*|_{v^\beta}^{M_3^{\beta,1}} = ½$ (из (15), по определению значения $L_{\supset\neg}$-формулы).

(17) $\varphi^\beta|\mathbf{D}^* \supset \mathbf{E}^*|_{v^\beta}^{M_3^{\beta,1}} = 0$ (из (17), по определению φ^β).

(18) $|\mathbf{D}^* \supset \mathbf{E}^*|_{v^*}^{M_3^{\alpha,1}} = \varphi^\beta|\mathbf{D}^* \supset \mathbf{E}^*|_{v^\beta}^{M_3^{\beta,1}}$ (из (17), (4)).

(19) неверно, что (4) (из (18), (3)).

(20) $|\mathbf{D}^* \supset \mathbf{E}^*|^{M_3^{\alpha,1}}_{v^*} = 1$ (допущение).

(21) $|\mathbf{D}^*|^{M_3^{\alpha,1}}_{v^*} \supset_2 |\mathbf{E}^*|^{M_3^{\alpha,1}}_{v^*} = 1$ (из (20), по определению значения $L_{\supset\neg}$-формулы).

(22) $|\mathbf{D}^*|^{M_3^{\alpha,1}}_{v^*} = 0$ или $|\mathbf{E}^*|^{M_3^{\alpha,1}}_{v^*} \in \{1, ½\}$ (из (21), по определению $\supset_2$).

(23) $|\mathbf{D}^*|^{M_3^{\alpha,1}}_{v^*} = 0$ (допущение).

(24) $|\mathbf{D}^*|^{M_3^{\alpha,1}}_{v^*} = \varphi^\beta|\mathbf{D}^*|^{M_3^{\beta,1}}_{v^\beta}$ (по индуктивному допущению).

(25) $\varphi^\beta|\mathbf{D}^*|^{M_3^{\beta,1}}_{v^\beta} = 0$ (из (24), (23)).

(26) $|\mathbf{D}^*|^{M_3^{\beta,1}}_{v^\beta} = ½$ (из (25), по определению φ^β).

(27) $|\mathbf{D}^*|^{M_3^{\beta,1}}_{v^\beta} \supset^{\beta,1} |\mathbf{E}^*|^{M_3^{\beta,1}}_{v^\beta} = 1$ (из (26), по определению $\supset^{\beta,1}$).

(28) $|\mathbf{D}^* \supset \mathbf{E}^*|^{M_3^{\beta,1}}_{v^\beta} = 1$ (из (27), по определению значения $L_{\supset\neg}$-формулы).

(29) $\varphi^\beta|\mathbf{D}^* \supset \mathbf{E}^*|^{M_3^{\beta,1}}_{v^\beta} = 1$ (из (28), по определению φ^β).

(30) $|\mathbf{D}^* \supset \mathbf{E}^*|^{M_3^{\alpha,1}}_{v^*} = \varphi^\beta|\mathbf{D}^* \supset \mathbf{E}^*|^{M_3^{\beta,1}}_{v^\beta}$ (из (29), (20)).

(31) неверно, что (23) (из (30), (3)).

(32) $|\mathbf{E}^*|^{M_3^{\alpha,1}}_{v^*} \in \{1, ½\}$ (из (31), (22)).

(33) $|\mathbf{E}^*|^{M_3^{\alpha,1}}_{v^*} = \varphi^\beta|\mathbf{E}^*|^{M_3^{\beta,1}}_{v^\beta}$ (по индуктивному допущению).

(34) $\varphi^\beta|\mathbf{E}^*|^{M_3^{\beta,1}}_{v^\beta} \in \{1, ½\}$ (из (33), (32)).

(35) $|\mathbf{E}^*|^{M_3^{\beta,1}}_{v^\beta} \in \{1, 0\}$ (из (34), по определению φ^β).

(36) $|\mathbf{D}^*|^{M_3^{\beta,1}}_{v^\beta} \supset^{\beta,1} |\mathbf{E}^*|^{M_3^{\beta,1}}_{v^\beta} = 1$ (из (35), по определению $\supset^{\beta,1}$).

(37) $|\mathbf{D}^* \supset \mathbf{E}^*|^{M_3^{\beta,1}}_{v^\beta} = 1$ (из (36), по определению значения $L_{\supset\neg}$-формулы).

(38) $\varphi^\beta|\mathbf{D}^* \supset \mathbf{E}^*|^{M_3^{\beta,1}}_{v^\beta} = 1$ (из (37), по определению φ^β).

(39) $|\mathbf{D}^* \supset \mathbf{E}^*|^{M_3^{\alpha,1}}_{v^*} = \varphi^\beta|\mathbf{D}^* \supset \mathbf{E}^*|^{M_3^{\beta,1}}_{v^\beta}$ (из (38), (20)).

(40) неверно, что (20) (из (39), (3)).

(41) $|\mathbf{D}^* \supset \mathbf{E}^*|^{M_3^{\alpha,1}}_{v^*} \notin \{1, 0\}$ (из (40), (19)).

(42) $|\mathbf{D}^* \supset \mathbf{E}^*|^{M_3^{\alpha,1}}_{v^*} \in \{1, 0\}$ (из (39)).

(43) неверно, что (1) (из (42), (41)).

Лемма 4 доказана.

Переходим к доказательству Теоремы 5. Докажем, что если $\exists v \exists \mathbf{A}$: v – оценка в M_2, и $\mathbf{A}$ – $L_{\supset\neg}$-формула, и $|\mathbf{A}|^{M_2}_{v} = 0$, то $\exists v'$: v' – оценка в $M_3^{\beta,1}$ и $|\mathbf{A}|^{M_3^{\beta,1}}_{v'} = ½$

(1) неверно, что если $\exists v \exists \mathbf{A}$: v – оценка в M_2, и $\mathbf{A}$ – $L_{\supset\neg}$-формула, и $|\mathbf{A}|^{M_2}_{v} = 0$, то $\exists v'$: v' – оценка в $M_3^{\beta,1}$ и $|\mathbf{A}|^{M_3^{\beta,1}}_{v'} = ½$ (допущение).

(2) $\exists v \exists \mathbf{A}$: v – оценка в M_2, $\mathbf{A}$ – $L_{\supset\neg}$-формула и $|\mathbf{A}|^{M_2}_{v} = 0$ и $\forall v'$: если v' – оценка в $M_3^{\beta,1}$, то $|\mathbf{A}|^{M_3^{\beta,1}}_{v'} \neq ½$ (из (1)).

(3) $\exists v \exists \mathbf{A}$: v – оценка в M_2, $\mathbf{A}$ – $L_{\supset\neg}$-формула и $|\mathbf{A}|^{M_2}_{v} = 0$ (из (2)).

(4) пусть v^* – оценка в M_2, $\mathbf{A}^*$ – $L_{\supset\neg}$-формула и $|\mathbf{A}^*|^{M_2}_{v^*} = 0$ (из (3), исключение кванторов).

(5) $|\mathbf{A}^*|^{M_3^{\alpha,1}}_{v^*} = 0$ (из (4), по Лемме 3).

(6) $|\mathbf{A}^*|^{M_3^{\alpha,1}}_{v^*} = \varphi^{\beta}|\mathbf{A}^*|^{M_3^{\beta,1}}_{v^{*\beta}}$ (по Лемме 4).

(7) $\varphi^{\beta}|\mathbf{A}^*|^{M_3^{\beta,1}}_{v^{*\beta}} = 0$ (из (6), (5)).

(8) $|\mathbf{A}^*|^{M_3^{\beta,1}}_{v^{*\beta}} = ½$ (из (7), по определению φ^{β}).

(9) $v^{*\beta}$ – оценка в $M_3^{\beta,1}$ (по Лемме 4).

(10) $\forall v'$: если v' – оценка в $M_3^{\beta,1}$, то $|\mathbf{A}|^{M_3^{\beta,1}}_{v'} \neq ½$ (из (2)).

(11) если $v^{*\beta}$ – оценка в $M_3^{\beta,1}$, то $|\mathbf{A}|^{M_3^{\beta,1}}_{v^{*\beta}} \neq ½$ (из (10), исключение квантора).

(12) $|\mathbf{A}|^{M_3^{\beta,1}}_{v^{*\beta}} \neq ½$ (из (11), (9)).

(13) неверно, что (1) (из (12), (8)).

Теперь докажем, что если $\exists v' \exists \mathbf{A}$: v' – оценка в $M_3^{\beta,1}$, и $\mathbf{A}$ – $L_{\supset\neg}$-формула, и $|\mathbf{A}|^{M_3^{\beta,1}}_{v'} = ½$, то $\exists v$: v – оценка в M_2 и $|\mathbf{A}|^{M_2}_{v} = 0$.

(1) неверно, что если $\exists v'\exists \mathbf{A}$: v' – оценка в $M_3^{\beta,1}$, и $\mathbf{A}$ – $L_{\supset\neg}$-формула, и $|\mathbf{A}|_{v'}^{M_3^{\beta,1}} = ½$, то $\exists v$: v – оценка в M_2 и $|\mathbf{A}|_{v}^{M_2} = 0$ (допущение).

(2) $\exists v'\exists \mathbf{A}$: v' – оценка в $M_3^{\beta,1}$, и $\mathbf{A}$ – $L_{\supset\neg}$-формула, и $|\mathbf{A}|_{v'}^{M_3^{\beta,1}} = ½$ и $\forall v$: v – оценка в M_2 и $|\mathbf{A}|_{v}^{M_2} \neq 0$ (из (1)).

(3) $\exists v'\exists \mathbf{A}$: v' – оценка в $M_3^{\beta,1}$, и $\mathbf{A}$ – $L_{\supset\neg}$-формула, и $|\mathbf{A}|_{v'}^{M_3^{\beta,1}} = ½$ (из (2)).

(4) пусть v^* – оценка в $M_3^{\beta,1}$, $\mathbf{A}^*$ – $L_{\supset\neg}$-формула и $|\mathbf{A}^*|_{v^*}^{M_3^{\beta,1}} = ½$ (из (3), исключение кванторов).

(5) $\varphi^\beta|\mathbf{A}^*|_{v^*}^{M_3^{\beta,1}} = 0$ (из (4), в силу определения φ^β).

(6) $\exists v''$: v'' – оценка в $M_3^{\alpha,1}$ и v^* есть β-замещение v» (в силу единственности β-замещения для произвольной оценки в $M_3^{\alpha,1}$).

(7) пусть v^{**} – оценка в $M_3^{\alpha,1}$ и v^* есть β-замещение v^{**} (из (6), исключение квантора).

(8) $|\mathbf{A}^*|_{v^{**}}^{M_3^{\alpha,1}} = \varphi^\beta|\mathbf{A}^*|_{v^{*\beta}}^{M_3^{\beta,1}}$ (по Лемме 4).

(9) $|\mathbf{A}^*|_{v^{**}}^{M_3^{\alpha,1}} = 0$ (из (8), (5).

(10) $\exists v$: v – оценка в M_2 и $|\mathbf{A}|_{v}^{M_2} = 0$ (по Теореме 4).

(11) неверно, что $\forall v$: v – оценка в M_2 и $|\mathbf{A}|_{v}^{M_2} \neq 0$ (из (10)).

(12) $\forall v$: v – оценка в M_2 и $|\mathbf{A}|_{v}^{M_2} \neq 0$ из (2).

(13) неверно, что (1) (из (12), (11)).

Теорема доказана.

3.2. Матрицы с двумя выделенными значениями

Для работы с двумя выделенными значениями мы модифицировали программу. На этот раз все возможные логические матрицы M^* $<\{0, ½, 1\}, \neg^*, \supset^*, \{1\}>$ проверялись на соответствие следующим двум условиям:

1. Тавтологии классической логики $\mathbf{p \supset (q \supset p)}$, $\mathbf{(p \supset (q \supset r)) \supset ((p \supset q) \supset (p \supset r))}$, $\mathbf{(\neg p \supset \neg q) \supset (q \supset p)}$, $\mathbf{\neg\neg(p \supset p)}$, $\mathbf{\neg(p \supset p) \supset p}$, $\mathbf{\neg\neg p \supset p}$, $\mathbf{p \supset \neg\neg p}$, $\mathbf{p \supset p}$, $\mathbf{\neg\neg(p \supset q) \supset (\neg\neg p \supset \neg\neg q)}$, $\mathbf{(p \supset (q \supset r)) \supset ((r \supset p) \supset (s \supset p))}$, $\mathbf{(((\neg p \supset p) \supset p)) \supset \neg((\neg p \supset p) \supset p)) \supset \neg(p \supset \neg p)}$, $\mathbf{\neg\neg(p \supset (q \supset p))}$, $\mathbf{\neg\neg(p \supset \neg\neg p)}$, $\mathbf{\neg((p \supset p) \supset \neg(q \supset q))}$ должны быть общезначимы в *M**.

2. Формулы $\mathbf{(p \supset q) \supset (q \supset p)}$, $\mathbf{(p \supset p) \supset \neg(p \supset p)}$, $\mathbf{\neg\neg(p \supset p)}$, $\mathbf{\neg p \supset q}$, $\mathbf{\neg(\neg(p \supset p) \supset \neg(p \supset p))}$, $\mathbf{\neg((p \supset p) \supset (p \supset p))}$ не являющиеся классическими тавтологиями, не должны быть общезначимы в *M**.

В результате были отброшены все матрицы, кроме следующих:

$\supset^{\chi}$	1	½	0
1	1	0	0
½	1	1	1
0	1	1	1

	$\neg^{\chi}$
1	0
½	1
0	1

$\supset^{\lambda}$	1	½	0
1	½	½	½
½	0	½	0
0	½	½	½

	$\neg^{\lambda}$
1	½
½	0
0	½

$\supset^{\delta}$	1	½	0
1	1	½	0
½	1	1	1
0	1	1	1

	$\neg^{\delta}$
1	0
½	1
0	1

$\supset^{\mu}$	1	½	0
1	½	½	½
½	1	½	0
0	½	½	½

	$\neg^{\mu}$
1	½
½	0
0	½

$\supset^{\varepsilon}$	1	½	0
1	1	½	0
½	1	½	½
0	1	1	1

	$\neg^{\varepsilon}$
1	0
½	½
0	1

$\supset^{\nu}$	1	½	0
1	1	½	1
½	1	½	0
0	½	½	½

	$\neg^{\nu}$
1	½
½	0
0	½

$\supset^{\phi}$	1	½	0
1	1	½	0
½	½	½	½
0	1	1	1

	$\neg^{\phi}$
1	0
½	½
0	1

$\supset^{\pi}$	1	½	0
1	1	1	1
½	1	½	0
0	½	½	½

	$\neg^{\pi}$
1	½
½	0
0	½

$\supset^{\gamma}$	1	½	0
1	1	½	0
½	1	½	½
0	1	½	1

	$\neg^{\gamma}$
1	0
½	½
0	1

$\supset^{\theta}$	1	½	0
1	1	½	1
½	1	½	0
0	1	½	½

	$\neg^{\theta}$
1	½
½	0
0	½

$\supset^{\eta}$	1	½	0
1	1	½	0
½	½	½	½
0	1	½	1

	$\neg^{\eta}$
1	0
½	½
0	1

$\supset^{\rho}$	1	½	0
1	1	1	1
½	1	½	0
0	1	½	½

	$\neg^{\rho}$
1	½
½	0
0	½

Обозначим соответствующие матрицы $M_3^{\chi,2}$, $M_3^{\delta,2}$, $M_3^{\varepsilon,2}$, $M_3^{\phi,2}$, $M_3^{\gamma,2}$, $M_3^{\eta,2}$, $M_3^{\lambda,2}$, $M_3^{\mu,2}$, $M_3^{\nu,2}$, $M_3^{\pi,2}$, $M_3^{\theta,2}$ и $M_3^{\rho,2}$. Ниже будет доказан ряд теорем, которые показывают, что каждая из этих матриц равна классической двухэлементной матрице по классу формул, общезначимых в ней.

Теорема 6.

Пусть $M_3^{\varsigma,2} \in \{M_3^{\chi,2}, M_3^{\delta,2}\}$. Тогда $\exists v \exists \mathbf{A}$: v – оценка в M_2, и $\mathbf{A} - L_{\supset\neg}$-формула, и $|\mathbf{A}|_v^{M_2} = 0$, е.т.е. $\exists v'$: v' – оценка в $M_3^{\varsigma,2}$ и $|\mathbf{A}|_{v'}^{M_3^{\varsigma,1}\,2} = 0$.

Чтобы доказать Теорему 6, достаточно доказать следующие утверждения:

У1. $\forall v \forall \mathbf{A}$: если v – оценка в $M_3^{\varsigma,2}$ и $\mathbf{A} - L_{\supset\neg}$-формула, то если $\varphi_0|\mathbf{A}|_v^{M_3^{\varsigma,2}} = 0$, то $|\mathbf{A}|_v^{M_2} = 0$.

У2. $\forall v \forall \mathbf{A}$: если v – оценка в M_2 и $\mathbf{A} - L_{\supset\neg}$-формула, то если $|\mathbf{A}|_v^{M_2} = 0$, то $|\mathbf{A}|_v^{M_3^{\varsigma,2}} = 0$.

Пусть У1 верно для формул, которые содержат менее, чем n вхождений связок. Тогда достаточно доказать, что У1 верно, если $L_{\supset\neg}$-формула $\mathbf{A}$ содержит в точности n вхождений связок и графически совпадает с формулой $\neg\mathbf{C}$ либо с формулой $\mathbf{D} \supset \mathbf{E}$.

Случай 1. Пусть $L_{\supset\neg}$-формула **A** содержит в точности n вхождений связок и графически совпадает с формулой $\neg$**C**.

(1) неверно, что У1 (допущение).

(2) $\exists v \exists(\neg\mathbf{C})$: v – оценка в $M_3^{\varsigma,2}$ и $\neg$**C** – $\mathrm{L}_{\supset\neg}$-формула такие, что $\varphi_0|\neg\mathbf{C}|_v^{M_3^{\varsigma,2}} = 0$ и $|\neg\mathbf{C}|_{\bar{v}}^{M_2} \neq 0$ (из (1)).

(3) пусть $\varphi_0|\neg\mathbf{C}^*|_{v^*}^{M_3^{\varsigma,2}} = 0$ и $|\neg\mathbf{C}^*|_{\overline{v^*}}^{M_2} \neq 0$ (из (2), исключение кванторов).

(4) $\varphi_0|\neg\mathbf{C}^*|_{v^*}^{M_3^{\varsigma,2}} = 0$ (из (3)).

(5) $|\neg\mathbf{C}^*|_{v^*}^{M_3^{\varsigma,2}} \in \{½, 0\}$ (из (4), в силу определения φ_0).

(6) $|\mathbf{C}^*|_{v^*}^{M_3^{\varsigma,2}} = 1$ (из (5), в силу определений $\neg^{\zeta}$ и значения $L_{\supset\neg}$-формулы).

(7) **C*** есть пропозициональная переменная α, или $\neg$**D**, или **E** $\supset$ **F**, где **D**, **E**, **F** – $L_{\supset\neg}$-формулы (в силу того, что **C*** есть $L_{\supset\neg}$-формула).

(8) **C*** есть пропозициональная переменная α (допущение).

(9) $v^*(\alpha) = 1$ (из (8), (6)).

(10) $\overline{v^*}(\alpha) = 1$ (из (9), по определению $\bar{v}$).

(11) $|\mathbf{C}^*|_{\overline{v^*}}^{M_2} = 1$ (из (10), (8)).

(12) $|\neg\mathbf{C}^*|_{\overline{v^*}}^{M_2} = 0$ (из (11), в силу определений $\neg_2$ и значения $L_{\supset\neg}$-формулы).

(13) $|\neg\mathbf{C}^*|_{\overline{v^*}}^{M_2} \neq 0$ (из (3)).

(14) неверно, что (6) (из (13), (3)).

(15) **C*** есть $\neg$**D** или **E** $\supset$ **F**, где **D**, **E**, **F** – $L_{\supset\neg}$-формулы (из (14), (7)).

(16) **C*** есть $L_{\supset\neg}$-формула $\neg$**D** (допущение).

(17) $|\neg\mathbf{D}|_{v^*}^{M_3^{\varsigma,2}} = 1$ (из (16), (6)).

(18) $|\mathbf{D}|_{v^*}^{M_3^{\varsigma,2}} \in \{½, 0\}$ (из (6), в силу определений $\neg^{\zeta}$ и значения $L_{\supset\neg}$-формулы).

(19) $\varphi_0|\mathbf{D}|^{M_3^{\varsigma,2}}_{v*} = 0$ (из (18), в силу определения φ_0).

(20) $|\mathbf{D}|^{M_2}_{v*} = 0$ (из (19), по индуктивному допущению).

(21) $|\neg\mathbf{D}|^{M_2}_{v*} = 1$ (из (20), в силу определений $\neg_2$ и значения $L_{\supset\neg}$-формулы).

(22) $|\mathbf{C*}|^{M_2}_{v*} = 1$ (из (21), (17)).

(23) $|\neg\mathbf{C*}|^{M_2}_{v*} = 0$ (из (22), в силу определений $\neg_2$ и значения $L_{\supset\neg}$-формулы).

(24) неверно, что (15) (из (23), (13)).

(25) **C*** есть $L_{\supset\neg}$-формула $\mathbf{E} \supset \mathbf{F}$ (из (24),(15)).

(26) $|\mathbf{E} \supset \mathbf{F}|^{M_3^{\varsigma,2}}_{v*} = 1$ (из (25), (6)).

(27) $|\mathbf{E}|^{M_3^{\varsigma,2}}_{v*} \in \{½, 0\}$ или $|\mathbf{F}|^{M_3^{\varsigma,2}}_{v*} = 1$ (из (26), в силу определений $\supset^{\varsigma}$ и значения $L_{\supset\neg}$-формулы).

(28) $|\mathbf{E}|^{M_3^{\varsigma,2}}_{v*} \in \{½, 0\}$ (допущение).

(29) $\varphi_0|\mathbf{E}|^{M_3^{\varsigma,2}}_{v*} = 0$ (из (28), в силу определения φ_0).

(30) $|\mathbf{E}|^{M_2}_{v*} = 0$ (из (29), по индуктивному допущению).

(31) $|\mathbf{E} \supset \mathbf{F}|^{M_2}_{v*} = 1$ (из (29), в силу определений $\supset_2$ и значения $L_{\supset\neg}$-формулы).

(32) $|\mathbf{C*}|^{M_2}_{v*} = 1$ (из (32), (25)).

(33) $|\neg\mathbf{C*}|^{M_2}_{v*} = 0$ (из (32), в силу определений $\neg_2$ и значения $L_{\supset\neg}$-формулы).

(34) неверно, что (28) (из (33), (13)).

(35) $|\mathbf{F}|^{M_3^{\varsigma,2}}_{v*} = 1$ (из (34), (27)).

(36) $|\neg\mathbf{F}|^{M_3^{\varsigma,2}}_{v*} = 0$ (из (35), в силу определений $\supset^{\varsigma}$ и значения $L_{\supset\neg}$-формулы).

(37) $\varphi_0|\neg\mathbf{F}|^{M_3^{\varsigma,2}}_{v*} = 0$ (их (36), в силу определения φ_0).

(38) формула $\neg\mathbf{F}$ содержит (n – 1) связок, следовательно, к ней применимо индуктивное допущение.

(39) $|\neg\mathbf{F}|^{M_2}_{v^*} = 0$ (из (37), по индуктивному допущению).

(40) $|\mathbf{F}|^{M_2}_{v^*} = 1$ (из (39), в силу определений $\neg_2$ и значения $L_{\supset\neg}$-формулы).

(41) $|\mathbf{E} \supset \mathbf{F}|^{M_2}_{v^*} = 1$ (из (40), в силу определений $\supset_2$ и значения $L_{\supset\neg}$-формулы).

(42) $|\mathbf{C^*}|^{M_2}_{v^*} = 1$ (из (41), (25)).

(43) $|\neg\mathbf{C^*}|^{M_2}_{v^*} = 0$ (из (42), в силу определений $\neg_2$ и значения $L_{\supset\neg}$-формулы).

(44) неверно, что (23) (из (43), (13)).

(45) неверно, что (6) (из (44), (24), (8)).

(46) неверно, что (1) (из (7), (45)).

Случай 2. Пусть $L_{\supset\neg}$-формула **A** содержит в точности n вхождений связок и графически совпадает с формулой $\mathbf{D} \supset \mathbf{E}$. Докажем, что У1 выполняется для **A**.

(1) неверно, что У1 (допущение).

(2) $\exists v \exists(\mathbf{D} \supset \mathbf{E})$: v – оценка в $M_3^{\varsigma,2}$ и $\mathbf{D} \supset \mathbf{E}$ – $\mathrm{L}_{\supset\neg}$-формула такие, что $\varphi_0|\neg\mathbf{D} \supset \mathbf{E}\,|^{M_3^{\varsigma,2}}_{v} = 0$ и $|\mathbf{D} \supset \mathbf{E}\,|^{M_2}_{v} \neq 0$ (из (1)).

(3) пусть $\varphi_0|\mathbf{D^*} \supset \mathbf{E^*}|^{M_3^{\varsigma,2}}_{v^*} = 0$ и $|\mathbf{D^*} \supset \mathbf{E^*}|^{M_2}_{v^*} \neq 0$ (из (2), исключение кванторов).

(4) $\varphi_0|\mathbf{D^*} \supset \mathbf{E^*}|^{M_3^{\varsigma,2}}_{v^*} = 0$ (из (3)).

(5) $|\mathbf{D^*} \supset \mathbf{E^*}|^{M_3^{\varsigma,2}}_{v^*} \in \{½, 0\}$ (из (4), в силу определения φ_0).

(6) $|\mathbf{D^*} \supset \mathbf{E^*}|^{M_2}_{v^*} \neq 0$ (из (3)).

(7) $|\mathbf{D^*}|^{M_3^{\varsigma,2}}_{v^*} \supset^{\varsigma} |\mathbf{E^*}|^{M_3^{\varsigma,2}}_{v^*} \in \{½, 0\}$ (из (5), в силу определения значения $L_{\supset\neg}$-формулы).

(8) $|\mathbf{D}^*|^{M_3^{\varsigma,2}}_{v^*} = 1$ и $|\mathbf{E}^*|^{M_3^{\varsigma,2}}_{v^*} \in \{½, 0\}$ (из (7) , в силу определения $\supset^{\varsigma}$).

(9) $|\mathbf{D}^*|^{M_2}_{\overline{v^*}} \supset_2 |\mathbf{E}^*|^{M_2}_{\overline{v^*}} \neq 0$ (из (6), в силу определения значения $L_{\supset\neg}$-формулы).

(10) $|\mathbf{D}^*|^{M_2}_{\overline{v^*}} = 0$ или $|\mathbf{E}^*|^{M_2}_{\overline{v^*}} = 1$ (из (9), в силу определения $\supset_2$).

(11) $|\mathbf{E}^*|^{M_3^{\varsigma,2}}_{v^*} \in \{½, 0\}$ (из (7)).

(12) $\varphi_0|\mathbf{E}^*|^{M_3^{\varsigma,2}}_{v^*} = 0$ (из (1), в силу определения φ_0).

(13) $|\mathbf{E}^*|^{M_2}_{\overline{v^*}} = 0$ (из (11), в силу индуктивного допущения).

(14) $|\mathbf{D}^*|^{M_2}_{\overline{v^*}} = 0$ (из (13), (10)).

(15) $|\mathbf{D}^*|^{M_3^{\varsigma,2}}_{v^*} = 1$ (из (8)).

(16) **D*** есть пропозициональная переменная α, или ¬**F**, или **G** ⊃ **H**, где **F**, **G**, **H** – $L_{\supset\neg}$-формулы (в силу того, что **D*** есть $L_{\supset\neg}$-формула).

(17) **D*** есть пропозициональная переменная α (допущение).

(18) $v^*(\alpha) = 1$ (из (17), (15)).

(19) $\overline{v^*}(\alpha) = 1$ (из (18), по определению $\overline{v}$).

(20) $|\mathbf{D}^*|^{M_2}_{\overline{v^*}} = 1$ (из (19) и (17)).

(21) неверно, что (15) (из (20), (14)).

(22) **D*** есть ¬**F**, или **G** ⊃ **H**, где **F**, **G**, **H** – $L_{\supset\neg}$-формулы (из (21), (16)).

(23) **D*** есть формула ¬**F** (допущение).

(24) $|\neg\mathbf{F}|^{M_3^{\varsigma,2}}_{v^*} = 1$ (из (23), (15)).

(25) $\neg^{\varsigma}|\mathbf{F}|^{M_3^{\varsigma,2}}_{v^*} = 1$ (из (24), в силу определения значения $L_{\supset\neg}$-формулы).

(26) $|\mathbf{F}|^{M_3^{\varsigma,2}}_{v^*} \in \{½, 0\}$ (из (25), в силу определения $\neg^{\varsigma}$).

(27) $\varphi_0|\mathbf{F}|_{v^*}^{M_3^{\varsigma,2}} = 0$ (из (26), в силу определения φ_0).

(28) $|\mathbf{F}|_{v^*}^{M_2} = 0$ (из (25), по индуктивному допущению).

(29) $|\neg\mathbf{F}|_{v^*}^{M_2} = 1$ (из (28), в силу определений $\neg_2$ и значения $L_{\supset\neg}$-формулы).

(30) $|\mathbf{D}^*|_{v^*}^{M_2} = 1$ (из (29), (23)).

(31) неверно, что (21) (из (30), (14)).

(32) $\mathbf{D}^*$ есть формула $\mathbf{G} \supset \mathbf{H}$ (из (31), (22)).

(33) $|\mathbf{G} \supset \mathbf{H}|_{v^*}^{M_3^{\varsigma,2}} = 1$ (из (32), (15)).

(34) $|\mathbf{G}|_{v^*}^{M_3^{\varsigma,2}} \supset^{\varsigma} |\mathbf{H}|_{v^*}^{M_3^{\varsigma,2}} = 1$ (из (33), в силу определения значения $L_{\supset\neg}$-формулы).

(35) $|\mathbf{G}|_{v^*}^{M_3^{\varsigma,2}} \in \{½, 0\}$ или $|\mathbf{H}|_{v^*}^{M_3^{\varsigma,2}} = 1$ (из (34), в силу определения $\supset^{\varsigma}$).

(36) $|\mathbf{G}|_{v^*}^{M_3^{\varsigma,2}} \in \{½, 0\}$ (допущение).

(37) $\varphi_0\,|\mathbf{G}|_{v^*}^{M_3^{\varsigma,2}} = 0$ (из (36), в силу определения φ_0).

(38) $|\mathbf{G}|_{v^*}^{M_2} = 0$ (из (37), в силу индуктивного допущения).

(39) $|\mathbf{G} \supset \mathbf{H}|_{v^*}^{M_2} = 1$ (из (38), в силу определений $\supset_2$ и значения $L_{\supset\neg}$-формулы).

(40) $|\mathbf{D}^*|_{v^*}^{M_2} = 1$ (из (39), (32)).

(41) неверно, что (33) (из (40), (14)).

(42) $|\mathbf{H}|_{v^*}^{M_3^{\varsigma,2}} = 1$ (из (41), (36)).

(43) $|\neg\mathbf{H}|_{v^*}^{M_3^{\varsigma,2}} = 0$ (из (42), в силу определений $\neg^{\varsigma}$ и значения $L_{\supset\neg}$-формулы).

(44) $\varphi_0|\neg\mathbf{H}|_{v^*}^{M_3^{\varsigma,2}} = 0$ (из (43), в силу определения φ_0).

(45) формула $\neg\mathbf{H}$ содержит не более $(n - 1)$ связок, следовательно, к ней применимо индуктивное допущение.

(46) $|\neg\mathbf{H}|_{v^*}^{M_2} = 0$ (из (45), (44)).

(47) $|\mathbf{H}|^{M_2}_{v^*} = 1$ (из (45), в силу определений $\neg_2$ и значения $L_{\supset\neg}$-формулы).

(48) $|\mathbf{G} \supset \mathbf{H}|^{M_2}_{v^*} = 1$ (из (47), в силу определений $\supset_2$ и значения $L_{\supset\neg}$-формулы).

(49) $|\mathbf{D}^*|^{M_2}_{v^*} = 1$ (из (48), (32)).

(50) неверно, что (29) (из (49), (14)).

(51) неверно, что (17) (из (51), (31), (21)).

(52) неверно, что (1) (из (51), (16)).

Утверждение У1 доказано.

Докажем У2. Для этого необходимо и достаточно доказать следующую лемму.

Лемма 5.
$\forall v$: Если v – оценка в M_2, то v – оценка в $M_3^{\varsigma,2}$ и $\forall\mathbf{A}$: $|\mathbf{A}|^{M_3^{\varsigma,2}}_{v} = |\mathbf{A}|^{M_2}_{v}$.
Доказательство данной леммы строится индукцией по длине формулы, аналогично доказательству Леммы 3.

Таким образом, теорема 6 доказана.

Теорема 7.
Пусть $M_3^{\omega,2} \in \{M_3^{\varepsilon,2}, M_3^{\phi,2}, M_3^{\gamma,2}, M_3^{\eta,2}\}$. Тогда $\exists v \exists \mathbf{A}$: v – оценка в M_2, и $\mathbf{A}$ – $L_{\supset\neg}$-формула, и $|\mathbf{A}|^{M_2}_{v} = 0$, е.т.е. $\exists v'$: v' – оценка в $M_3^{\omega,2}$ и $|\mathbf{A}|^{M_3^{\omega,2}}_{v'} = 0$.

Чтобы доказать Теорему 7, достаточно доказать следующие утверждения:

У1. $\forall v \forall \mathbf{A}$: если v – оценка в $M_3^{\omega,2}$ и $\mathbf{A}$ – $L_{\supset\neg}$-формула, то если $|\mathbf{A}|^{M_3^{\omega,2}}_{v} = 0$, то $|\mathbf{A}|^{M_2}_{v} = 0$.

У2. $\forall v \forall \mathbf{A}$: если v – оценка в M_2 и $\mathbf{A}$ – $L_{\supset\neg}$-формула, то если $|\mathbf{A}|^{M_2}_{v} = 0$, то $|\mathbf{A}|^{M_3^{\omega,2}}_{v} = 0$.

Докажем У1 индукцией по длине $L_{\supset\neg}$-формулы.

Пусть У1 верно для формул, которые содержат менее, чем n вхождений связок. Тогда достаточно доказать, что У1 верно, если $L_{\supset\neg}$-формула **A** содержит в точности n вхождений связок и графически совпадает с формулой $\neg\mathbf{C}$ либо с формулой $\mathbf{D} \supset \mathbf{E}$.

Случай 1. Пусть $L_{\supset\neg}$-формула **A** содержит в точности n вхождений связок и графически совпадает с формулой $\neg\mathbf{C}$.

(1) неверно, что У1 (допущение).

(2) $\exists v \exists(\neg\mathbf{C})$: v – оценка в $M_3^{\omega,2}$ и $\neg\mathbf{C}$ – $L_{\supset\neg}$-формула такие, что $|\neg\mathbf{C}|_v^{M_3^{\omega,2}} = 0$ и $|\neg\mathbf{C}|_{\overline{\overline{v}}}^{M_2} \neq 0$ (из (1)).

(3) пусть $|\neg\mathbf{C}^*|_{v^*}^{M_3^{\omega,2}} = 0$ и $|\neg\mathbf{C}^*|_{\overline{\overline{v^*}}}^{M_2} \neq 0$ (из (2), исключение кванторов).

(4) $|\neg\mathbf{C}^*|_{v^*}^{M_3^{\omega,2}} = 0$ (из (3)).

(5) $|\mathbf{C}^*|_{v^*}^{M_3^{\omega,2}} = 1$ (из (4), в силу определений $\neg^{\omega}$ и значения $L_{\supset\neg}$-формулы).

(6) $\mathbf{C}^*$ есть пропозициональная переменная α, или $\neg\mathbf{D}$, или $\mathbf{E} \supset \mathbf{F}$, где **D**, **E**, **F** – $L_{\supset\neg}$-формулы (В силу того, что $\mathbf{C}^*$ есть $L_{\supset\neg}$-формула).

(7) $\mathbf{C}^*$ есть пропозициональная переменная α (допущение).

(8) $v^*(\alpha) = 1$ (из (7), (5)).

(9) $\overline{\overline{v}}(\alpha) = 1$ (из (8), по определению $\overline{\overline{v}}$).

(10) $|\mathbf{C}^*|_{\overline{\overline{v^*}}}^{M_2} = 1$ (из (9), (7)).

(11) $|\neg\mathbf{C}^*|_{\overline{\overline{v^*}}}^{M_2} = 0$ (из (10), в силу определений $\neg_2$ и значения $L_{\supset\neg}$-формулы).

(12) $|\neg\mathbf{C}^*|_{\overline{\overline{v^*}}}^{M_2} \neq 0$ (из (3)).

(13) неверно, что (6) (из (12), (3)).

(14) $\mathbf{C}^*$ есть $\neg\mathbf{D}$ или $\mathbf{E} \supset \mathbf{F}$, где **D**, **E**, **F** – $L_{\supset\neg}$-формулы (из (13), (6)).

(15) **C*** есть $L_{\supset\neg}$-формула $\neg$**D** (допущение).

(16) $|\neg\mathbf{D}|^{M_3^{\omega,2}}_{v*} = 1$ (из (15), (5)).

(17) $|\mathbf{D}|^{M_3^{\omega,2}}_{v*} = 0$ (из (5), в силу определений $\neg^{\omega}$ и значения $L_{\supset\neg}$-формулы).

(18) $|\mathbf{D}|^{M_2}_{\overline{\overline{v*}}} = 0$ (из (17), по индуктивному допущению).

(19) $|\neg\mathbf{D}|^{M_2}_{\overline{\overline{v*}}} = 1$ (из (18), в силу определений $\neg_2$ и значения $L_{\supset\neg}$-формулы).

(20) $|\mathbf{C*}|^{M_2}_{\overline{\overline{v*}}} = 1$ (из (19), (15)).

(21) $|\neg\mathbf{C*}|^{M_2}_{\overline{\overline{v*}}} = 0$ (из (20), в силу определений $\neg_2$ и значения $L_{\supset\neg}$-формулы).

(22) неверно, что (15) (из (21), (12)).

(23) **C*** есть $L_{\supset\neg}$-формула **E** $\supset$ **F** (из (22), (14)).

(24) $|\mathbf{E} \supset \mathbf{F}|^{M_3^{\omega,2}}_{v*} = 1$ (из (23), (5)).

(25) $|\mathbf{E}|^{M_3^{\omega,2}}_{v*} = 0$ или $|\mathbf{F}|^{M_3^{\omega,2}}_{v*} = 1$ (из (24), в силу определений $\supset^{\omega}$ и значения $L_{\supset\neg}$-формулы).

(26) $|\mathbf{E}|^{M_3^{\omega,2}}_{v*} = 0$ (допущение).

(27) $|\mathbf{E}|^{M_2}_{\overline{\overline{v*}}} = 0$ (из (26), по индуктивному допущению).

(28) $|\mathbf{E} \supset \mathbf{F}|^{M_2}_{\overline{\overline{v*}}} = 1$ (из (27), в силу определений $\supset_2$ и значения $L_{\supset\neg}$-формулы).

(29) $|\mathbf{C*}|^{M_2}_{\overline{\overline{v*}}} = 1$ (из (28), (23)).

(30) $|\neg\mathbf{C*}|^{M_2}_{\overline{\overline{v*}}} = 0$ (из (29), в силу определений $\neg_2$ и значения $L_{\supset\neg}$-формулы).

(31) неверно, что (26) (из (30), (12)).

(32) $|\mathbf{F}|^{M_3^{\omega,2}}_{v*} = 1$ (из (31), (25)).

(33) $|\neg\mathbf{F}|^{M_3^{\omega,2}}_{v*} = 0$ (из (32), в силу определений $\neg^{\omega}$ и значения $L_{\supset\neg}$-формулы).

(34) формула $\neg$**F** содержит (n – 1) связок, следовательно, к ней применимо индуктивное допущение.

(35) $|\neg\mathbf{F}|^{M_2}_{\overline{\overline{v^*}}} = 0$ (из (33), по индуктивному допущению).

(36) $|\mathbf{F}|^{M_2}_{\overline{\overline{v^*}}} = 1$ (из (35), в силу определений $\neg_2$ и значения $L_{\supset\neg}$-формулы).

(37) $|\mathbf{E} \supset \mathbf{F}|^{M_2}_{\overline{\overline{v^*}}} = 1$ (из (36), в силу определений $\supset_2$ и значения $L_{\supset\neg}$-формулы).

(38) $|\mathbf{C^*}|^{M_2}_{\overline{\overline{v^*}}} = 1$ (из (37), (23)).

(39) $|\neg\mathbf{C^*}|^{M_2}_{\overline{\overline{v^*}}} = 0$ (из (38), в силу определений $\neg_2$ и значения $L_{\supset\neg}$-формулы).

(40) неверно, что (23) (из (39), (12)).

(41) неверно, что (6) (из (40), (22), (7)).

(42) неверно, что (1) (из (6), (41)).

Случай 2. Пусть $L_{\supset\neg}$-формула **A** содержит в точности n вхождений связок и графически совпадает с формулой **D** $\supset$ **E**. Докажем, что У1 выполняется для **A**.

(1) неверно, что У1 (допущение).

(2) $\exists v \exists(\mathbf{D} \supset \mathbf{E})$: v – оценка в $M_3^{\omega,2}$ и **D** $\supset$ **E** – $\mathrm{L}_{\supset\neg}$-формула такие, что $|\neg\mathbf{D} \supset \mathbf{E}\,|^{M_3^{\omega,2}}_{v} = 0$ и $|\mathbf{D} \supset \mathbf{E}\,|^{M_2}_{\overline{\overline{v}}} \neq 0$ (из (1)).

(3) пусть $|\mathbf{D^*} \supset \mathbf{E^*}|^{M_3^{\omega,2}}_{v^*} = 0$ и $|\mathbf{D^*} \supset \mathbf{E^*}|^{M_2}_{\overline{\overline{v^*}}} \neq 0$ (из (2), исключение кванторов).

(4) $|\mathbf{D^*} \supset \mathbf{E^*}|^{M_3^{\omega,2}}_{v^*} = 0$ (из (3)).

(5) $|\mathbf{D^*} \supset \mathbf{E^*}|^{M_2}_{\overline{\overline{v^*}}} \neq 0$ (из (3)).

(6) $|\mathbf{D^*}|^{M_3^{\omega,2}}_{v^*} \supset^{\omega} |\mathbf{E^*}|^{M_3^{\omega,2}}_{v^*} = 0$ (из (4), в силу определения значения $L_{\supset\neg}$-формулы).

(7) $|\mathbf{D^*}|^{M_3^{\omega,2}}_{v^*} = 1$ и $|\mathbf{E^*}|^{M_3^{\omega,2}}_{v^*} = 0$ (из (6) , в силу определения $\supset^{\omega}$).

(8) $|\mathbf{D}^*|^{M_2}_{\overline{\overline{v^*}}} \supset_2 |\mathbf{E}^*|^{M_2}_{\overline{\overline{v^*}}} \neq 0$ (из (5), в силу определения значения $L_{\supset\neg}$-формулы).

(9) $|\mathbf{D}^*|^{M_2}_{\overline{\overline{v^*}}} = 0$ или $|\mathbf{E}^*|^{M_2}_{\overline{\overline{v^*}}} = 1$ (из (8), в силу определения $\supset_2$).

(10) $|\mathbf{E}^*|^{M_3^{\omega,2}}_{v^*} = 0$ (из (7)).

(11) $|\mathbf{E}^*|^{M_2}_{\overline{\overline{v^*}}} = 0$ (из (10), в силу индуктивного допущения).

(12) $|\mathbf{D}^*|^{M_2}_{\overline{\overline{v^*}}} = 0$ (из (11), (9)).

(13) $|\mathbf{D}^*|^{M_3^{\omega,2}}_{v^*} = 1$ (из (7)).

(14) $\mathbf{D}^*$ есть пропозициональная переменная α, или $\neg\mathbf{F}$, или $\mathbf{G} \supset \mathbf{H}$, где $\mathbf{F}$, $\mathbf{G}$, $\mathbf{H}$ – $L_{\supset\neg}$-формулы (в силу того, что $\mathbf{D}^*$ есть $L_{\supset\neg}$-формула).

(15) $\mathbf{D}^*$ есть пропозициональная переменная α (допущение).

(16) $v^*(\alpha) = 1$ (из (15), (13)).

(17) $\overline{\overline{v^*}}(\alpha) = 1$ (из (16), по определению $\overline{\overline{v}}$).

(18) $|\mathbf{D}^*|^{M_2}_{\overline{\overline{v^*}}} = 1$ (из (17) и (15)).

(19) неверно, что (15) (из (18), (12)).

(20) $\mathbf{D}^*$ есть $\neg\mathbf{F}$, или $\mathbf{G} \supset \mathbf{H}$, где $\mathbf{F}$, $\mathbf{G}$, $\mathbf{H}$ – $L_{\supset\neg}$-формулы (из (19), (14)).

(21) $\mathbf{D}^*$ есть формула $\neg\mathbf{F}$ (допущение).

(22) $|\neg\mathbf{F}|^{M_3^{\omega,2}}_{v^*} = 1$ (из (21), (13)).

(23) $\neg^{\omega}|\mathbf{F}|^{M_3^{\omega,2}}_{v^*} = 1$ (из (22), в силу определения значения $L_{\supset\neg}$-формулы).

(24) $|\mathbf{F}|^{M_3^{\omega,2}}_{v^*} = 0$ (из (23), в силу определения $\neg^{\omega}$).

(25) $|\mathbf{F}|^{M_2}_{\overline{\overline{v^*}}} = 0$ (из (24), по индуктивному допущению).

(26) $|\neg\mathbf{F}|^{M_2}_{\overline{\overline{v^*}}} = 1$ (из (25), в силу определений $\neg_2$ и значения $L_{\supset\neg}$-формулы).

(27) $|\mathbf{D}^*|^{M_2}_{\overline{\overline{v^*}}} = 1$ (из (26), (21)).

(28) неверно, что (21) (из (27), (12)).

(29) **D*** есть формула **G** ⊃ **H** (из (28), (20)).

(30) $|\mathbf{G} \supset \mathbf{H}|_{v^*}^{M_3^{\omega,2}} = 1$ (из (29), (13)).

(31) $|\mathbf{G}|_{v^*}^{M_3^{\omega,2}} \supset^{\omega} |\mathbf{H}|_{v^*}^{M_3^{\omega,2}} = 1$ (из (30), в силу определения значения $L_{\supset\neg}$-формулы).

(32) $|\mathbf{G}|_{v^*}^{M_3^{\omega,2}} = 0$ или $|\mathbf{H}|_{v^*}^{M_3^{\omega,2}} = 1$ (из (31), в силу определения $\supset^{\omega}$).

(33) $|\mathbf{G}|_{v^*}^{M_3^{\omega,2}} = 0$ (допущение).

(34) $|\mathbf{G}|_{\overline{\overline{v^*}}}^{M_2} = 0$ (из (33), в силу индуктивного допущения).

(35) $|\mathbf{G} \supset \mathbf{H}|_{\overline{\overline{v^*}}}^{M_2} = 1$ (из (34), в силу определений $\supset_2$ и значения $L_{\supset\neg}$-формулы).

(36) $|\mathbf{D}^*|_{\overline{\overline{v^*}}}^{M_2} = 1$ (из (36), (29)).

(37) неверно, что (33) (из (36), (12)).

(38) $|\mathbf{H}|_{v^*}^{M_3^{\omega,2}} = 1$ (из (37), (32)).

(39) $|\neg\mathbf{H}|_{v^*}^{M_3^{\omega,2}} = 0$ (из (38), в силу определений $\neg^{\omega}$ и значения $L_{\supset\neg}$-формулы).

(40) формула ¬**H** содержит не более $n - 1$ связок, следовательно, к ней применимо индуктивное допущение.

(41) $|\neg\mathbf{H}|_{\overline{\overline{v^*}}}^{M_2} = 0$ (из (40), (39)).

(42) $|\mathbf{H}|_{\overline{\overline{v^*}}}^{M_2} = 1$ (из (41), в силу определений $\neg_2$ и значения $L_{\supset\neg}$-формулы).

(43) $|\mathbf{G} \supset \mathbf{H}|_{\overline{\overline{v^*}}}^{M_2} = 1$ (из (42), в силу определений $\supset_2$ и значения $L_{\supset\neg}$-формулы).

(44) $|\mathbf{D}^*|_{\overline{\overline{v^*}}}^{M_2} = 1$ (из (43), (29)).

(45) неверно, что (29) (из (44), (12)).

(46) неверно, что (14) (из (45), (28), (19)).

(47) неверно, что (1) (из (46), (14)).

Утверждение У1 доказано.

Докажем У2. Для этого необходимо и достаточно доказать следующую лемму.

Лемма 6.

$\forall v$: Если v – оценка в M_2, то v – оценка в $M_3^{\omega,2}$ и $\forall\mathbf{A}$: $|\mathbf{A}|_v^{M_3^{\omega,2}} = |\mathbf{A}|_v^{M_2}$.

Доказательство.

Доказательство данной леммы строится индукцией по длине формулы, аналогично доказательству Леммы 3.

Теорема 7 доказана.

Теорема 8.

Пусть $M_3^{\psi,2} \in \{M_3^{\lambda,2}, M_3^{\mu,2}\}$. Тогда $\exists v \exists \mathbf{A}$: v – оценка в M_2, и $\mathbf{A}$ – $L_{\supset\neg}$-формула, и $|\mathbf{A}|_v^{M_2} = 0$, е.т.е. $\exists v'$: v' – оценка в $M_3^{\psi,2}$ и $|\mathbf{A}|_{v'}^{M_3^{\psi,2}} = 0$.

Для построения доказательства нам потребуется ряд определений.

Пусть φ^γ есть множество {<1, ½>, <½, 1>, <0, 0>}. Ясно, что φ^γ есть отображение множества {0, ½, 1} на множество {0, ½, 1}.

Для всякого отображения v множества всех пропозициональных переменных в {0, ½, 1} называем γ-замещением отображения v такое отображение w множества всех пропозициональных переменных в {0, 1}, что для всякой пропозициональной переменной **p**

$$w(\mathbf{p}) = \begin{cases} 1, \text{ если } v(\mathbf{p}) = ½, \\ ½, \text{ если } v(\mathbf{p}) = 1, \\ 0, \text{ если } v(\mathbf{p}) = 0. \end{cases}$$

Можно доказать, что для всякого отображения множества всех пропозициональных переменных в {0, ½, 1} существует единственное γ-замещение этого отображения. Обозначим через v^γ γ-замещение отображения v.

Теперь нам потребуется следующая лемма.

Лемма 7.

$\forall v \forall \mathbf{A}$: если v – оценка в $M_3^{\psi,2}$ и $\mathbf{A}$ – $L_{\supset\neg}$-формула, то v^{γ} есть оценка в $M_3^{\varsigma,2}$, и верно следующее:

(a) $|\mathbf{A}|_v^{M_3^{\chi,1}} = \varphi^{\gamma}|\mathbf{A}|_{v^{\gamma}}^{M_3^{\lambda,2}}$;

(b) $|\mathbf{A}|_v^{M_3^{\delta,1}} = \varphi^{\gamma}|\mathbf{A}|_{v^{\gamma}}^{M_3^{\mu,2}}$.

Доказательство леммы проводится индукцией по длине формулы аналогично доказательству Леммы 4.

Доказательство Теоремы 8 строится аналогично доказательству Теоремы 5 с использованием Лемм 5 и 7, а также Теоремы 6.

Теорема 9.

Пусть $M_3^{\varpi,2} \in \{M_3^{\nu,2}, M_3^{\pi,2}, M_3^{\theta,2}, M_3^{\rho,2}\}$. Тогда $\exists v \exists \mathbf{A}$: v – оценка в M_2, и $\mathbf{A}$ – $L_{\supset\neg}$-формула, и $|\mathbf{A}|_v^{M_2} = 0$, е.т.е. $\exists v'$: v' – оценка в $M_3^{\varpi,2}$ и $|\mathbf{A}|_{v'}^{M_3^{\varpi,2}} = 0$.

Лемма 8.

$\forall v \forall \mathbf{A}$: если v – оценка в $M_3^{\varpi,2}$ и $\mathbf{A}$ – $L_{\supset\neg}$-формула, то v^{γ} есть оценка в $M_3^{\omega,2}$, и верно следующее:

(a) $|\mathbf{A}|_v^{M_3^{\varepsilon,2}} = \varphi^{\beta}|\mathbf{A}|_{v^{\beta}}^{M_3^{\nu,2}}$,

(b) $|\mathbf{A}|_v^{M_3^{\phi,2}} = \varphi^{\beta}|\mathbf{A}|_{v^{\beta}}^{M_3^{\pi,2}}$,

(c) $|\mathbf{A}|_v^{M_3^{\gamma,2}} = \varphi^{\beta}|\mathbf{A}|_{v^{\beta}}^{M_3^{\theta,2}}$,

(d) $|\mathbf{A}|_v^{M_3^{\eta,2}} = \varphi^{\beta}|\mathbf{A}|_{v^{\beta}}^{M_3^{\rho,2}}$.

Доказательство леммы проводится индукцией по длине формулы аналогично доказательству Леммы 4.

Доказательство Теоремы 8 строится аналогично доказательству Теоремы 5 с использованием Лемм 6 и 8, а также Теоремы 7.

ГЛАВА 4. ТРЕХЗНАЧНЫЕ МАТРИЦЫ С НЕ С-РАСШИРЯЮЩИМИ БАЗОВЫМИ ОПЕРАЦИЯМИ

Отдельного рассмотрения заслуживает тот факт, что среди приведенных в предшествующих главах матриц большинство не являются *C*-расширяющими. То есть, их базовые операции не гарантируют, что при классической оценке переменных мы получим классическое итоговое значение.

В целом, полученные ранее матрицы можно разделить на два класса, между элементами которых имеется взаимное соответствие.

4.1. Матрицы с одним выделенным значением

Определим отображение ψ_0 множества $\{1, ½, 0\}$ на само себя следующим образом: $\psi_0 = \{<1, 1>, <½, 0>, <0, ½>\}$. Пусть M_3 – трехэлементная логическая матрица с одним выделенным значением. Будем обозначать посредством $M_{3,\psi}$ матрицу, полученную из M_3 заменой базовых операций M_3 на следующие:

$$x \supset_\psi y = \psi_0(\psi_0(x) \supset_3 \psi_0(y)).$$
$$\neg_\psi x = \psi_0(\neg_3(\psi_0(x))).$$

Теорема 10.

Пусть M_3 – трехэлементная логическая матрица и $\mathbf{\Gamma} \models_{M_3} \mathbf{B}$, е.т.е. $\mathbf{\Gamma} \models_{M_2} \mathbf{B}$. Для каждого множества $L_{\supset\neg}$-формул $\mathbf{\Gamma}$, для каждой $L_{\supset\neg}$-формулы $\mathbf{B}$ верно следующее: $\forall\mathbf{A}\forall v$: если $\mathbf{A}$ – $L_{\supset\neg}$-формула и v – оценка в M_3, то v – оценка в $M_{3,\psi}$ и $|\mathbf{A}|_v^{M_3} = 1$, е.т.е $|\mathbf{A}|_v^{M_{3,\psi}} = 1$.

В силу определения оценки, оценка в M_3 есть отображение множества пропозициональных переменных языка $L_{\supset\neg}$ на множество-носитель M_3. Однако множества-носители M_3 и $M_{3,\psi}$ совпадают. Следовательно, каждая оценка в M_3 есть оценка в $M_{3,\psi}$.

Теперь нам необходимо и достаточно доказать следующие утверждения:

У1. $\forall\mathbf{A}\forall v$: если $|\mathbf{A}|_v^{M_3} = 1$, то $|\mathbf{A}|_v^{M_{3,\psi}} = 1$;

У2. $\forall\mathbf{A}\forall v$: если $|\mathbf{A}|_v^{M_{3,\psi}} = 1$, то $|\mathbf{A}|_v^{M_3} = 1$.

Докажем У1 индукцией по построению формулы.

Пусть У1 верно для формул, которые содержат менее, чем n вхождений связок. Тогда достаточно доказать, что У1 верно, если $L_{\supset\neg}$-формула $\mathbf{A}$ содержит в точности n вхождений связок и графически совпадает с формулой $\neg\mathbf{C}$ либо с формулой $\mathbf{D} \supset \mathbf{E}$.

Случай 1. Пусть $L_{\supset\neg}$-формула $\mathbf{A}$ содержит в точности n вхождений связок и графически совпадает с формулой $\neg\, \mathbf{C}$.

(1) неверно, что У1 (допущение).

(2) $\exists(\neg\mathbf{C})\exists v$: $|\neg\mathbf{C}|_v^{M_3} = 1$ и $|\neg\mathbf{C}|_v^{M_{3,\psi}} \neq 1$ (из (1)).

(3) пусть $\neg\mathbf{C}^*$ и v^* – такие $L_{\supset\neg}$-формула и оценка, что $|\neg\mathbf{C}^*|_{v^*}^{M_3} = 1$ и $|\neg\mathbf{C}^*|_{v^*}^{M_{3,\psi}} \neq 1$ (из (2), исключение кванторов).

(4) $|\neg\mathbf{C}^*|_{v^*}^{M_3} = 1$ (из (3)).

(5) $|\mathbf{C}^*|_{v^*}^{M_3} \neq 1$ (из (4) и того факта, что $\mathbf{\Gamma} \models_{M_3} \mathbf{B}$, е.т.е. $\mathbf{\Gamma} \models_{M_2} \mathbf{B}$).

(6) $|\mathbf{C}^*|_{v^*}^{M_{3,\psi}} \neq 1$ (из (5), по индуктивному допущению).

(7) $\psi_0|\mathbf{C}^*|_{v^*}^{M_{3,\psi}} \neq 1$ (из (6), по определению ψ_0).

(8) $\neg_3\psi_0|\mathbf{C}^*|^{M_3,\psi}_{v^*} = 1$ (из (7) и того факта, что $\mathbf{\Gamma} \models_{M_3} \mathbf{B}$, е.т.е. $\mathbf{\Gamma} \models_{M_2} \mathbf{B}$ и $\neg_3$ есть базовая операция M_3).

(9) $\psi_0\neg_3\psi_0|\mathbf{C}^*|^{M_3,\psi}_{v^*} = 1$ (из (8), по определению ψ_0).

(10) $\psi_0\neg_3\psi_0|\mathbf{C}^*|^{M_3,\psi}_{v^*} = \neg_\psi|\mathbf{C}^*|^{M_3,\psi}_{v^*}$ (по определению $\neg_\psi$).

(11) $|\neg\mathbf{C}^*|^{M_3,\psi}_{v^*} = 1$ (из (10), (9)).

(12) $|\neg\mathbf{C}^*|^{M_3,\psi}_{v^*} \neq 1$ (из (3)).

(13) неверно, что (1) (из (12), (11)).

Случай 2. Пусть $L_{\supset\neg}$-формула **A** содержит в точности n вхождений связок и графически совпадает с формулой $\mathbf{D} \supset \mathbf{E}$. Докажем, что У1 выполняется для **A**.

(1) неверно, что У1 (допущение).

(2) $\exists(\mathbf{D} \supset \mathbf{E})\exists v$: $|\mathbf{D} \supset \mathbf{E}|^{M_3}_{v} = 1$ и $|\mathbf{D} \supset \mathbf{E}|^{M_3,\psi}_{v} \neq 1$ (из (1)).

(3) пусть $\mathbf{D}^* \supset \mathbf{E}^*$ и v^* – такие $L_{\supset\neg}$-формула и оценка, что $|\mathbf{D}^* \supset \mathbf{E}^*|^{M_3}_{v^*} = 1$ и $|\mathbf{D}^* \supset \mathbf{E}^*|^{M_3,\psi}_{v^*} \neq 1$ (из (2), исключение кванторов).

(4) $|\mathbf{D}^* \supset \mathbf{E}^*|^{M_3,\psi}_{v^*} \neq 1$ (из (3)).

(5) $|\mathbf{D}^* \supset \mathbf{E}^*|^{M_3,\psi}_{v^*} = \psi_0(\psi_0|\mathbf{D}^*|^{M_3,\psi}_{v^*} \supset_3 \psi_0|\mathbf{E}^*|^{M_3,\psi}_{v^*})$ (по определению $\supset_\psi$).

(6) $\psi_0|\mathbf{D}^*|^{M_3,\psi}_{v^*} \supset_3 \psi_0|\mathbf{E}^*|^{M_3,\psi}_{v^*} \neq 1$ (из (5), по определениюψ_0).

(7) $\psi_0|\mathbf{D}^*|^{M_3,\psi}_{v^*} = 1$ и $\psi_0|\mathbf{E}^*|^{M_3,\psi}_{v^*} \neq 1$ (из (7) и того факта, что $\mathbf{\Gamma} \models_{M_3} \mathbf{B}$, е.т.е. $\mathbf{\Gamma} \models_{M_2} \mathbf{B}$ и $\supset_3$ есть базовая операция M_3).

(8) $|\mathbf{D}^*|^{M_3,\psi}_{v^*} = 1$ (из (7), по определению ψ_0).

(9) $|\mathbf{E}^*|^{M_3,\psi}_{v^*} \neq 1$ (из (7), по определению ψ_0).

(10) $|\mathbf{D}^*|^{M_3}_{v^*} = 1$ (из (8), в силу индуктивного допущения).

(11) $|\mathbf{E}^*|^{M_3}_{v^*} \neq 1$ (из (9), в силу индуктивного допущения).

(12) $|\mathbf{D}^* \supset \mathbf{E}^*|^{M_3}_{v^*} \neq 1$ (из (11), (10) и того факта, что $\mathbf{\Gamma} \models_{M_3} \mathbf{B}$, е.т.е. $\mathbf{\Gamma} \models_{M_2} \mathbf{B}$ и $\supset_3$ есть базовая операция M_3).

(13) $|\mathbf{D}^* \supset \mathbf{E}^*|_{v^*}^{M_3} = 1$ (из (3)).

(14) неверно, что (1) (из (13), (12)).

У1 доказано.

Докажем У2 аналогичным образом. Пусть У2 верно для формул, которые содержат менее, чем n вхождений связок. Тогда достаточно доказать, что У2 верно, если $L_{\supset\neg}$-формула **A** содержит в точности n вхождений связок и графически совпадает с формулой $\neg\mathbf{C}$ либо с формулой $\mathbf{D} \supset \mathbf{E}$.

Случай 1. Пусть $L_{\supset\neg}$-формула **A** содержит в точности n вхождений связок и графически совпадает с формулой $\neg$ **C**.

(1) неверно, что У1 (допущение).

(2) $\exists(\neg\mathbf{C})\exists v$: $|\neg\mathbf{C}|_{v}^{M_3} \neq 1$ и $|\neg\mathbf{C}|_{v}^{M_{3,\psi}} = 1$ (из (1)).

(3) пусть $\neg\mathbf{C}^*$ и v^* – такие $L_{\supset\neg}$-формула и оценка, что $|\neg\mathbf{C}^*|_{v^*}^{M_3} \neq 1$ и $|\neg\mathbf{C}^*|_{v^*}^{M_{3,\psi}} = 1$ (из (2), исключение кванторов).

(4) $|\neg\mathbf{C}^*|_{v^*}^{M_3} \neq 1$ (из (3)).

(5) $|\mathbf{C}^*|_{v^*}^{M_3} = 1$ (из (4) и того факта, что $\mathbf{\Gamma} \models_{M_3} \mathbf{B}$, е.т.е. $\mathbf{\Gamma} \models_{M_2} \mathbf{B}$).

(6) $|\mathbf{C}^*|_{v^*}^{M_{3,\psi}} = 1$ (из (5), по индуктивному допущению).

(7) $\psi_0|\mathbf{C}^*|_{v^*}^{M_{3,\psi}} = 1$ (из (6), по определению ψ_0).

(8) $\neg_3\psi_0|\mathbf{C}^*|_{v^*}^{M_{3,\psi}} \neq 1$ (из (7) и того факта, что $\mathbf{\Gamma} \models_{M_3} \mathbf{B}$, е.т.е. $\mathbf{\Gamma} \models_{M_2} \mathbf{B}$ и $\neg_3$ есть базовая операция M_3).

(9) $\psi_0\neg_3\psi_0|\mathbf{C}^*|_{v^*}^{M_{3,\psi}} \neq 1$ (из (8), по определению ψ_0).

(10) $\psi_0\neg_3\psi_0|\mathbf{C}^*|_{v^*}^{M_{3,\psi}} = \neg_\psi|\mathbf{C}^*|_{v^*}^{M_{3,\psi}}$ (по определению $\neg_\psi$).

(11) $|\neg\mathbf{C}^*|_{v^*}^{M_{3,\psi}} \neq 1$ (из (10), (9)).

(12) $|\neg\mathbf{C}^*|_{v^*}^{M_{3,\psi}} = 1$ (из (3)).

(13) неверно, что (1) (из (12), (11)).

Случай 2. Пусть $L_{\supset\neg}$-формула **A** содержит в точности n вхождений связок и графически совпадает с формулой **D** ⊃ **E**. Докажем, что У2 выполняется для **A**.

(1) неверно, что У1 (допущение).

(2) $\exists(\mathbf{D}\supset\mathbf{E})\exists v$: $|\mathbf{D}\supset\mathbf{E}|_{v}^{M_3} = 1$ и $|\mathbf{D}\supset\mathbf{E}|_{v}^{M_{3,\psi}} \neq 1$ (из (1)).

(3) пусть **D*** ⊃ **E*** и v^* – такие $L_{\supset\neg}$-формула и оценка, что $|\mathbf{D}^*\supset\mathbf{E}^*|_{v^*}^{M_3} \neq 1$ и $|\mathbf{D}^*\supset\mathbf{E}^*|_{v^*}^{M_{3,\psi}} = 1$ (из (2), исключение кванторов).

(4) $|\mathbf{D}^*\supset\mathbf{E}^*|_{v^*}^{M_3} \neq 1$ (из (3)).

(5) $|\mathbf{D}^*|_{v^*}^{M_3} = 1$ и $|\mathbf{E}^*|_{v^*}^{M_3} \neq 1$ (из (4) и того факта, что $\mathbf{\Gamma} \models_{M_3} \mathbf{B}$, е.т.е. $\mathbf{\Gamma} \models_{M_2} \mathbf{B}$ и $\supset_3$ есть базовая операция M_3).

(6) $|\mathbf{D}^*|_{v^*}^{M_3} = 1$ (из (5)).

(7) $|\mathbf{D}^*|_{v^*}^{M_{3,\psi}} = 1$ (из (6), по индуктивному допущению).

(8) $\psi_0|\mathbf{D}^*|_{v^*}^{M_{3,\psi}} = 1$ (из (7), по определению ψ_0).

(9) $|\mathbf{E}^*|_{v^*}^{M_3} \neq 1$ (из (5)).

(10) $|\mathbf{E}^*|_{v^*}^{M_{3,\psi}} \neq 1$ (из (9), по индуктивному допущению).

(11) $\psi_0|\mathbf{E}^*|_{v^*}^{M_{3,\psi}} \neq 1$ (из (9) , по определению ψ_0).

(12) $\psi_0|\mathbf{D}^*|_{v^*}^{M_{3,\psi}} \supset_3 \psi_0|\mathbf{E}^*|_{v^*}^{M_{3,\psi}} \neq 1$ (из (11), (8) и того факта, что $\mathbf{\Gamma} \models_{M_3} \mathbf{B}$, е.т.е. $\mathbf{\Gamma} \models_{M_2} \mathbf{B}$ и $\supset_3$ есть базовая операция M_3).

(13) $\psi_0(\psi_0|\mathbf{D}^*|_{v^*}^{M_{3,\psi}} \supset_3 \psi_0|\mathbf{E}^*|_{v^*}^{M_{3,\psi}}) \neq 1$ (из (12), по определению ψ_0).

(14) $|\mathbf{D}^*|_{v^*}^{M_{3,\psi}} \supset_\psi |\mathbf{E}^*|_{v^*}^{M_{3,\psi}} \neq 1$ (из (13), по определению $\supset_\psi$).

(15) $|\mathbf{D}^*\supset\mathbf{E}^*|_{v^*}^{M_{3,\psi}} \neq 1$ (из (14), по определению значения $L_{\supset\neg}$-формулы).

(16) $|\mathbf{D}^*\supset\mathbf{E}^*|_{v^*}^{M_{3,\psi}} = 1$ (из (3)).

(17) неверно, что (1) (из (16), (15)).

У2 доказано. Теорема доказана.

Важным следствием данной теоремы является тот факт, что, если $\Gamma \models_{M_3} \mathbf{B}$, е.т.е. $\Gamma \models_{M_2} \mathbf{B}$, то $\Gamma \models_{M_{3y}} \mathbf{B}$, е.т.е. $\Gamma \models_{M_2}$.

4.2. Матрицы с двумя выделенными значениями

Определим отображение ψ_1 множества {1, ½, 0} на само себя следующим образом: $\psi_1 = \{<1, ½>, <½, 1>, <0, 0>\}$. Пусть M_3^2 – трехэлементная логическая матрица с двумя выделенными значениями. Будем обозначать посредством $M_{3,\psi}^2$ матрицу, полученную из M_3^2 заменой базовых операций M_3^2 на следующие:

$$x \supset_\psi y = \psi_1(\psi_1(x) \supset_3 \psi_1(y)).$$
$$\neg_\psi x = \psi_1(\neg_3(\psi_1(x))).$$

Теорема 11.

Пусть M_3^2 – трехэлементная логическая матрица и $\Gamma \models_{M_3^2} \mathbf{B}$, е.т.е. $\Gamma \models_{M_2} \mathbf{B}$. Для каждого множества $L_{\supset\neg}$-формул Γ, для каждой $L_{\supset\neg}$-формулы $\mathbf{B}$ верно следующее: $\forall\mathbf{A}\forall v$: если $\mathbf{A}$ – $L_{\supset\neg}$-формула и v – оценка в M_3^2, то v – оценка в $M_{3,\psi}^2$ и $|\mathbf{A}|_v^{M_3^2} = 0$, е.т.е $|\mathbf{A}|_v^{M_{3,\psi}^2} = 0$.

В силу определения оценки, оценка в M_3^2 есть отображение множества пропозициональных переменных языка $L_{\supset\neg}$ на множество-носитель M_3^2. Однако множества-носители M_3^2 и $M_{3,\psi}^2$ совпадают. Следовательно, каждая оценка в M_3^2 есть оценка в $M_{3,\psi}^2$.

Теперь нам необходимо и достаточно доказать следующие утверждения:

У1. $\forall\mathbf{A}\forall v$: если $|\mathbf{A}|_v^{M_3^2} = 0$, то $|\mathbf{A}|_v^{M_{3,\psi}^2} = 0$;

У2. $\forall\mathbf{A}\forall v$: если $|\mathbf{A}|_v^{M_{3,\psi}^2} = 0$, то $|\mathbf{A}|_v^{M_3^2} = 0$.

Докажем У1 индукцией по построению формулы.

Пусть У1 верно для формул, которые содержат менее, чем n вхождений связок. Тогда достаточно доказать, что У1 верно, если $L_{\supset\neg}$-формула $\mathbf{A}$ содержит в точности n вхождений связок и графически совпадает с формулой $\neg\mathbf{C}$ либо с формулой $\mathbf{D} \supset \mathbf{E}$.

Случай 1. Пусть $L_{\supset\neg}$-формула **A** содержит в точности n вхождений связок и графически совпадает с формулой $\neg$ **C**.

(1) неверно, что У1 (допущение).

(2) $\exists(\neg\mathbf{C})\exists v$: $|\neg\mathbf{C}|_v^{M_3^2} = 0$ и $|\neg\mathbf{C}|_v^{M_{3,\psi}^2} \neq 0$ (из (1)).

(3) пусть $\neg\mathbf{C}^*$ и v^* – такие $L_{\supset\neg}$-формула и оценка, что $|\neg\mathbf{C}^*|_{v^*}^{M_3^2} = 0$ и $|\neg\mathbf{C}^*|_{v^*}^{M_{3,\psi}^2} \neq 0$ (из (2), исключение кванторов).

(4) $|\neg\mathbf{C}^*|_{v^*}^{M_3^2} = 0$ (из (3)).

(5) $|\mathbf{C}^*|_{v^*}^{M_3^2} \neq 0$ (из (4) и того факта, что $\mathbf{\Gamma} \models_{M_3^2} \mathbf{B}$, е.т.е. $\mathbf{\Gamma} \models_{M_2} \mathbf{B}$).

(6) $|\mathbf{C}^*|_{v^*}^{M_{3,\psi}^2} \neq 0$ (из (5), по индуктивному допущению).

(7) $\psi_1|\mathbf{C}^*|_{v^*}^{M_{3,\psi}^2} \neq 0$ (из (6), по определению ψ_1).

(8) $\neg_3\psi_1|\mathbf{C}^*|_{v^*}^{M_{3,\psi}^2} = 0$ (из (7) и того факта, что $\mathbf{\Gamma} \models_{M_3^2} \mathbf{B}$, е.т.е. $\mathbf{\Gamma} \models_{M_2} \mathbf{B}$ и $\neg_3$ есть базовая операция M_3^2).

(9) $\psi_1\neg_3\psi_1|\mathbf{C}^*|_{v^*}^{M_{3,\psi}^2} = 0$ (из (8), по определению ψ_1).

(10) $\psi_1\neg_3\psi_1|\mathbf{C}^*|_{v^*}^{M_{3,\psi}^2} = \neg_\psi|\mathbf{C}^*|_{v^*}^{M_{3,\psi}^2}$ (по определению $\neg_\psi$).

(11) $|\neg\mathbf{C}^*|_{v^*}^{M_{3,\psi}^2} = 1$ (из (10), (9)).

(12) $|\neg\mathbf{C}^*|_{v^*}^{M_{3,\psi}^2} \neq 1$ (из (3)).

(13) неверно, что (1) (из (12), (11)).

Случай 2. Пусть $L_{\supset\neg}$-формула **A** содержит в точности n вхождений связок и графически совпадает с формулой $\mathbf{D} \supset \mathbf{E}$. Докажем, что У1 выполняется для **A**.

(1) неверно, что У1 (допущение).

(2) $\exists(\mathbf{D} \supset \mathbf{E})\exists v$: $|\mathbf{D} \supset \mathbf{E}|_v^{M_3^2} = 0$ и $|\mathbf{D} \supset \mathbf{E}|_v^{M_{3,\psi}^2} \neq 0$ (из (1)).

(3) пусть $\mathbf{D}^* \supset \mathbf{E}^*$ и v^* – такие $L_{\supset\neg}$-формула и оценка, что $|\mathbf{D}^* \supset \mathbf{E}^*|_{v^*}^{M_3^2} = 0$ и $|\mathbf{D}^* \supset \mathbf{E}^*|_{v^*}^{M_{3,\psi}^2} \neq 0$ (из (2), исключение кванторов).

(4) $|\mathbf{D}^* \supset \mathbf{E}^*|_{v^*}^{M_3^2} = 0$ (из (3)).

(5) $|\mathbf{D}^*|_{v^*}^{M_3^2} \neq 0$ и $|\mathbf{E}^*|_{v^*}^{M_3^2} = 0$ (из (4) и того факта, что $\mathbf{\Gamma} \models_{M_3^2} \mathbf{B}$, е.т.е. $\mathbf{\Gamma} \models_{M_2} \mathbf{B}$ и $\supset_3$ есть базовая операция M_3^2).

(6) $|\mathbf{D}^*|_{v^*}^{M_3^2} \neq 0$ (из (5)).

(7) $|\mathbf{D}^*|_{v^*}^{M_{3,\psi}^2} \neq 0$ (из (6), по индуктивному допущению).

(8) $\psi_1|\mathbf{D}^*|_{v^*}^{M_{3,\psi}^2} \neq 0$ (из (7), по определению ψ_1).

(9) $|\mathbf{E}^*|_{v^*}^{M_3^2} = 0$ (из (5)).

(10) $|\mathbf{E}^*|_{v^*}^{M_{3,\psi}^2} = 0$ (из (9), по индуктивному допущению).

(11) $\psi_1|\mathbf{E}^*|_{v^*}^{M_{3,\psi}^2} = 0$ (из (9) , по определению ψ_1).

(12) $\psi_1|\mathbf{D}^*|_{v^*}^{M_{3,\psi}^2} \supset_3 \psi_1|\mathbf{E}^*|_{v^*}^{M_{3,\psi}^2} = 0$ (из (11), (8) и того факта, что $\mathbf{\Gamma} \models_{M_3^2} \mathbf{B}$, е.т.е. $\mathbf{\Gamma} \models_{M_2} \mathbf{B}$ и $\supset_3$ есть базовая операция M_3^2).

(13) $\psi_1(\psi_1|\mathbf{D}^*|_{v^*}^{M_{3,\psi}^2} \supset_3 \psi_1|\mathbf{E}^*|_{v^*}^{M_{3,\psi}^2}) = 0$ (из (12), по определению ψ_1).

(14) $|\mathbf{D}^*|_{v^*}^{M_{3,\psi}^2} \supset_\psi |\mathbf{E}^*|_{v^*}^{M_{3,\psi}^2} = 0$ (из (13), по определению $\supset_\psi$).

(15) $|\mathbf{D}^* \supset \mathbf{E}^*|_{v^*}^{M_{3,\psi}^2} = 0$ (из (14), по определению значения $L_{\supset\neg}$-формулы).

(16) $|\mathbf{D}^* \supset \mathbf{E}^*|_{v^*}^{M_{3,\psi}} \neq 0$ (из (3)).

(17) неверно, что (1) (из (16), (15)).

У1 доказано.

Докажем У2 аналогичным образом. Пусть У2 верно для формул, которые содержат менее, чем n вхождений связок. Тогда достаточно доказать, что У2 верно, если $L_{\supset\neg}$-формула **A** содержит в точности n вхождений связок и графически совпадает с формулой $\neg$**C** либо с формулой **D** $\supset$ **E**.

Случай 1. Пусть $L_{\supset\neg}$-формула **A** содержит в точности n вхождений связок и графически совпадает с формулой $\neg$ **C**.

(1) неверно, что У1 (допущение).

(2) $\exists(\neg\mathbf{C})\exists v$: $|\neg\mathbf{C}|_v^{M_3^2} \neq 0$ и $|\neg\mathbf{C}|_v^{M_{3,\psi}^2} = 0$ (из (1)).

(3) пусть $\neg\mathbf{C}^*$ и v^* – такие $L_{\supset\neg}$-формула и оценка, что $|\neg\mathbf{C}^*|_{v^*}^{M_3^2} \neq 0$ и $|\neg\mathbf{C}^*|_{v^*}^{M_{3,\psi}^2} = 0$ (из (2), исключение кванторов).

(4) $|\neg\mathbf{C}^*|_{v^*}^{M_3^2} \neq 0$ (из (3)).

(5) $|\mathbf{C}^*|_{v^*}^{M_3^2} = 0$ (из (4) и того факта, что $\mathbf{\Gamma} \models_{M_3^2} \mathbf{B}$, е.т.е. $\mathbf{\Gamma} \models_{M_2} \mathbf{B}$).

(6) $|\mathbf{C}^*|_{v^*}^{M_{3,\psi}^2} = 0$ (из (5), по индуктивному допущению).

(7) $\psi_1|\mathbf{C}^*|_{v^*}^{M_{3,\psi}^2} = 0$ (из (6), по определению ψ_1).

(8) $\neg_3\psi_1|\mathbf{C}^*|_{v^*}^{M_{3,\psi}^2} \neq 0$ (из (7) и того факта, что $\mathbf{\Gamma} \models_{M_3^2} \mathbf{B}$, е.т.е. $\mathbf{\Gamma} \models_{M_2} \mathbf{B}$ и $\neg_3$ есть базовая операция M_3^2).

(9) $\psi_1\neg_3\psi_1|\mathbf{C}^*|_{v^*}^{M_{3,\psi}^2} \neq 0$ (из (8), по определению ψ_1).

(10) $\psi_1\neg_3\psi_1|\mathbf{C}^*|_{v^*}^{M_{3,\psi}^2} = \neg_\psi|\mathbf{C}^*|_{v^*}^{M_{3,\psi}^2}$ (по определению $\neg_\psi$).

(11) $|\neg\mathbf{C}^*|_{v^*}^{M_{3,\psi}^2} \neq 0$ (из (10), (9)).

(12) $|\neg\mathbf{C}^*|_{v^*}^{M_{3,\psi}^2} = 0$ (из (3)).

(13) неверно, что (1) (из (12), (11)).

Случай 2. Пусть $L_{\supset\neg}$-формула $\mathbf{A}$ содержит в точности n вхождений связок и графически совпадает с формулой $\mathbf{D} \supset \mathbf{E}$. Докажем, что У2 выполняется для $\mathbf{A}$.

(1) неверно, что У1 (допущение).

(2) $\exists(\mathbf{D} \supset \mathbf{E})\exists v$: $|\mathbf{D} \supset \mathbf{E}|_{v}^{M_3^2} \neq 0$ и $|\mathbf{D} \supset \mathbf{E}|_{v}^{M_{3,\psi}^2} = 0$ (из (1)).

(3) пусть $\mathbf{D}^* \supset \mathbf{E}^*$ и v^* – такие $L_{\supset\neg}$-формула и оценка, что $|\mathbf{D}^* \supset \mathbf{E}^*|_{v^*}^{M_3^2} \neq 0$ и $|\mathbf{D}^* \supset \mathbf{E}^*|_{v^*}^{M_{3,\psi}^2} = 0$ (из (2), исключение кванторов).

(4) $|\mathbf{D}^* \supset \mathbf{E}^*|_{v^*}^{M_{3,\psi}^2} = 0$ (из (3)).

(5) $|\mathbf{D}^* \supset \mathbf{E}^*|_{v^*}^{M_{3,\psi}^2} = \psi_1(\psi_1|\mathbf{D}^*|_{v^*}^{M_{3,\psi}^2} \supset_3 \psi_1|\mathbf{E}^*|_{v^*}^{M_{3,\psi}^2})$ (по определению $\supset_\psi$).

(6) $\psi_1|\mathbf{D}^*|_{v^*}^{M_{3,\psi}^2} \supset_3 \psi_1|\mathbf{E}^*|_{v^*}^{M_{3,\psi}^2} = 0$ (из (5), по определению ψ_1).

(7) $\psi_1|\mathbf{D}^*|_{v^*}^{M_{3,\psi}^2} \neq 0$ и $\psi_1|\mathbf{E}^*|_{v^*}^{M_{3,\psi}^2} = 0$ (из (7) и того факта, что $\mathbf{\Gamma} \models_{M_3^2} \mathbf{B}$, е.т.е. $\mathbf{\Gamma} \models_{M_2} \mathbf{B}$ и $\supset_3$ есть базовая операция M_3^2).

(8) $|\mathbf{D}^*|_{v^*}^{M_{3,\psi}^2} \neq 0$ (из (7), по определению ψ_1).

(9) $|\mathbf{E}^*|_{v^*}^{M_{3,\psi}^2} = 0$ (из (7), по определению ψ_1).

(10) $|\mathbf{D}^*|^{M_3^2}_{v^*} \neq 0$ (из (8), в силу индуктивного допущения).

(11) $|\mathbf{E}^*|^{M_3^2}_{v^*} = 0$ (из (9), в силу индуктивного допущения).

(12) $|\mathbf{D}^* \supset \mathbf{E}^*|^{M_3^2}_{v^*} = 0$ (из (11), (10) и того факта, что $\mathbf{\Gamma} \models_{M_3^2} \mathbf{B}$, е.т.е. $\mathbf{\Gamma} \models_{M_2} \mathbf{B}$ и $\supset_3$ есть базовая операция M_3).

(13) $|\mathbf{D}^* \supset \mathbf{E}^*|^{M_3^2}_{v^*} = 1$ (из (3)).

(14) неверно, что (1) (из (13), (12)).

У2 доказано. Теорема доказана.

Аналогично Теореме 10, из данной теоремы вытекает, что, если $\mathbf{\Gamma} \models_{M_3^2} \mathbf{B}$, е.т.е. $\mathbf{\Gamma} \models_{M_2} \mathbf{B}$, то $\mathbf{\Gamma} \models_{M_{3,\psi}^2} \mathbf{B}$, е.т.е. $\mathbf{\Gamma} \models_{M_2}$.

Многим не C-расширяющим изоморфам соответствует C-расширяющий двойник. В этом случае, свойство сопоставлять формулам неклассические значения при классической оценке пропозициональных переменных является, в определенном смысле, «синтаксическим». Можно рассматривать его как результат выбора числовых обозначений для значений истинности. Однако в части пар матриц оба элемента не являются C-расширяющими. В этом случае речь идет о подлинном отсутствии C-расширительности.

Заключение

Подводя итоги, повторно остановимся на некоторых приведенных в предшествующих главах результатах.

В Главе 2 мы показали, что трехзначные матрицы для классической логики существенно отличаются по функциональным свойствам от стандартной двухзначной матрицы. В трехзначном случае операции не образуют функционально полную систему. Кроме того, они не обладают решеточными свойствами, имеющими место в двухзначном случае. То есть, можно сказать, что двухзначная семантика для классической пропозициональной логики является наиболее сильной с точки зрения алгебраических свойств.

Интересно, что к похожим выводам нас подталкивают результаты, приведенные в Главе 3. Данная глава посвящена исследованию трехзначных матриц с классическим классом законов и неклассическим отношением логического следования. В этих матрицах множества пар <**Г**, **А**>, где **Г** – множество посылок, и **А** – заключение, логически следующее из **Г**, содержит меньше элементов чем в стандартном двухзначном случае. Например, в M_2 из $\mathbf{p} \supset \mathbf{q}$ и **q** логически следует **p**. Однако это не так в трехзначном случае. Следовательно, в двухзначном случае отношение логического следования сильнее, чем в трехзначном.

В терминах логического следования мы можем трактовать логический закон как «формулу, которая логически следует из любого множества посылок». Ясно, что множество законов включается во множество пар <**Г**, **А**>, описанное в предыдущем абзаце. Получается, что классическое множество формул, следующих из любого множества посылок, может содержаться в множестве пар <**Г**, **А**>, которое содержит меньше элементов, чем имеет место в M_2. Это позволяет утверждать, что в двухзначной матрице для классической логики отношение логического следования является избыточно сильным по отношению к классу законов.

Таким образом, мы можем заключить, что ограничение числа истинностных значений двумя – «Истиной» и «Ложью» – порождает ряд «артефактов», свойств, которые не являются необходимыми с точки зрения структуры классических класса тавтологий и отношения логического следования. Иными словами, выбор *минимального* числа истинностных значений при построении семантики для классической пропозициональной логики приводит нас к *максимальной* по силе системе.

Литература

1. *Бочвар Д.А.* Об одном трехзначном исчислении и его применении к анализу парадоксов классического расширенного функционального исчисления // Математический сборник. 1938. Т. 4. № 2. С. 287–308.

2. *Девяткин Л.Ю.* Трехзначные изоморфы классической пропозициональной логики // Логические исследования. Вып. 11. М., 2004. С. 119–125.

3. *Девяткин Л.Ю.* К вопросу о трехэлементных характеристических матрицах для классической логики высказываний // Труды научно-исследовательского семинара Логического центра Ин-та философии РАН. М., 2006. С. 43–49.

4. *Девяткин Л.Ю., Карпенко А.С., Попов В.М.* Трехзначные характеристические матрицы классической пропозициональной логики // Там же. С. 50–62.

5. *Девяткин Л.Ю.* Отношение логического следования и проблема многозначности // Вестн. Моск. ун-та (Серия 7. Философия). 2008. Вып. 2. С. 106–108.

6. *Клини С.К.* Введение в метаматематику. М., 1957.

7. *Карпенко А.С.* Многозначные логики. Логика и компьютер. Вып. 4. М.: Наука, 1997.

8. *Комендантский В.Е.* Алгоритм поиска трехзначных изоморфов классической логики // Logical Studies. 2000. WEB. № 4.

9. *Мендельсон Э.* Введение в математическую логику. М., 1984.

10. *Раца М.Ф.* Критерий функциональной полноты в интуиционистской логике высказываний // Докл. Акад. Наук СССР. 1971. Т. 201. № 4.

11. *Финн В.К.* Аксиоматизация некоторых трехзначных исчислений высказываний и их алгебр // Философия в современном мире: Философия и логика. М., 1974.

12. *Розоноэр Л.И.* О выявлении противоречий в формальных теориях I // Автоматика и телемеханика. 1983. № 6. С. 113–124.

13. *Розоноэр Л.И.* О выявлении противоречий в формальных теориях II // Автоматика и телемеханика. 1983. № 7. С. 97–104.

14. *Розоноэр Л.И.* О семантике противоречивых формальных теорий // Семиотика и информатика. 1993. Вып. 33. С. 71–100.

15. *Финн В.К.* Аксиоматизация некоторых трехзначных исчислений высказываний и их алгебр // Философия в современном мире: Философия и логика. М., 1974. С. 398–438.

16. *Черч А.* Введение в математическую логику. М., 1960.

17. *Avron A.* Natural 3-valued logics – characterization and proof theory // The Journal of Symbolic Logic. 56 (1). 1991. P. 276–294.

18. *D'Ottaviano I.M.L., Costa N.C.A. da.* Sur un probleme de Jaskowski // Comptes Rendus Acad. Sci. 1970. 270A. P. 1343–1349.
19. *Epstein R.L* The semantic foundations of logic. Vol. 1: Propositional logic. Dordrecht: Kluwer, 1990.
20. *Finn V., Grigolia R.* Nonsense logics and their algebraic properties // Theoria. 1993. Vol. 59. Pt. 1–3. P. 39–45.
21. *Gottwald S.* A Treatise on Many-valued Logic // Research Studies Press. Baldock, 2001.
22. *Heyting A.* Die Formalen Regeln der Intuitionistischen Logik // Sitzungsberichte der Preussischen Academie der Wissenschaft zu Berlin. 1930. P. 42–46.
23. *Jaśkowski S.* Investigations into the system of intuitionistic logic // Studia Logica. 34. 1975. P. 117–120.
24. *Kolmogoroff A.* Zur Deutung der intuitionistischen Logik // Math. Zeitschr. 1932. P. 58–65.
25. *Łukasiewicz J.* On three-valued logic // Selected Works. Amsterdam, 1970. P. 87–88.
26. *Łukasiewicz J.* A system of modal logic // Selected Works. Amsterdam, 1970. P. 352–390.
27. *Malinowski G.* On Many-Valuedness, Sentential Identity, Interference and Łukasiewicz Modalities // Logica Trianguli. 1997. Vol. 1. P. 61–71.
28. *Monteiro A.* Construction des algebres de Lukasiewicz trivalentes dans les algebras de Boole monadiques, I // Mathematica Japonica. 12. P. 1–23.
29. *Post E.L.* Introduction to a general theory of elementary propositions // American Journal of Mathematics. 1921. Vol. 43. № 3. P. 163–185.
30. *Rescher N.* Many-valued logic. N.Y., 1969.
31. *Rosser J.B.* Many-valued logics. Amsterdam, 1952.
32. *Sette A.M.* On propositional calculus P_1 // Mathematica Japonica. 1973. Vol. 16. P. 173–180.
33. *Słupecki J., Bryl J., Prucnal T.* Some remarks on the three-valued logic of J. Jukasiewicz // Studia Logica. 21. P. 45–70.
34. *Tarski A.* On the concept of logical consequence // Logics, Semantics, Metamathematics. 2nd ed. Hackett (Indianapolis), 1983. P. 409–420.
35. *Wajsberg M.* Contributions to meta-calculus of propositions I // Logical Works. Wrocław, 1977. P. 89–106.

Научное издание

Девяткин Леонид Юрьевич

Трехзначные семантики для классической логики высказываний

Утверждено к печати Ученым советом
Института философии РАН

Художник *Н.Е. Кожинова*

Технический редактор *Ю.А. Аношина*

Корректура автора

Лицензия ЛР № 020831 от 12.10.98 г.

Подписано в печать с оригинал-макета 22.09.11.
Формат 60x84 1/16. Печать офсетная. Гарнитура Times New Roman.
Усл. печ. л. 7,0. Уч.-изд. л. 3,13. Тираж 500 экз. Заказ № 020.

Оригинал-макет изготовлен в Институте философии РАН
Компьютерный набор автора
Компьютерная верстка: *Ю.А. Аношина*

Отпечатано в ЦОП Института философии РАН
119991, Москва, Волхонка, 14, стр. 5

Информацию о наших изданиях см. на сайте Института философии:
http://iph.ras.ru/arhive.htm

ВЫШЛИ В СВЕТ

1. ***Артемьева, О.В.*** **Английский этический интеллектуализм XVIII–XIX вв. [Текст] / О.В. Артемьева ; Рос. акад. наук, Ин-т философии. – М. : ИФРАН, 2011. – 196 с. ; 20 см. – 500 экз. – ISBN 978-5-9540-0194-5.**
   В монографии анализируются основные положения английского этического интеллектуализма на материале учений Ричарда Прайса (1723–1791) и Генри Сиджвика (1838–1900). Этический интеллектуализм Нового времени, будучи прежде всего определенной концепцией морального познания, представлял вместе с тем одну из первых в истории мысли попыток построения философского понятия морали, осмысления морали в единстве ее ключевых характеристик – рациональности, объективности, автономности и универсальности.

2. **Биоэтика и гуманитарная экспертиза. Вып. 5 [Текст] / Рос. акад. наук, Ин-т философии ; Отв. ред. *Ф.Г. Майленова*. – М.: ИФРАН, 2011. – 252 с.; 20 см. – Библиогр. в примеч. – 500 экз. – ISBN 978-5-9540-0196-9.**
   Пятый выпуск ежегодного сборника, подготовленный Сектором биоэтики и гуманитарной экспертизы Института философии РАН, представляет собой результаты исследований сотрудников данного подразделения совместно с учеными из других подразделений и институтов. Авторы представляют широкое тематическое разнообразие в изучении философских аспектов биоэтики и гуманитарной экспертизы. Дается интересный философско-антропологический анализ фундаментальных проблем комплексного изучения человека. Также в сборнике представлено обсуждение моральных проблем, возникающих в практике преподавания, психотерапии и психокоррекции, что является важным дополнением к исследованиям в области биотехнологий, которым традиционно уделяется пристальное внимание сотрудников сектора. Третий раздел сборника посвящен публикациям сотрудников группы виртуалистики.

3. ***Голобородько, Д.Б.*** **Концепции разума в современной французской философии. М.Фуко и Ж.Деррида [Текст] /Д.Б. Голобородько; Рос. акад. наук, Ин-т философии. – М.: ИФ РАН, 2011. – 177 с. ; 17 см. – Библиогр. в примеч.: с. 85–95. – 500 экз. – ISBN 978-5-9540-0183-9.**
   Книга посвящена философско-антропологическому анализу знаменитой полемики о разуме и неразумии. Рассматривается ряд критических подходов к проблеме рациональности во французской философии XX в. Дается обзор критики разума в работах А.Кожева, Ж.Батая, М.Бланшо. Анализируются концепции «археологии знания» (М.Фуко) и «деконструкции» (Ж.Деррида). В центре исследования такие понятия, как «Другой», «безумие», «исключение», «власть», «различие». В приложении помещены переводы ключевых для исследуемой полемики текстов: «*Cogito* et histoire de la folie» Ж. Деррида (публикуется в новом переводе) и «Mon corps, ce papier, ce feu» М. Фуко (на русском языке публикуется впервые).
   Книга адресована широкому кругу читателей, интересующихся современной философской и политической антропологией.

4. **История философии. № 16 [Текст] / Рос. акад. наук, Ин-т философии ; Отв. ред.: И.И. Блауберг, С.И. Бажов. – М. : ИФРАН, 2011. – 295 с. ; 20 см. – Библиогр. в примеч. – 1 000 экз. – ISSN 2074-5869.**
Данный выпуск журнала содержит главным образом статьи и публикации, в которых освещается малоисследованная проблематика различных этапов историко-философского процесса в России. Наибольшее внимание авторы выпуска уделяют древнерусской философской мысли, а также отечественной философии XIX и XX вв., в том числе концепциям К.Д.Кавелина, В.С.Соловьева, П.И.Новгородцева, Н.О.Лосского. В номере публикуется перевод статьи С.Л.Франка «“Я” и “мы” (к анализу общения)». Здесь также помещено исследование, посвященное одному из эпизодов истории установления интеллектуальных контактов в арабоязычном христианстве XIII в. Выпуск журнала адресован специалистам, аспирантам, студентам и всем интересующимся историей отечественной и восточной философии.

5. ***Келле, В.Ж.* Интеллектуальное и духовное начала в культуре [Текст] / В.Ж. Келле; Рос. акад. наук, Ин-т философии. – М.: ИФРАН, 2011. – 218 с.; 20 см. – 500 экз. – ISBN 978-5-9540-0191-4.**
«Интеллектуальное и духовное начала в культуре» – последняя работа недавно ушедшего из жизни Владислава Жановича Келле, советского и русского философа, социолога и историка науки, чьи работы (многие из них – в соавторстве с М.Я.Ковальзоном) составили целую эпоху в отечественном обществознании.
Исследуя структурную неоднородность культуры, автор усматривает наличие интеллектуального и духовного начал в культуре западноевропейского типа. В книге описываются интеллектуальное начало (ветвь) культуры, основанное на субъект-объектном отношении, и духовное начало, воспроизводящее субъект-субъектные отношения в культуре принципиально и отличающееся от интеллектуально-объективных форм сознания. Знание и вера, истина и ценность рассматриваются как частные проявления этих начал.
Часть материалов была публикована ранее. В книгу они вошли в переработанном виде и в соответствии с ее общей логикой. В приложении представлены материалы, тематика которых примыкает к идеям книги и дает представление об исследовательском кругозоре В.Ж. Келле.

6. ***Корзо, М.А.* Нравственное богословие Симеона Полоцкого: освоение католической традиции московскими книжниками второй половины XVII века [Текст] / М.А. Корзо ; Рос. акад. наук, Ин-т философии. – М. : ИФРАН, 2011. – 155 с. ; 20 см. – Библиогр.: с. 1450–154. – 500 экз. – ISBN 978-5-9540-0186-0.**
Исследование посвящено анализу системы нравственного богословия церковного деятеля, богослова и педагога второй половины XVII в. Симеона Полоцкого, принадлежавшего к числу приглашенных московским правительством выходцев с православных земель Речи Посполитой, которые получили богословское образование в Киево-Могилянской академии или в иных учебных заведениях, испытавших сильное влияние системы образования иезуитов. Сочинения авторов этого круга, и в первую очередь Симеона

Полоцкого, положили начало той линии развития русского (московского) православия XVII в., которая формировалась под значительным влиянием католического нравственного богословия.

В книге реконструируются основные источники системы, влияния иных (помимо православной) конфессиональных традиций; выявляются её композиционные и содержательные особенности; на примере заповедей второй скрижали Декалога анализируется предлагаемая богословом программа практического поведения христианина в миру.

7. ***Кричевский, А.В.*** **Абсолютный дух сквозь лики триединства. Сравнительный анализ философско-теологических концепций Гегеля и позднего Шеллинга [Текст] /А.В. Кричевский; Рос. акад. наук, Ин-т философии. – М.: ИФ РАН, 2011. – 237 с.; 20 см. –500 экз. – ISBN 978-5-9540-0184-6.**

Книга представляет собой продолжение исследования, основные общеметафизические аспекты которого были проработаны в монографии автора «Образ абсолюта в философии Гегеля и позднего Шеллинга» (М.: ИФ РАН, 2009). В предлагаемой теперь вниманию читателя новой индивидуальной монографии автор видит свою задачу в том, чтобы провести сравнение концепций Гегеля и позднего Шеллинга прежде всего по следующим основаниям: (1) соотношение диалектики понятия и метафизики свободы в контексте учения о триединстве абсолютного духа; (2) отношение к традиции немецкой философской мистики (продолжение темы, фактически уже начатой в разделе первой книги, посвященном анализу установки спекулятивного символизма); (3) место мира и человека в структуре абсолюта.

Для философов, теологов и всех тех, кого интересуют фундаментальные проблемы метафизики и надконфессионального умозрительного богословия.

8. ***Кузнецов, М.М.*** **Опыт коммуникации в информационную эпоху. Исследовательские стратегии Т.В. Адорно и М. Маклюэна [Текст] / М.М. Кузнецов ; Рос. акад. наук, Ин-т философии. – М. : ИФРАН, 2011. – 143 с. ; 20 см. – 500 экз. – ISBN 978-5-9540-0196-9.**

В монографии дается философский анализ новых структур коммуникативного опыта, сложившихся к концу XX – началу XXI вв. в результате бурного развития информационных технологий, исследуется взаимосвязь когнитивной деятельности и коммуникативных практик, а также роль коммуникации в формировании стереотипов поведения и мышления. В центре внимания автора – концепции Т.Адорно и М.Маклюэна, раскрывших в своем творчестве конститутивную роль средств коммуникации в структурировании различных типов ментальности и форм человеческой жизнедеятельности.